L3 PS math. 2020-21

Analyse Complexe 2

Contrôle Continu, 30-11-2020

Solution

1. a) $\forall k$, f est holomorphe sur $\mathbb{C} = \Omega$ avec $a = -\infty$, $b = +\infty$. D'autre part $f(z + 2\pi)$

$$= e^{ik(z+2\pi)} = e^{ikz + 2ik\pi} = e^{ikz}$$

(car $e^{2i\pi k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$).

b) si $a < \operatorname{Im} z < b$,

alors $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$, donc $-b < \operatorname{Re} iz < a$,

donc $e^{-b} < |e^{iz}| < e^{-a}$, et réciproquement.

Donc $z \longmapsto g(e^{iz})$ est bien définie et holomorphe pour $a < \operatorname{Im} z < b$, c'est à dire $z \in \Omega$.

D'autre part $f(z+2\pi) = g(e^{i(z+2\pi)}) = g(e^{iz+2\pi i})$

$= g(e^{iz})$.

c) Considérons d'abord $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$.

Alors e^{iz} a pour argument $\operatorname{Re} z$,

donc $e^{iz} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, donc $\operatorname{Log}(e^{iz}) = iz$

et si on pose $g(w) = f(-i \operatorname{Log} w)$, on a

$g(e^{iz}) = f(-i \cdot iz) = f(z)$.

D'autre part si $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$, $e^{iz} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $L_1(e^{iz}) = iz$

et si $g_1(w) := f(-i L_1(w))$

alors $g_1(e^{iz}) = f(-i \cdot iz) = f(z)$.

~~Supposons que~~ $\cancel{0 < \operatorname{Re} z < \pi}$

~~alors~~ $\cancel{\operatorname{Log}(iz) = L_1(iz) + 2ik\pi}$ ~~pour un certain k~~,

~~mais~~ $\cancel{\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(iz))}$ ~~donc~~ $\cancel{g = g_1}$

~~Sur cet ouvert~~.

- Montrons que sur l'intersection de leurs domaines de définition, $g(w) = g_1(w)$.

<u>Cas 1</u> $e^{-b} < |w| < e^{-a}$, $\operatorname{Im} w > 0$.

Alors $\operatorname{Log}(w) = L_1(w)$ car $\operatorname{Im} \operatorname{Log}(w) \in]0, \pi[$, $\operatorname{Im} L_1(w) \in]0, \pi[$.

Donc $g(w) = g_1(w)$.

<u>Cas 2</u> $e^{-b} < |w| < e^{-a}$, $\operatorname{Im} w < 0$.

Alors $\operatorname{Im} \operatorname{Log}(w) \in]\pi, 2\pi[$, $\operatorname{Im} L_1(w) \in]-\pi, 0[$

et comme $e^{\log w} = e^{L_1(w)}$, on a $\operatorname{Log} w - L_1(w) \in 2\pi i \mathbb{Z}$,

donc $\operatorname{Log} w = L_1(w) + 2\pi i$.

D'où $g(w) = f(-i \operatorname{Log} w) = f(-i L_1(w) + 2\pi)$

$= f(-i L_1(w))$ (par périodicité) $= g_1(w)$.

Finalement on définit une seule fonction, notée g, par

$$g(w) = \begin{cases} g(w) & \text{si } w \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+) \cap A(0; e^{-b}, e^{-a}) \\ g_1(w) & \text{si } w \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) \cap A(0; e^{-b}, e^{-a}) \end{cases}$$

B

Cette fonction est holomorphe sur $A(0; e^{-b}, e^{-a})$ car chaque $w_0 \in A(0; e^{-b}, e^{-a})$ est inclus soit dans l'ouvert $A(0; e^{-b}, e^{-a}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$ sur lequel g est holomorphe, soit dans l'ouvert $A(0; e^{-b}, e^{-a}) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ sur lequel g_1 est holomorphe.

d) g admet développement en série de Laurent sur $A(0; e^{-b}, e^{-a})$:

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, w^k .$$

~~Ce développement~~ Cette série converge normalement sur tout compact de l'anneau et donc en particulier sur $K := \{ w : e^{-b+\varepsilon} \leq |w| \leq e^{-a-\varepsilon} \}$

Posons $w = e^{iz}$: alors $w \in K \iff a+\varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq b-\varepsilon$,

donc $g(e^{iz}) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{ikz}$

avec convergence normale sur $\{ a+\varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq b-\varepsilon \}$.

e) La formule précédente montre que $c_n = c_n(f)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) \, dx .$$

D'autre part, les séries $\sum_{k\geq 0} c_k e^{ikz}$ et $\sum_{k\leq 0} c_k e^{ikz}$ doivent avoir des termes bornés pour $-\rho < \operatorname{Im} z < \rho$.

