TP3 : Équations différentielles

Les exercices de cette séance de travaux pratiques seront résolus à l'aide d'un logiciel de type tableur, par exemple Excel ou Open Office Calc.

1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler [1] permet d'obtenir une solution approchée de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En supposant qu'on recherche la solution pour $x > x_0$, on fixe un pas d'itération h (bien sûr plus h est petit et meilleure est l'approximation) et on définit itérativement les valeurs y_j en posant

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j).$$

Exercice 1. On se propose de calculer numériquement la solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Rappeler la solution théorique de (1).
2. Construire 30 itérations de la suite (y_j) définie à l'aide de la méthode d'Euler avec pour un pas $h = 0,1$ et comparer avec la valeur de la solution exacte (obtenue en 1) calculé à l'aide de la fonction préprogrammée de votre tableur (en général `EXP`).
3. Représenter graphiquement la suite (y_j) et la solution théorique.

Exercice 2 (Décharge d'un condensateur dans un circuit RC)**.** Le tableau suivant contient une séries de mesures effectuées lors de la décharge d'un condensateur dans un circuit RC (une mesure toutes les 5s de la tension en Volts aux bornes du condensateur).

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
u	6	5,7	5,3	5	4,5	4,3	4,1	3,8	3,6	3,4	3,2	3,2	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2	1,9

95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175
1,8	1,7	1,6	1,6	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1	1	1	1	0,9	0,7	0,7	0,7

On sait par ailleurs que la décharge d'un condensateur dans un circuit RC est décrite par l'équation différentielle

$$u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t), \tag{2}$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

1. Entrer une valeur quelconque dans une case de votre tableur (15 par exemple) puis construire une approximation de la solution de l'équation (2) en prenant la valeur dans la case comme paramètre τ et comme donnée initiale la valeur mesurée de u en $t = 0$.
2. Représenter graphiquement les données obtenues et ajuster le paramètre τ à l'expérience.

1. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

2 Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge[2]-Kutta[3] d'ordre 2 consiste à utiliser la construction suivante

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f\left(x_j, y_j\right)\right).$$

Il s'agit d'une amélioration de la méthode d'Euler obtenue en introduisant le point intermédiaire $x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}$ et en posant $y_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j)$ puis $y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1/2}, y_{j+1/2})$.

Avec des argument similaires, on définit la méthode Runge-Kutta d'ordre 4, très employée en pratique. On pose

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où les quantités k_1, k_2, k_3, k_4 sont définies par

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_j, y_j\right), \\
k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_2\right), \\
k_4 &= f\left(x_j + h, y_j + hk_3\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3. On cherche à résoudre pour $x \in [0, 1]$ l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

1. Vérifier que $\dfrac{1}{1 + x^2}$ est solution de (3).
2. Calculer les solutions approchées pour un même pas d'itération avec les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Runge-Kutta d'ordre 4. Comparer les résultats obtenues avec la solution exacte.

2. Carl Runge (1856-1927), mathématicien et physicien allemand.
3. Martin Kutta (1867-1944), mathématicien allemand.