M1 MAT-MApI3
EMMAI2B1
Méthodes numériques pour les EDPs
Examen seconde session
Mardi 4 septembre 2018

Pas de documents, pas de calculatrice. Le sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

Exercice 1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. ($1/2$ point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. ($1/2$ point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.
3. ($1/2$ point) Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne peut pas être représentée par une fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $I =]0,1[$. On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans I et que $H^1(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est également dans $L^2(I)$.

1. (1 point) Rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^1_0(I)$.
2. Soit $u \in \mathcal{D}(I)$.
   (a) ($1/2$ point) Montrer que pour tout $x \in I$ on a
   $$u(x) = \int_0^x u'(s)ds, \quad u(x) = \int_1^x u'(s)ds.$$
   (b) ($1/2$ point) En déduire que
   $$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(s)|ds.$$
   (c) (1 point) En déduire que
   $$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$
3. ($1/2$ point) Soit $v \in H^1_0(I)$. Montrer que
   $$\|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(I)}.$$
4. Soit $c \in L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ (le signe de c_0 n'est pas prescrit) tel que pour tout $x \in I$ on a
   $$c(x) \geq c_0.$$
   On définit sur $H^1_0(I)$ la forme bilinéaire
   $$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I c(x)u(x)v(x)dx.$$
   (a) ($1/2$ point) Montrer que a est continue.
   (b) ($1/2$ point) Rappeler la définition d'une forme bilinéaire coercive.
   (c) (1 point) Montrer que si $c_0 > -4$, alors a est coercive sur $H^1_0(I)$.
   (d) (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. Montrer que le problème variationel
   $$\forall v \in H^1_0(I), \quad a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx$$
   admet une unique solution $u \in H^1_0(I)$.