L3 PS Analyse Complexe 1
Contrôle Terminal, solution.

1 a) Théorème de Liouville :
Soit f analytique sur $\mathbb{C}$, et bornée sur $\mathbb{C}$.
alors f est constante.

b) f n'est jamais nulle, donc $\frac{1}{f(z)}$ est analytique partout où f l'est, donc sur $\mathbb{C}$ entier.

D'autre part $|f(z)|\geq 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1$, donc d'après le Théorème de Liouville $\frac{1}{f}$ est constante, donc f aussi.

2. a) On va vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour g.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \quad (\text{car } h \in \mathcal{C}^2)$$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{car } \Delta h = 0) = i\frac{\partial g}{\partial x}.$$

cqfd

b) F doit être holomorphe, donc vérifier les équations de Cauchy Riemann

Posons $F = F_1 + iF_2$, où F_1, F_2 sont à valeurs réelles.

Alors $F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + i\frac{\partial F_2}{\partial x}$

mais on a aussi $F'(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \frac{\partial F_2}{\partial y} - i\frac{\partial F_1}{\partial y}$.

On doit donc avoir (en identifiant parties réelles et imaginaires)
$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} \end{cases},$$

donc $F_1 = h$ est une solution;

et aussi
$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$

Or $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial h}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ car $\Delta h = 0$

donc le théorème de Poincaré implique qu'on peut trouver F_2.

c) $\nabla F = \nabla h$, donc $F - h$ est constante

3. a) $z^2 = -i = e^{-i\pi/2}$

a pour solutions : $z = e^{-i\pi/4}$ et $z = -e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$.

(tout nombre complexe $\neq 0$ admet 2 racines carrées opposées)

Donc $(z^2+i) = \left(z + e^{-i\pi/4}\right)\left(z - e^{-i\pi/4}\right)$

b) f admet des pôles simples en z_1 et z_2,

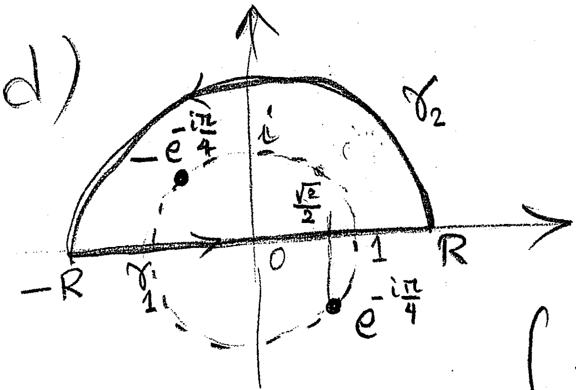
donc $\mathrm{Res}\left(f; -e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{-e^{-i\pi/4} - e^{-i\pi/4}} = -\frac{1}{2}e^{i\pi/4}$

$$\mathrm{Res}\left(f; e^{-i\pi/4}\right) = \frac{1}{e^{-i\pi/4}+e^{-i\pi/4}} = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}.$$

c) $\dfrac{1}{x^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($x^2+i \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Etude à l'infini : $\dfrac{1}{|x^2+i|} \sim \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ sont convergentes, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x^2+i|}$ est convergente.

d)



Un seul pôle de f, $-e^{-i\pi/4}$, est entouré par γ.

Donc par la formule des résidus

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(f; -e^{-i\pi/4}\right)$$

$$= 2\pi i\ \frac{1}{2}e^{i\pi/4} = \pi\, e^{i\pi + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{4}} = \pi e^{-i\pi/4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

e) Pour $z \in \gamma_2([0,\pi])$, $|z| = R$,

donc $\left|\dfrac{1}{z^2+i}\right| = \dfrac{1}{|z^2+i|} \leq \dfrac{1}{R^2-1}$

$\mathrm{long}(\gamma_2) = \pi R$, donc

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+i}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

f) $\pi e^{-i\pi/4} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+i}$

$= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+i} + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+i}$

$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+i} + 0$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+i}$ (par convergence de l'intégrale).

g) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x^2+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{x^2+i}}{|x^2+i|^2}\right)$

$= \frac{x^2}{x^4+1}$.

$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x^2+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{x^2+i}}{|x^2+i|^2}\right) = \frac{-1}{x^4+1}$.

h) D'où $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = -\mathrm{Im}\left(\pi e^{-i\pi/4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, et

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1} = \mathrm{Re}\left(\pi e^{i\pi/4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

4) $z^4+1 = (z-e^{i\frac{\pi}{4}})(z-e^{\frac{3i\pi}{4}})(z-e^{-\frac{i\pi}{4}})(z-e^{-\frac{3i\pi}{4}})$

Les pôles de g sont $e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}, e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$.

Calcul des résidus: on remarque que si $P(a)=0$, alors $\lim\limits_{z\to a}\frac{P(a)}{z-a} = P'(a)$

Or $\frac{d}{dz}(z^4+1) = 4z^3$.

Les pôles de g sont simples. On en déduit

$$\mathrm{Res}(g; e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\mathrm{Res}(g; e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Ce sont les deux seuls pôles de g entourés par γ.

Donc $\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4}\right)$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

D'autre part, $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$ car

$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$ et

l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ est convergente car $\frac{1}{x^4+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$.

Donc $\int_\gamma g(z)\,dz = \lim\limits_{R\to\infty}\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$.

La valeur recherchée est $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui est cohérent.