L2 PS math.
2e session 2018-19
Solution

1. 1) $u(e_1) = 0 = u(e_3)$
$u(e_2) = e_1$, $u(e_4) = e_3$, $u(e_5) = e_4$.

Donc $u^2(e_2) = u(e_1) = 0$, $u^2(e_4) = u(e_3) = 0$,
$u^2(e_5) = u(e_4) = e_3 \neq 0$: $u^2 \neq 0$

De plus, $u^3(e_j) = 0$, $1 \leq j \leq 4$; $u^3(e_5) = u^2(e_4) = 0$, donc $u^3 = 0$. Finalement u est nilpotent d'ordre 3.

2) $u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$, ceci s'annule pour $x_2 = x_4 = x_5 = 0$,

donc $\operatorname{Ker} u = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_3 \in K \right\} = \langle e_1, e_3 \rangle$ (espace engendré par e_1 et e_3)

De même
$u^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, s'annule pour $x_5 = 0$,

donc $\operatorname{Ker} u^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3, x_4 \in K \right\}$
$= \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ (espace engendré par e_1, e_2, e_3, e_4),

3) $\mathbb{K}^5 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3, e_4, e_5 \rangle =: F_1 \oplus F_2$.

$\dim F_1 = 2$, la matrice de $u|_{F_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u|_{F_1}$ est d'ordre 2.

$\dim F_2 = 3$, la matrice de $u|_{F_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u|_{F_2}$ d'ordre 3.

2\. 1) Le rang de B_0 est égal à celui de sa matrice M. Celle ci a 2 colonnes égales donc rang $M = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ car ces 2 colonnes sont indépendantes (ou : parce que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$).

$$\text{rad } B_0 = \{ x \in \mathbb{K}^3 ;\ \forall y \in \mathbb{K}^3,\ B_0(x,y) = 0 \}$$

(théorème)
$$= \left\{ x \in \mathbb{K}^3 ;\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On calcule ...
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

donc $\text{rad } B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{K} \right\} = \langle e_2 - e_3 \rangle$.

2) $F^\perp = \{ y :\ \forall x \in F,\ B(x,y) = 0 \}$

$= \{ y :\ \forall x \in F,\ x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3) = 0 \}$

$= \{ y :\ \forall x_2, x_3 \in \mathbb{K},\ (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3) = 0 \}$

$= \{ y :\ \forall x_2, x_3 \in \mathbb{K} :\ x_2(y_1 + y_2 + y_3) + x_3(y_1 - y_2 - y_3) = 0 \}$

En prenant $x_2 = 1, x_3 = 0$, puis $x_2 = 0, x_3 = 1$, on voit que ceci équivaut à
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

et donc $y_1 = 0$, $y_2 + y_3 = 0$

et on trouve $F^\perp = \text{Rad } B_0 = \langle e_2 - e_3 \rangle$.

3) $B_0(x,x) = 2x_1(x_2 + x_3) = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 + (x_2 + x_3)\right)^2 - \left(x_1 - (x_2 + x_3)\right)^2 \right]$

[On a donc une forme de signature (1, 1)
– cohérent avec le rang 2]

3. 1a)

matrice de γ : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice $n \times n$)

Noyau de γ : si $v = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, $\gamma(v) = \sum_{i=1}^{d-1} x_i e_{i+1}$

donc $\gamma(v) = 0 \iff x_i = 0$, pour $1 \leq i \leq d-1$,

et $\operatorname{Ker} \gamma = \{ x_d e_d,\ x_d \in \mathbb{C} \} = \mathbb{C} \cdot e_d$.

1 b) $P_\gamma(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & & \\ -1 & X & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X^d$ (matrice triangulaire)

1 c) Par une récurrence facile, pour $k \leq n-1$,

$$\gamma^k(v) = \sum_{i=1}^{d-k} x_i e_{i+k},$$ et donc $\gamma^k \neq 0$

(puisque $\gamma^k(e_1) = e_{k+1} \neq 0$, par exemple)

et $\gamma^d(v) = 0$, donc $m_\gamma(X) = X^n$.

1 d) γ a 0 pour seule valeur propre, si sa matrice était diagonale dans une certaine base, elle serait nulle, or $\gamma \neq 0$, donc n'est pas diagonalisable.

