TP2 : $f(x) = 0$

Les exercices de cette séance de travaux pratiques seront résolus à l'aide d'un logiciel de type tableur, par exemple Excel ou Open Office Calc.

1 Dichotomie

On rappelle le théorème suivant, dit *théorème des valeurs intermédiaires*, ou *théorème de Bolzano*[1].

Théorème 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe. A quelle condition sur f existe-t-il un *unique* réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$?

La méthode de dichotomie pour trouver la solution d'une équation $f(x) = 0$ repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe alors au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. On calcule le milieu m de $[a, b]$ et $f(m)$. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires il existe une solution dans $[a, m]$, sinon il en existe une dans $[m, b]$. On recommence ensuite la procédure sur l'intervalle où f change de signe et ainsi de suite.

Exercice 2. On souhaite utiliser la méthode de dichotomie pour calculer $\sqrt{2}$.

1. Proposer une fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) < 0 < f(2)$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ admette pour unique solution dans $[0, 2]$ la valeur $\sqrt{2}$.
2. Dans une feuille d'un tableur, faire un tableau pour les valeurs de a, b, m, $f(a)$ et $f(m)$ en commencant par $a = 0$ et $b = 2$. Pour les nouvelles valeurs de a et b on utilisera la formule `SI(test ; valeur-si-vrai ; valeur-si-faux)`. Prolonger le tableau jusqu'à obtenir 30 itérations de la méthode.
3. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et comparer avec la valeur obtenue avec la fonction préprogrammée de votre tableur (`RACINE` ou `SQRT` en général).

2 Méthode de point fixe

Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour résoudre l'équation (d'où le terme *point fixe*)

$$g(x) = x,$$

on construit une suite (x_k) en partant de $x_0 \in [a, b]$ et en définissant la suite par récurrence :

$$x_{k+1} = g(x_k).$$

Si $\sup_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$, alors on peut montrer que la suite (x_k) est bien définie et tend vers un nombre x_∞ vérifiant $g(x_\infty) = x_\infty$.

Exercice 3. On cherche encore à calculer $\sqrt{2}$.

1. On pose $g(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$.
   a) Vérifier que l'équation $g(x) = x$ admet $\sqrt{2}$ comme solution.
   b) Calculer les 30 premiers termes de la suite $x_{k+1} = g(x_k)$ construite en commencant avec $x_0 = 1$.
   c) Comparer la valeur approchée à la trentième itération avec la valeur obtenue avec la fonction préprogrammée de votre tableur.

1. Bernard Bolzano (1781-1848), mathématicien, logicien, philosophe, théologien de langue et de culture allemandes, fils d'un Italien émigré à Prague.

2. On pose maintenant $h(x) = x^2 + x - 2$

   a) Vérifier que l'équation $h(x) = x$ admet $\sqrt{2}$ comme solution.

   b) Calculer les 30 premiers termes de la suite $x_{k+1} = h(x_k)$ construite en commencant avec $x_0 = 1$.

   c) Que peut-on remarquer ? Essayer avec d'autres valeurs de x_0 (par exemple 1, `RACINE(2)`, `-RACINE(2)`). Quelle hypothèse de la méthode n'est pas vérifiée ?

3 Méthode de Newton

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0,$$

on construit une suite (x_k) en partant de $x_0 \in [a, b]$ et en définissant la suite par récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Sous certaines hypothèses sur f et x_0, on montre que la suite que la suite (x_k) est bien définie et tend vers un nombre x_∞ vérifiant $f(x_\infty) = 0$.

Exercice 4. On reprend encore une fois le calcul de $\sqrt{2}$, cette fois-ci en mettant en œuvre la méthode de Newton, appelée dans ce cas particulier *méthode de Héron*[2] ou *méthode babylonienne*. On pose $f(x) = x^2 - 2$.

1. Calculer les 30 premiers termes de la suite $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ construite en commencant avec $x_0 = 1$.
2. Comparer les valeurs de (x_k) avec la valeur de $\sqrt{2}$ obtenue avec la fonction préprogrammée de votre tableur.

Exercice 5. Comparer les différentes méthodes employées pour calculer $\sqrt{2}$. Laquelle semble être la plus efficace ?

2. Héron d'Alexandrie ou Héron l'Ancien (Ier siècle après J.-C.), ingénieur, mécanicien et mathématicien grec.