L3 PS math. 2020-2021

Analyse Complexe 2

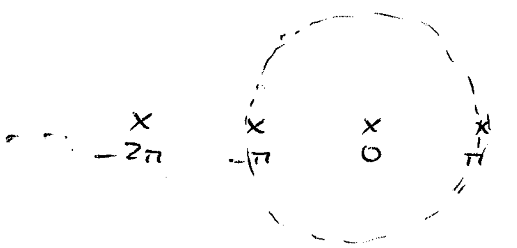
2^e Session

Solution

1. a) $\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc le plus grand $r > 0$ t.q. f soit holomorphe sur $D(0,r)\setminus\{0\}$ est $r = \pi$.

(f est holomorphe comme quotient de fonctions holomorphes avec le dénominateur $\neq 0$).



$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

cette dernière somme est $\neq 0$ pour $z = 0$, donc $\sin z$ admet un zéro simple en 0 donc $\frac{1}{\sin z}$ admet un pôle simple (d'ordre 1) en 0.

$$\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{\frac{(-1)^0}{1!}} = 1.$$

b) $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, sin est holo. sur $\mathbb{C}$, donc g est holo sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $r = +\infty$

Pour $z \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ est bornée et n'admet pas de limite pour $z \to 0$. Le comportement n'est ni celui d'un pôle ni celui d'une singularité éliminable : $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ admet une singularité essentielle en 0.

D'autre part $\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} \frac{1}{(2n+1)!}$

$= \sum_{n\leq 0} \frac{(-1)^n z^{-1+2n}}{(2|n|+1)!}$, donc le

coefficient du terme d'exposant -1 $(n=0)$ dans la série de Laurent ~~est~~ vaut 1 :

$\text{Res}(g;0) = 1$.

2) a) $\text{Ind}(\gamma;a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

C'est le nombre de tours (algébrique = positif dans le sens trigonométique) que fait γ autour de $\underline{a}$.

Toute fonction f holomorphe sur Ω admet une primitive

$\Longleftrightarrow$

$\forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$, $\forall \gamma$ chemin fermé dans Ω, $\text{Ind}(\gamma;a) = 0$.

b) $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in\{+1,-1\}} \text{Ind}(\gamma;a)\ \text{Res}(f;a)$

(formule des résidus généralisée, sur $\mathbb{C}$)

$= 2\pi i \left(\text{Res}(f;1)\,\text{Ind}(\gamma;1) + \text{Res}(f;-1)\,\text{Ind}(\gamma;-1)\right)$.

c) Avec ~~les valeurs par~~ cette f particulière,

$\text{Res}(f,1) = \alpha$ si $m=1$

$= 0$ si $m\geq 2$

$$\mathrm{Res}(f;-1) = \beta \quad \text{si } n=1$$
$$= 0 \quad \text{si } n \geq 2.$$

Donc pour un chemin fermé quelconque γ dans Ω_1,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\alpha \,\mathrm{Ind}(\gamma;1) + \beta\, \mathrm{Ind}(\gamma;-1)\right) \quad \text{si } m = n = 1$$
$$= 2\pi i\, \alpha\, \mathrm{Ind}(\gamma;1) \quad \text{si } m=1,\ n\geq 2$$
$$= 2\pi i\, \beta\, \mathrm{Ind}(\gamma;-1) \quad \text{si } n=1,\ m\geq 2$$
$$= 0 \quad \text{si } m, n \geq 2.$$

On peut toujours trouver γ tq $\mathrm{Ind}(\gamma;1) = 1$, $\mathrm{Ind}(\gamma;-1) = 0$ (ex : $\gamma(t) = 1+\frac{1}{2}e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$) et vice-versa (ex : $\gamma(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$).

Donc f admet une primitive holomorphe
ssi $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, $\forall \gamma$ fermé dans Ω_1,
ssi m et $n \geq 2$.

d) La fonction $\zeta \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma;\zeta)$ est continue pour $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a;b])$ (où $\gamma : [a,b] \to \Omega$, donc $\gamma([a,b])$ est l'image de γ)

Elle est à valeurs entières, donc constante sur tout connexe ~~de~~ ~~C~~ contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.
L'intervalle $[-1,+1]$ est connexe,
$[-1,+1] \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_2$, et $\gamma([a,b]) \subset \Omega_2$,
donc $\mathrm{Ind}(\gamma;\zeta)$ est constant pour $\zeta \in [-1,+1]$. En particulier,

$$\mathrm{Ind}(\gamma;+1) = \mathrm{Ind}(\gamma;-1).$$

e) Pour γ chemin fermé dans Ω_2, si $m=n=1$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\big(\alpha \operatorname{Ind}(\gamma;1) + \beta \operatorname{Ind}(\gamma;-1)\big)$$
$$= 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma;1)\,(\alpha+\beta).$$

Si $m=1,\ n\geq 2$: $= 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma;1)\ \alpha$

Si $m\geq 2,\ n=1$: $= 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma;1)\ \beta$

Si $m\geq 2,\ n\geq 2$: $= 0$.

A nouveau, on peut toujours trouver $\tilde{\gamma}$ dans Ω_2 tel que $\operatorname{Ind}(\tilde{\gamma};1)\neq 0$, par exemple $\tilde{\gamma}(t) = 1+3e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Donc f admet une primitive holomorphe sur Ω_2 ssi :

$m,\ n\geq 2$

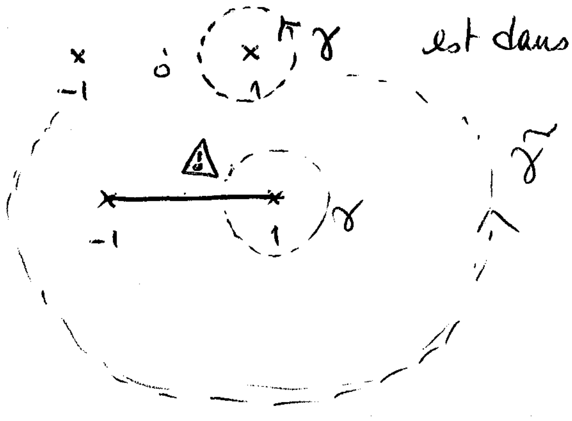
ou $m=n=1$ et $\alpha+\beta=0$.

