U.P.S.

L2 PS - algèbre

Contrôle continu du 20.02.2019 - Solution

Exercice 1

On note $n = \dim E$.

a) $u^2 - u = 0$, donc le polynôme $P(X) = X(X-1)$ est annulateur de u. Le polynôme minimal de u doit diviser P, et ne peut pas être 1 (qui n'annule aucun endomorphisme), il reste 3 possibilités : X, $X-1$ et $X(X-1)$.

3

b) • Si $M_u(X) = X$, alors $M_u(u) = u = 0$, donc $\operatorname{rang} u = 0$. Réciproquement, $\operatorname{rang} u = 0 \Rightarrow u = 0$.

5

(s'il manque un des 2 sens : 2,5)

• Si $M_u(X) = X-1$, alors $M_u(u) = u - id = 0$, donc $u = id$ et $\operatorname{rang} u = n$.
Réciproquement, si $\operatorname{rang} u = n$, alors ~~Im~~ $\operatorname{Im} u = E$ et $\forall x \in E$, $x = u(y) = u^2(y) = u(x)$ donc $u = id$.

• Si $M_u(X) = X(X-1)$, alors (par disjonction des cas) $0 < \operatorname{rang} u < n$. Réciproquement, si $0 < \operatorname{rang} u < n$, ~~si $M_u(X) = X(X-1)$, alors~~ alors $u \neq 0$ et u n'est pas surjective, donc $u \neq id$. Donc ni X ni $X-1$ ne sont polynômes annulateurs de u et donc $M_u(X) = X(X-1)$.

c) dans tous les cas, le polynôme minimal
2 de $\underline{u}$ est scindé, à racines simples, donc $\underline{u}$
est diagonalisable.

Exercice 2

a) L'hypothèse signifie

$$a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 \, id = 0, \quad \text{et } a_0 \neq 0,$$

donc $$id = -\frac{1}{a_0}\left(a_n u^{n-1} + a_{n-1} u^{n-2} + \dots + a_2 u + a_1 id \right) \cdot u$$

3 Donc si on pose $Q(X) = -\frac{1}{a_0}\left(a_n X^{n-1} + \dots + a_2 X + a_1\right)$,
alors $Q(u) \cdot u = id$, autrement dit
$Q(u)$ est un inverse de $\underline{u}$, qui s'exprime
comme un polynôme de $\underline{u}$.

b) Si u est inversible et $uv = 0$,
alors $0 = u^{-1} \cdot (uv) = (u^{-1}u) \cdot v = id \cdot v = v$
2 donc si $v \neq 0$ il n'est pas possible que
$\underline{u}$ soit inversible.

c) Si $M_u(0) = 0$, alors $M_u(X) = a_d X^d + \dots + a_1 X$
donc $0 = M_u(u) = \left(a_d u^{d-1} + \dots + a_1 id\right) \cdot u$.
4 Or $a_d \neq 0$ donc $a_d X^{d-1} + \dots + a_1$ est un polynôme
non nul, de degré $< d$, donc par minimalité
de M_u, $a_d u^{d-1} + \dots + a_1 id \neq 0$.

Si on pose $v := a_d u^{d-1} + \dots + a_1 \mathrm{id}$ et qu'on applique la question b), on trouve que u n'est pas inversible.

autre solution : toute racine de M_u est valeur propre de u ; si 0 est valeur propre de u, u n'est pas inversible.

d) Donc : si u est inversible, on peut

1 appliquer la question a) avec $P = M_u$ et alors $u^{-1} = Q(u)$.

e) Si $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, et $P(u) = 0$, alors $u^{-n} P(u) = 0$ (ceci a un sens puisque u est inversible), donc

3 $$a_0 u^{-n} + a_1 u^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1} u^{-1} + a_n = 0.$$

hors barème

Posons $\tilde{P}(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^{n-j} = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$, alors $\tilde{P}(u^{-1}) = 0$. Donc $\tilde{M}_u$ est un polynôme annulateur de u^{-1}. Si Q est un autre polynôme annulateur de u^{-1}, alors $\tilde{Q}$ est annulateur de $(u^{-1})^{-1} = u$, donc $\deg \tilde{Q} \geq \deg M_u = \deg \tilde{M}_u$ et donc $\deg Q = \deg \tilde{Q} \geq \deg \tilde{M}_u$:

$\frac{1}{M_u(0)} \tilde{M}_u$ est le polynôme ~~annula~~ minimal de u^{-1} (le facteur $\frac{1}{M_u(0)}$ sert à normaliser le coef. de X^d).