M1 MAT-MApI3
EMMAI2B1
Méthodes numériques pour les EDPs
Examen seconde session
Mardi 4 septembre 2018
Durée : 2 heures

Pas de documents, pas de calculatrice. Le sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

Exercice 1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. (½ point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

> **Solution:** Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. (½ point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

> **Solution:** On définit T_f pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par
> $$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \phi dx.$$

3. (½ point) Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne peut pas être représentée par une fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

> **Solution:** La distribution de Dirac en 0 notée δ_0 ne peut pas être représentée par une fonction.

Exercice 2. Soit $I =]0, 1[$. On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans I et que $H^1(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est également dans $L^2(I)$.

1. (1 point) Rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^1_0(I)$.

> **Solution:** L'espace $H^1_0(I)$ est par définition l'adhérence dans $H^1(I)$ de $\mathcal{D}(I)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans I.
> *1/2 point si espace des fonctions de H^1 qui valent 0 en 0 et 1.*

2. Soit $u \in \mathcal{D}(I)$.
   (a) (½ point) Montrer que pour tout $x \in I$ on a
$$u(x) = \int_0^x u'(s)ds, \quad u(x) = \int_1^x u'(s)ds.$$

Solution: Puisque $u \in \mathcal{D}(I)$, sa dérivée u' est bien définie, continue, et donc intégrable au sens de Riemann. De plus, u est à support compact dans I, donc

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 0.$$

On a donc bien

$$\int_0^x u'(s)ds = u(x) - \lim_{s\to 0} u(s) = u(x), \qquad \int_1^x u'(s)ds = u(x) - \lim_{s\to 1} u(s) = u(x).$$

(b) (½ point) En déduire que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(s)|ds.$$

Solution: Par l'inégalité triangulaire et en faisant attention à intervertir les bornes dans la seconde intégrale, on a

$$2|u(x)| = \left|\int_0^x u'(s)ds + \int_1^x u'(s)ds\right| \leq \int_0^x |u'(s)|ds + \int_x^1 |u'(s)|ds = \int_0^1 |u'(s)|ds.$$

Cela prouve l'inégalité demandée.

(c) (1 point) En déduire que

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

Solution: En élevant au carré et en intégrant en x l'inégalité précédente, on obtient

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |u'(s)|ds\right)^2 dx.$$

L'intégrande au second membre ne dépend pas de x. De plus, par l'inégalité de Jensen, on a

$$\left(\int_0^1 |u'(s)|ds\right)^2 \leq \int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

En combinant les élements précédents, on obtient bien

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

3. (½ point) Soit $v \in H_0^1(I)$. Montrer que

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(I)}.$$

Solution: Puisque $v \in H_0^1(I)$, il existe $(v_n) \subset \mathcal{D}(I)$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1(I)$. Par la réponse précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|v_n\|_{L^2(I)} \le \frac{1}{2}\|v_n'\|_{L^2(I)}.$$

On peut passer à la limite dans l'inégalité pour obtenir l'inégalité souhaitée en v.

4. Soit $c \in L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ (le signe de c_0 n'est pas prescrit) tel que pour tout $x \in I$ on a

$$c(x) \ge c_0.$$

On définit sur $H_0^1(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I c(x)u(x)v(x)dx.$$

(a) (½ point) Montrer que a est continue.

Solution: Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (combinée avec celle de Hölder pour la seconde intégrale), on a

$$|a(u,v)| \le \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \|c\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \le (1+\|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}.$$

Donc a est bien continue sur $H_0^1(I)$.

(b) (½ point) Rappeler la définition d'une forme bilinéaire coercive.

Solution: On dit que a est *coercive* (sur $H_0^1(I)$) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,u) \ge \alpha\|u\|_{H^1(I)}^2.$$

(c) (1 point) Montrer que si $c_0 > -4$, alors a est coercive sur $H_0^1(I)$.

Solution: Pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,u) \ge \|u'\|_{L^2(I)}^2 + c_0\|u\|_{L^2(I)}^2.$$

Par l'inégalité obtenue précédemment on a

$$\|u'\|_{L^2(I)}^2 \ge 4\|u\|_{L^2(I)}^2.$$

Soit $\alpha > 0$ à choisir petit plus tard. On a

$$a(u,u) \ge (1-\alpha)\|u'\|_{L^2(I)}^2 + \alpha\|u'\|_{L^2(I)}^2 + c_0\|u\|_{L^2(I)}^2 \ge (4(1-\alpha)+c_0)\|u\|_{L^2(I)}^2 + \alpha\|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

Puisque $c_0 > -4$, on a peut choisir $\alpha > 0$ tel que

$$(4(1-\alpha)+c_0) > \alpha$$

en prenant

$$0 < \alpha < \frac{4+c_0}{5}.$$

On aura alors

$$a(u,u) \geq \alpha(\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I)}) = \alpha\|u\|^2_{H^1(I)},$$

ce qui montre la coercivité de a.

(d) (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. Montrer que le problème variationel

$$\forall v \in H^1_0(I), \quad a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx$$

admet une unique solution $u \in H^1_0(I)$.

Solution: Dans l'espace de Hilbert $H^1_0(I)$, la forme bilinéaire a est continue et coercive. Par ailleurs, la forme linéaire définie par

$$v \mapsto \int_I f(x)v(x)dx$$

est continue car, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $v \in H^1(I)$ on a

$$\left|\int_I f(x)v(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{H^1(I)}.$$

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique fonction $u \in H^1_0(I)$ telle que pour tout $v \in H^1_0(I)$ on a

$$a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$