Remarque on voit ainsi que par exemple

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} = \frac{2}{z^2-1}$$

admet une primitive sur Ω_2, mais pas sur Ω_1

Ce chemin γ : est dans Ω_1



mais pas dans Ω_2

$\tilde{\gamma}$ est dans Ω_2 ...

NB. En revanche, $\frac{1}{z-1}$ ou $\frac{1}{z+1}$ pris individuellement n'admettent pas de primitive sur Ω_2 non plus !

Calculons $\Psi^{-1}(w)$ (quand elle existe)

3). a) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ pour $z \neq -i$

$\iff (z+i)w = z-i$

$\iff zw - z = -iw - i$

$\iff z = -i\dfrac{(w+1)}{w-1}$ pour $w \neq 1$

$\iff z = i\dfrac{1+w}{1-w}$.

- Vérifions que $\Psi(\{\operatorname{Im} z > 0\}) \subset D(0,1)$:

(raisnt géom.) $\mathbb{R}$ est la médiatrice entre les points i et $-i$, donc quand z est dans le demi plan supérieur, $|z-i| < |z+i|$ et $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$.

(calcul) Posons $z = x+iy$ avec $y > 0$.

$$|z-i|^2 = x^2+(y-1)^2 = x^2+y^2+1-2y$$
$$< x^2+y^2+1+2y = x^2+(y+1)^2 = |z+i|^2.$$

Notons que $|z+i|^2 - |z-i|^2 = 4y$, donc il y a équivalence entre $|z+i| > |z-i|$ et $\operatorname{Im} > 0$, donc $z \in \{\operatorname{Im} z > 0\} \iff \Psi(z) \in D(0,1)$.

Enfin, le calcul de Ψ^{-1} montre que Ψ est injective (une seule préimage possible).

<u>Remarque</u> On peut aussi (solⁿ alternative) calculer

$$\operatorname{Im}\left(i\,\frac{1+w}{1-w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1+w)(1-\bar{w})}{|1-w|^2}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{Re}(1-|w|^2+w-\bar{w})}{|1-w|^2} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2},$$

donc $w \in D(0,1) \iff \Psi^{-1}(w) \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

D'après les calculs précédents

b) $\operatorname{Im} f(z) \geq 0 \iff |\Psi \circ f(z)| \leq 1$.

$\Psi \circ f$ est holomorphe sur $D(0,1)$ comme composition de fcn. holo.
Si $\operatorname{Im} f(a) = 0$, alors $|\Psi \circ f(a)| = 1$, donc $|\Psi \circ f|$ admet un maximum à l'intérieur de $D(0,1)$, donc d'après le Principe du Module Maximum, $\Psi \circ f$ est constante sur $D(0,1)$. Mais Ψ est bijective, donc f est aussi constante (et donc réelle).

c) $\operatorname{Im} f \geq 0$, $f(0) = i$

$$(\Psi \circ f)'(0) = \Psi'(f(0))\, f'(0) = \Psi'(i)\, f'(0).$$

Reste à calculer Ψ': $\Psi'(z) = \left(1 - \frac{2i}{z+i}\right)'$

$$= \frac{2i}{(z+i)^2}.$$

Donc $\Psi'(i) = \frac{2i}{(2i)^2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$,

et $(\Psi \circ f)'(0) = -\frac{i}{2} f'(0)$.

d) Comme $f(0) = i$, f n'est pas une constante réelle, donc $\operatorname{Im} f(z) > 0$ $\forall z \in D(0,1)$ donc $\Psi \circ f(D(0,1)) \subset D(0,1)$.

De plus $\Psi \circ f(0) = \Psi(f(0)) = \Psi(i) = 0$.

Donc le lemme de Schwarz nous dit que $|(\Psi \circ f)'(0)| \leq 1$, avec égalité si et seulement si $(\Psi \circ f)(z) = e^{i\theta} z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Donc $\left|-\frac{i}{2} f'(0)\right| \leq 1 \iff \frac{1}{2}|f'(0)| \leq 1 \iff |f'(0)| \leq 2$, et dans le cas d'égalité,

$$(\Psi \circ f)(z) = e^{i\theta} z \iff f = \Psi^{-1}(e^{i\theta} z).$$

$$\left(= i \, \frac{1+e^{i\theta} z}{1-e^{i\theta} z} \right).$$

4) a) Soient $g(z) = f(\alpha) - f(z)$.

Alors pour $|z| = 1$, $|f(z) + g(z)| = |f(\alpha)| < 1$

et $1 \leq |f(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$.

Donc $\forall z$ tq $|z| = 1$, $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$.

On peut appliquer le Théorème de Rouché : f et g ont le même nombre de zéros sur $D(0,1)$ (en particulier au moins un, puisque $f(\alpha) - f(\alpha) = 0$).

b) En appliquant le raisonnement ci-dessus à $g_1(z) = \beta - f(z)$, on voit que g et f ont le même nombre de zéros dans $D(0,1)$ et f et $f(\alpha) - f$ ont le même nombre de zéros d'après (a), or $f(\alpha) - f(z)$ s'annule pour $z = \alpha$ donc f admet au moins un zéro sur $D(0,1)$ donc g_1 aussi, donc il existe z_1 tq $f(z_1) = \beta$.