Analyse Complexe 2, L3 PS math.

Contrôle continu : 21-11-2018

Solution

1. (1) · $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ car $\sin \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$.

· $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z} \sum\limits_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} = 1$,

donc 0 est une singularité éliminable.

(2) · $\frac{1}{z} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, les autres fonctions (sin et l'identité) sont analytiques partout, donc par composition $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

· Quand $z \to 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| \to \infty$, mais $\sin w$ n'a pas de limite (finie ni infinie) quand $|w| \to \infty$.

En détail : si $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sin\frac{1}{z}$ est bornée et $\lim\limits_{\substack{z\in\mathbb{R}\\ z\to 0}} z\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0$. Par contre, si $z = \frac{i}{y}$, avec $y > 0$, $f(z) = \frac{y}{i}\sin\left(\frac{y}{i}\right) = -iy\,\frac{\operatorname{Sh} y}{i} = -y\operatorname{Sh} y$.

Or $\lim\limits_{y\to+\infty} y\operatorname{Sh} y = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte)

donc $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z=iy',\, y>0}} f(z) = -\infty$. Conclusion :

f admet une singularité essentielle en 0.

(3) $1+z-e^z = 1+z-\sum\limits_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!} = -\sum\limits_{k\geq 2}\frac{z^k}{k!}$

$= -z^2\sum\limits_{k\geq 0}\frac{z^k}{(k+2)!}$. Posons $g(z) = -\sum\limits_{k\geq 2}\frac{z^k}{(k+2)!}$.

Alors $f(z) = \frac{1}{z^2 g(z)}$ et $g(0) = -1 \neq 0$,

donc $\frac{1}{g}$ est holomorphe au voisinage de 0.

Donc f admet un pôle d'ordre 2 en 0.

2. Un calcul montre que pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$,

$\Delta f = 4 \dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar z \partial z}$ (cf. travaux dirigés).

a) $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}\left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial \bar z \partial z} = \dfrac{1}{4}\Delta h = 0$,

donc $\dfrac{\partial h}{\partial z}$ est analytique.

b) Sur ~~$D(a,r)$~~ Ω, d'après la question a), la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial z}$ est analytique.

Elle est nulle sur $D(a,r)$: donc $\dfrac{\partial h}{\partial z} \equiv 0$ sur Ω (prolongement analytique, car Ω connexe).

Mais $\dfrac{\partial h}{\partial \bar z} = \overline{\left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)}$ parce que $h(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{\partial h}{\partial \bar z} \equiv 0$, donc $\dfrac{\partial h}{\partial x} \equiv 0, \dfrac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$, donc h est constante (parce que Ω connexe). Comme $h \equiv 0$ sur $D(a,r)$, $h \equiv 0$ sur Ω.

3. a) On pose $g(z) = \dfrac{z^2+3z}{(z+1)^2}$, alors $g(1) \neq 0$, $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-1}$,

donc $\mathrm{Res}(f;1) = g(1) = \dfrac{4}{4} = 1$.

b) f n'est pas définie sur Ω_1, mais sur $\Omega_1 \setminus \{1\}$. Sur cet ouvert, elle n'admet pas non plus de primitive, car par exemple son intégrale sur le chemin fermé $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, n'est pas nulle :

$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f;1) = 2\pi i \neq 0$.

c) f est holomorphe sur Ω_2, et pour tout triangle T contenu dans Ω_2, son intérieur l'est aussi, donc $\int_T f(\zeta)d\zeta = 0$ et ~~(Morera)~~ donc f admet une primitive sur Ω_2.

 $f(z)=\frac{g(z)}{(z+1)^2}$ et $g'(z) = \frac{2z+3}{z-1} - \frac{z^2+3z}{(z-1)^2}$, donc $g'(-1) = \frac{-1}{2} - \frac{-2}{4} = 0$.

d) (2) Posons $z' = z+1$, alors

$$f(z) = \frac{(z'-1)^2+3(z'-1)}{z'^2\,(z'-2)} = \frac{-2+z'+z'^2}{(-2+z')\,z'^2}$$

$$= \frac{1}{z'^2} + \frac{1}{z'-2} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z-1}.$$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z-1}\,;\,-1\right) = 0$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\,;\,-1\right) = 0$ car il n'y a pas de terme de puissance -1 dans le developpement de Laurent autour du point -1.

Finalement $\mathrm{Res}(f\,;\,-1) = 0$.

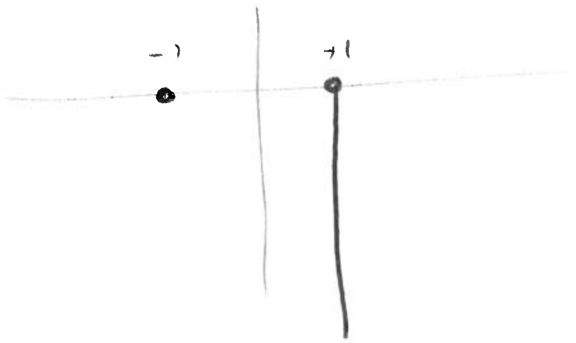
e) Si on considère un triangle T contenu dans Ω_3, que -1 soit ou pas à l'intérieur de T, $\int_T f(\zeta)\,d\zeta = 0$

donc f admet une primitive sur Ω_3.

Autre dém^n : $\frac{1}{z-1}$ admet une primitive sur $\{\mathrm{Re}\, z < 1\}$ (car elle est analytique sur un convexe) et $\frac{1}{(z+1)^2}$ admet $\frac{-1}{z+1}$ pour primitive sur Ω_3.

f) déjà obtenue au d) $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z-1}$.

$*$g) (erreur de texte : $\Omega_4 = \mathbb{C} \setminus \left(\{\mathrm{Re}\, z = 1,\ \mathrm{Im}\, z \leq 0\} \cup \{-1\}\right)$)



On peut définir $\arg(z-1) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}\, z = 1,\ \mathrm{Im}\, z \leq 0\}$,

donc $\mathrm{Log}\,(z-1) = \ln|z-1| + i \arg(z-1)$ fournit une primitive de $\frac{1}{z-1}$ sur $\Omega_4 \cup \{-1\}$.

Une primitive de f est donnée par

$$F(z) = \frac{-1}{z+1} + \mathrm{Log}\,(z-1).$$