Pour $k \geq 0$, $|c_k e^{ikz}| = |c_k| (e^{-\operatorname{Im} z})^k$.

Prenons $z = -iR$ avec $R < \rho$:

on doit avoir ~~[illegible]~~ $\sup_{k\geq 0} |c_k| e^{Rk} = \sup_{k\geq 0} |c_k| e^{R|k|} < \infty$.

De même pour $k \leq 0$, $|c_k e^{ikz}| = |c_k| e^{(\operatorname{Im} z)|k|}$

Prenons $z = iR$ avec $R < \rho$,

on doit avoir $\sup_{k\leq 0} |c_k| e^{R|k|} < \infty$.

cqfd.

2. a) D'après la formule des résidus, pour tout $R > \max_{1\leq j\leq q} |z_j|$, $\int_{C(0,R)} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$

mais on peut majorer cette intégrale :

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta \right| \leq \underbrace{2\pi R}_{\text{longueur du cercle}} \cdot \frac{|a_p| R^p + \dots + |a_0|}{(R - |z_1|) \cdots (R - |z_q|)},$$

où $P(z) := a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Le majorant est équivalent à $2\pi R \frac{|a_p| R^p}{R^q}$

$= 2\pi |a_p| R^{p+1-q}$

Or $p+1-q \leq -1$ par hypothèse

donc ceci $\longrightarrow 0$ quand $R \to \infty$.

Finalement $\displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}\, d\zeta = 0$,

donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right) = 0$.

b) $g(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur Ω car $0 \notin \Omega$. D'autre part pour $R > 1$,

$$\int_{C(0,R)} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C(0,R)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \neq 0,$$

donc il existe ~~une~~ chemin fermé dans Ω sur lequel l'intégrale de g est $\neq 0$ $\Rightarrow$ g n'admet pas de primitive.

c) $$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 + \bar{z} - z - 1}{|z-1|^2}.$$

Si on pose $z = x+iy$, $\displaystyle = \frac{x^2+y^2-1 - 2iy}{(x-1)^2+y^2}$.

Supposons que $\displaystyle\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ $\Rightarrow$

alors $\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$ donc $\displaystyle\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$

donc $y = 0$.

D'autre part, on a alors $\displaystyle\frac{x^2-1}{(x-1)^2} \leq 0$,

donc $x^2 \leq 1$, donc $z \in [-1, +1]$,

c'est à dire $z \notin \Omega$: cqfd.

On prend la détermination principale du Logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (argument dans $]-\pi, \pi[$), notée Log.

alors $g(z) = \text{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ est bien définie sur Ω.

~~exp Log($\frac{z+1}{z-1}$)~~ $\qquad \exp g(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$

En dérivant, $\frac{d}{dz} \exp g(z) = g'(z) \exp(g(z)) = \frac{-2}{(z-1)^2}$

soit $\qquad g'(z) \frac{z+1}{z-1} = \frac{-2}{(z-1)^2}$

Donc $\qquad g'(z) = \frac{-2}{(z+1)(z-1)} = 2 f_1(z)$

Donc $L(z) = \frac{1}{2} g(z) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ conviendra.

d) Le segment $[z_j ; z_k]$ (en supposant $z_j \leq z_k$ sans perte de généralité) sera contenu dans $[-1, 1]$, donc disjoint de $\gamma([a,b])$.

Donc z_j et z_k sont connectés par un chemin dans $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ donc ~~appartiennent à la même~~ ~~comme~~ la fonction

$z \longmapsto \text{Ind}(\gamma_j ; z)$ sera continue à valeurs entières sur $[z_j ; z_k]$ donc constante.

e) D'après le théorème général sur les résidus,

$$\int_\gamma \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}\,d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Ind}(\gamma; z_j)\cdot \mathrm{Res}(\gamma; z_j)$$

$$= 2\pi i\,\mathrm{Ind}(\gamma; z_1)\cdot \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}(\gamma; z_j) = 0$$

d'après la question a).

d'après la question (d)

f) L'intégrale $\displaystyle\int \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}\,d\zeta$ s'annule sur tout chemin fermé, donc cette fonction admet une primitive sur Ω.

Remarque : ceci généralise le résultat de (c).

(b) montre qu'on ne peut pas remplacer la condition $q \geq p+2$ par $q \geq p+1$.