<u>Autre dém^n</u> : le polynôme minimal de γ est scindé mais son (unique) zéro n'est pas simple.

3 2a) matrice de γ : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2b) $P_\gamma(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & X & 0 \\ 0 & & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

On développe ce déterminant par rapport à la première ligne :

$$= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{d+1} \begin{vmatrix} -1 & X & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X \\ 0 & & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant ci-dessus correspond à une matrice triangulaire inférieure $(d-1)\times(d-1)$ et vaut donc X^{n-1} ; le 2^e à une matrice triangulaire supérieure $(d-1)\times(d-1)$ et vaut donc $(-1)^{d-1}$. Il vient

$$= X\cdot X^{d-1} + (-1)^{d+2}(-1)^{d-1} = X^d - 1.$$

2c) $X^d - 1$ a pour racines les racines d^e de l'unité, c-à-d. $e^{2\pi i \frac{k}{d}}$, $0 \leq k \leq d-1$.

Donc il a $\underline{d}$ racines distinctes, donc elles doivent toutes être simples, donc γ est diagonalisable.

2d) Le polynôme minimal de γ a les mêmes racines que P_γ et le divise, donc ici il doit être égal : $m_\gamma(X) = X^d - 1$.

4. 1) $s^2 = id$, donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur, donc $m_s(X)$ divise $(X-1)(X+1)$, donc $m_s(X)$ ne peut avoir que des racines simples et donc s est diagonalisable.

<u>Autre méthode</u>: $\forall x \in E$, $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$.

Mais $s(x + s(x)) = s(x) + s^2(x) = s(x) + x$,

et $s(x - s(x)) = s(x) - s^2(x) = -(x - s(x))$:

ce sont donc deux vecteurs propres (ou nuls) et donc E est somme (directe) des sous espaces propres pour les valeurs propres $+1$ et -1.

Les valeurs propres de s sont incluses dans $\{+1, -1\}$. Si s n'avait que 1 pour valeur propre, comme elle est diagonalisable, $s = id$; de même si elle n'avait que -1 pour valeur propre on aurait $s = -id$, donc $\text{Val.p.}(s) = \{-1, +1\}$.

2) Soient $x, y \in E$, alors $x = x_1 + x_{-1}$ et $y = y_1 + y_{-1}$ où $s(x_1) = x_1$, $s(y_1) = y_1$, $s(x_{-1}) = -x_{-1}$, $s(y_{-1}) = -y_{-1}$.

Alors (en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire associée à q)

$$\langle x, s(y)\rangle = \langle x_1 + x_{-1}, y_1 - y_{-1}\rangle$$

et, par orthogonalité des sous-espaces propres,

$$= \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_{-1}, y_{-1}\rangle$$

$$= \langle x_1 - x_{-1}, y_1 + y_{-1}\rangle = \langle s(x), y\rangle,$$

donc on a bien $s^* = s$.

Réciproquement, Soit x tq. $s(x) = x$ et y tq. $s(y) = -y$. Alors

$\langle x,y\rangle = \langle s(x), y\rangle = \langle x, s^*(y)\rangle$ (déf^n de s^*)

$= \langle x, s(y)\rangle$ (hypothèse) $= \langle x, -y\rangle$

$= -\langle x,y\rangle$, donc $\langle x,y\rangle = 0$.

3) $q(s(x)) = \langle s(x), s(x)\rangle = \langle x, s^*(s(x))\rangle$

d'après l'hypothèse c'est $= \langle x, s^2(x)\rangle$

$= \langle x,x\rangle = q(x)$.

4) $s(x_1+x_2) = x_1 - x_2$;

donc $q(x_1 - x_2) = q(s(x_1+x_2)) \leq q(x_1+x_2)$.

De même, $s(x_1 - x_2) = x_1 + x_2$, donc $q(x_1+x_2) \leq q(x_1 - x_2)$.

Donc $q(x_1+x_2) = q(x_1 - x_2)$, $\forall x_1 \in Ker(s-id)$, $x_2 \in Ker(s+id)$.

Or $\langle x_1, x_2\rangle = \frac{1}{4}(q(x_1+x_2) - q(x_1-x_2)) = 0$,

donc $Ker(s-id) \perp Ker(s+id)$ et d'après la question 2, on a $s^* = s$.