TP1 : Intégration

Les exercices de cette séance de travaux pratiques seront résolus à l'aide d'un logiciel de type tableur, par exemple Excel ou Open Office Calc.

1 Tableur : quelques rappels - 1/2 heure

Les exercices proposés dans les sections suivantes ne requièrent qu'une connaissance très limité du fonctionnement d'un tableur. Dans cette section, on rappelle sous forme d'exercices les informations les plus importantes pour la suite.

Exercice 1 (Formules)**.** Dans un tableur, ouvrir une nouvelle feuille de calcul. Entrer dans la case A1 la valeur 4, dans la case B1 la valeur 5, puis dans les cases C1 à G1 les formules `=A1+B1`, `=A1-B1`, `=A1*B1`, `=A1/B1`, `=A1^B1`.

1. Interpréter les valeurs qui apparaissent dans les cases C1 à G1.
2. Remplacer dans la case A1 la valeur 4 par la valeur 2. Que peut-on remarquer ?

Exercice 2 (Position relative et Position absolue)**.** Dans un tableur, ouvrir une nouvelle feuille de calcul. L'ensemble de l'exercice se fera sur la même feuille de calcul.

1. Entrer dans la case A1 la valeur 1, dans la case B1 la valeur 3, puis dans la case C1 la formule `=(A1+B1)/2`. Puis entrer dans la case A2 la valeur 2 et dans la case B2 la valeur 6. Enfin effectuer un copier/coller de la case C1 vers la case C2. Interpréter la valeur qui apparaît dans la case C2.
2. Placer le pointeur de la souris sur la case C2 et observer la barre de formule. Que peut-on remarquer ?
3. Entrer dans la case D1 la formule `=($A$1+$B$1)/2` puis copier/coller D1 vers D2. Que peut-on remarquer ?
4. Sélectionner les cases A1 et A2, placer le pointeur de la souris sur le coin en bas à droite de la sélection, cliquer puis en maintenant le clic tirer le pointeur jusqu'à la case A10. Ensuite, sélectionner les cases B1 et B2 et effectuer la même opération jusqu'à la case B10. Que peut-on remarquer ?
5. Faire de même dans les colonnes C et D. Que peut-on remarquer ?

2 Méthode des trapèzes

On rappelle qu'étant donnée une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ d'un intervalle et une fonction f intégrable alors une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ est donnée par la formule

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right) (x_{j+1} - x_j).$$

En particulier, si la subdivision est régulière $\left(x_j = a + \frac{j(b-a)}{n} \right)$, on a la formule

$$\frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2} \right).$$

Dans ce cas, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'erreur commise dans l'approximation peut être estimée par

$$|Err| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Exercice 3. Une compagnie de distribution d'eau réalise quotidiennement un transfert d'eau depuis un réservoir vers un centre de traitement. Le volume de ce transfert doit être adapté en fonction des besoins et varie chaque jour. A chaque opération de transfert, on mesure à intervalle régulier le débit en sortie du réservoir. Pour les besoins de l'exercice, on va supposer que le débit en m^3/min est donné par la fonction $\theta : t \mapsto \arctan(t^2)/\pi$ où t désigne en minutes le temps écoulé depuis le début du transfert.

1. Exprimer le volume transféré au temps $t > 0$ à l'aide d'une intégrale.
2. Que représente $V_{\text{day}} = \displaystyle\int_0^{1440} \theta(s)ds$? On souhaite donner une estimation de V_{day} en calculant cette intégrale à l'aide d'un tableur.

   a) Diviser l'intervalle $[0, 1440]$ en 24 parties et écrire les bornes de chaque subdivision en colonne dans un tableau.

   b) Dans une nouvelle colonne, calculer la valeur de $\theta(s)$ à chaque borne.

   c) En déduire une valeur approchée de V_{day}.
3. On suppose que le débit est mesuré toutes les minutes. Estimer (à la minute près) combien de temps sera nécessaire pour transférer 20 m^3 d'eau vers le centre de traitement (indication : effectuer un calcul itératif de l'intégrale trouvée en 1 jusqu'à obtenir 20 ou plus).
4. En vous appuyant sur les données de la question précédente, représenter graphiquement l'évolution du volume transféré en fonction du temps.

3 Méthode de quadrature (facultatif)

On rappelle que, connaissant les poids w_i et les noeuds x_i, on peut approximer une intégrale à l'aide de la formule suivante.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \simeq \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

En pratique on pourra utiliser les valeurs suivantes (méthode de Gauss-Legendre avec cinq points).

x_i	0	$\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$	$\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$
w_i	$\frac{128}{225}$	$\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$	$\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$

Exercice 4. Étant donnée la fonction $\theta : t \mapsto \arctan(t^2)/\pi$, calculer $V_{\text{day}} = \displaystyle\int_0^{1440} \theta(s)ds$ à l'aide de la méthode décrite ci-dessus. Comparer le résultat avec celui obtenu à la question 2 de l'exercice 3.