M1 MAT-MApI3
EMMAI2B1
Méthodes numériques pour les EDPs
Lundi 19 février 2018
Durée : 2 heures

Pas de documents, pas de calculatrice. Le sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

Exercice 1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. Effectuer les rappels suivants.
   (a) (1 point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) (1 point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.
2. (1 point) Pourquoi la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.
3. On définit la distribution $\text{vp}(1/x)$, dite *valeur principale* de $1/x$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

   (a) (2 points) Montrer que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien une distribution.
   (b) (1 point) Calculer le produit (au sens des distribution) $x\,\text{vp}(1/x)$.

Exercice 2. Soit $I =]-1, 1[$. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

1. (1 point) Calculer la dérivée de h au sens des distributions.
2. (1 point) A-t-on $h \in L^2(I)$? $h \in H^1(I)$?

Exercice 3. Soit $I =]0, 1[$. On définit l'espace

$$H_g^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u(0) = 0 \right\}.$$

1. (1 point) Montrer que $H_g^1(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.
2. (1 point) On note $\mathcal{D}(]0, 1])$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0, 1]$. Montrer que $\mathcal{D}(]0, 1])$ est dense dans $H_g^1(I)$ (on pourra s'appuyer sur la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H_0^1(I)$).
3. (a) (1 point) Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1])$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

   $$\int_0^1 \phi^2(x)dx \leq C \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

   (b) (1 point) En déduire que pour tout $u \in H_g^1(I)$ on a

   $$\|u\|_{L^2(I)}^2 \leq C \|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

4. On définit sur $H_g^1(I)$ la forme bilinéaire

   $$a(u, v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I u'(x)v(x)dx.$$

   (a) (1 point) La forme bilinéaire a est-elle symétrique (justifier votre réponse) ?

   (b) (1 point) Montrer que a est continue et coercive sur $H_g^1(I)$.
5. (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. On définit la forme linéaire L sur $H_g^1(I)$ par

   $$L(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

   Montrer que L est continue.
6. (1 point) Montrer qu'il existe un unique $u \in H_g^1(I)$ tel que pour tout $v \in H_g^1(I)$ on a

   $$a(u, v) = L(v).$$

7. (1 point) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u au sens des distributions.
8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$.
9. (1 point) Calculer $u'(1)$.
10. (1 point) Écrire le problème aux limites vérifié par u.