M1 MAT-MApI3
EMMAI2B1
Méthodes numériques pour les EDPs
Lundi 19 février 2018
Durée : 2 heures

Pas de documents, pas de calculatrice. Le sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

Exercice 1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. Effectuer les rappels suivants.
   (a) (1 point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Solution: Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   (b) (1 point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

   Solution: On définit T_f pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \phi dx.$$

2. (1 point) Pourquoi la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

   Solution: La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ car elle n'est pas intégrable en 0. Donc elle ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

3. On définit la distribution $\text{vp}(1/x)$, dite *valeur principale* de $1/x$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

   (a) (2 points) Montrer que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien une distribution.

   Solution: Il est clair que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est linéaire (si tant est qu'elle soit bien définie). Montrons que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue (et bien définie). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$|\phi(x) - \phi(-x)| \leq 2x \sup_{y \in [-x,x]} |\phi'(y)|.$$

   D'autre part, puisque ϕ est à support compact, il existe $M_\phi > 0$ tel que $\phi(x) - \phi(-x) = 0$ pour tout $x > M_\phi$. Par conséquent,

$$\left| \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx \leq 2M_\phi \|\phi'\|_{L^\infty}.$$

   Par définition, si une suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers 0, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\text{supp}(\phi_n) \subset [-M, M]$ et $\|\phi_n'\|_{L^\infty} \to 0$ as $n \to \infty$. Donc $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue.

(b) (1 point) Calculer le produit (au sens des distribution) $x\,\mathrm{vp}(1/x)$.

Solution: La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc le produit $x\,\mathrm{vp}(1/x)$ a un sens. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\left\langle x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\phi\right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{x\phi(x) - (-x)\phi(-x)}{x} dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \phi(x)dx + \int_0^{+\infty} \phi(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = \langle 1, \phi\rangle.$$

On remarque que $x\,\mathrm{vp}(1/x) = 1$ au sens des distributions.

Exercice 2. Soit $I =]-1, 1[$. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

1. (1 point) Calculer la dérivée de h au sens des distributions.

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$. On a par définition de la dérivée au sens des distributions

$$\langle h', \phi\rangle = -\langle h, \phi'\rangle.$$

De plus, en utilisant l'expression de h et le fait que ϕ est à support compact dans $]-1, 1[$, on obtient

$$-\langle h, \phi'\rangle = -\int_{-1}^{1} h(x)\phi'(x)dx = -\int_0^1 \phi'(x)dx = \phi(0).$$

Par conséquent, au sens des distributions, on a

$$h' = \delta_0.$$

2. (1 point) A-t-on $h \in L^2(I)$? $h \in H^1(I)$?

Solution: La fonction h est continue par morceau sur I, elle appartient donc à $L^2(I)$. En revanche, $h' = \delta_0$ ne peut pas être représenté par une fonction de $L^2(I)$, donc $h \notin H^1(I)$.

Exercice 3. Soit $I =]0,1[$. On définit l'espace

$$H^1_g(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u(0) = 0 \right\}.$$

1. (1 point) Montrer que $H^1_g(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.

Solution: L'application $\Phi : H^1(I) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u) = u(0)$ pour tout $u \in H^1(I)$ est une application linéaire. Elle est de plus continue. En effet, il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(I)$, en utilisant l'injection $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$, on a

$$|\Phi(u)| = |u(0)| \le \|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{H^1}.$$

Par définition, l'espace $H^1_g(I)$ est le noyau de Φ, donc c'est un sous-espace fermé de $H^1(I)$.

2. (1 point) On note $\mathcal{D}(]0,1])$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1]$. Montrer que $\mathcal{D}(]0,1])$ est dense dans $H^1_g(I)$ (on pourra s'appuyer sur la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1_0(I)$).

Solution: Soit $u \in H^1_g(I)$. Par l'injection $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$, u est continue et en particulier $u(1)$ est bien définie. Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\phi \ge 0$ et $\int_I \phi(x)dx = 1$. Définissons

$$\tilde{u} = u - u(1)\chi(x), \quad \chi(x) := \int_0^x \phi(y)dy.$$

Alors $\tilde{u} \in H^1(I)$ et $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$, donc $\tilde{u} \in H^1_0(I)$. Par densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1_0(I)$, il existe une suite $(\tilde{u}_n) \subset \mathcal{D}(I)$ telle que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H^1(I)$. Remarquons que la fonction χ définie plus haut appartient à $\mathcal{D}(]0,1])$. Par conséquent, la suite (u_n) définie par

$$u_n(x) = \tilde{u}_n(x) + u(1)\chi(x)$$

est incluse dans $\mathcal{D}(]0,1])$. De plus, on a $u_n \to u$ dans $H^1(I)$. En conclusion, tout élément de $H^1_g(I)$ peut être approché par une suite de $\mathcal{D}(]0,1])$.

3. (a) (1 point) Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1])$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx \le C \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

Solution: Une stratégie possible est d'écrire la fonction ϕ^2 comme la primitive de sa dérivée. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx = \int_0^1 \int_0^x 2\phi'(y)\phi(y)dy \le 2 \left(\int_0^1 \phi^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx \le 4 \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

(b) (1 point) En déduire que pour tout $u \in H_g^1(I)$ on a

$$\|u\|^2_{L^2(I)} \leq C\|u'\|^2_{L^2(I)}.$$

Solution: Soit $u \in H_g^1(I)$. Par densité de $\mathcal{D}(]0,1])$ dans $H_g^1(I)$, il existe $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$. En particulier, on a

$$\|u_n\|_{L^2} \to \|u\|_{L^2}, \quad \|u_n'\|_{L^2} \to \|u'\|_{L^2}.$$

Puisque $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$, on a par la réponse précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité

$$\|u_n\|^2_{L^2(I)} \leq C\|u_n'\|^2_{L^2(I)}.$$

Par passage à la limite, on obtient la même inégalité pour u.

4. On définit sur $H_g^1(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I u'(x)v(x)dx.$$

(a) (1 point) La forme bilinéaire a est-elle symétrique (justifier votre réponse) ?

Solution: La forme a n'est en apparence pas symétrique.Confirmons le par un contre-exemple. Prenons les deux fonctions $u, v \in H_g^1(I)$ définies par $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. Alors

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 2x dx + \int_0^1 x^2 dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}, \\ a(v,u) &= \int_0^1 2x dx + \int_0^1 2x^2 dx = \left[x^2 + \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

On a bien $a(u,v) \neq a(v,u)$. Notons que le fait que a ne soit pas symétrique en apparence ne suffit pas à prouver qu'elle ne l'est effectivement pas. En effet, prenons par exemple la forme définie sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ par

$$b(u,v) = \int_0^1 u''(x)v(x)dx.$$

En apparence, on a $b(u,v) \neq b(v,u)$, cependant une double intégration par partie nous montre qu'en fait on a $b(u,v) = b(v,u) \in \mathcal{D}(]0,1[)$.

(b) (1 point) Montrer que a est continue et coercive sur $H_g^1(I)$.

Solution: Soit $u, v \in H_g^1(I)$. On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

donc a est continue. Montrons que a est coercive. On a

$$\int_0^1 u'(x)u(x)dx = \left[\frac{1}{2}u^2(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}u^2(1) > 0.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{1}{C}\right)\|u\|_{H^1}^2.$$

En combinant les deux inégalités, on voit qu'il existe $\alpha = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{1}{C}\right) > 0$ tel que pour tout $u \in H^1_g(I)$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2,$$

autrement dit a est coercive.

5. (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. On définit la forme linéaire L sur $H^1_g(I)$ par

$$L(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

Montrer que L est continue.

Solution: La forme L est continue car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout $v \in H^1_g(I)$ l'estimation

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

6. (1 point) Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1_g(I)$ tel que pour tout $v \in H^1_g(I)$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

Solution: Il s'agit d'une application directe du théorème de Lax-Milgram. En effet, l'espace $H^1_g(I)$ est un espace de Hilbert sur lequel la forme bilinéaire a est continue et coercive et la forme linéaire L est continue, donc il existe un unique u avec la propriété demandée.

7. (1 point) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u au sens des distributions.

Solution: Soit $v \in \mathcal{D}(I)$. Puisque

$$a(u,v) = L(v),$$

et que

$$\langle T''_u, v\rangle = -\int_I u'(x)v'(x)dx,$$

la fonction u vérifie au sens des distribution l'équation différentielle

$$-u'' + u' = f.$$

8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Solution: On a $u \in H^1(I)$. De plus, puisque $u'' = u' - f$, on a $u'' \in L^2(I)$ et donc $u \in H^2(I)$. De plus, on a l'injection $H^2(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\bar{I})$, donc $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

9. (1 point) Calculer $u'(1)$.

Solution: Soit $v \in H^1_g(I)$. On a

$$a(u,v) = L(v)$$

et donc par intégration par partie et en utilisant $v(0) = 0$ on a

$$u'(1)v(1) + \int_I (-u'' + u' - f)v dx = 0,$$

et par l'équation satisfaite par u on a donc

$$u'(1)v(1) = 0.$$

La fonction définie par $v(x) = x$ est bien dans $H^1_g(I)$, donc

$$u'(1) = 0.$$

10. (1 point) Écrire le problème aux limites vérifié par u.

Solution: En rassemblant les informations précédemment obtenues, on s'aperçoit que u vérifie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + u' = f & \text{sur } I, \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$