Équation Différentielle

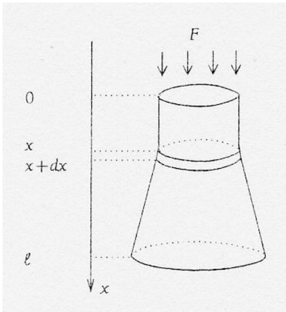
Compression élastique d'une colonne

On considère une colonne élastique d'une hauteur l. On applique un chargement uniforme F à une de ses extrémités, l'autre restant fixe. L'objectif est alors de calculer la compression u (avant compression la colonne à une hauteur l et après sa hauteur est de $l - u$ (u peut être assimilé à un déplacement).
Gr,ce à la mécanique et plus précisément à la loi de Hooke, il est possible de prédire la compression d'un cube de coté 1 en écrivant que $F = Eu$ où E est le module de Young (constante) qui dépend de la nature du matériau constituant la colonne (exemple pour l'acier ou l'aluminium, $E = 210$ ou 69 GPa[1]) .
Si on considère ensuite un cylindre droit, on a

$$u = \frac{Fl}{EA},$$

où A est l'aire de la section de la colonne.
Si la colonne a une section variable en fonction de la hauteur de coupe (repéré par un axe vertical x) notée $A(x)$ (état initial sans compression) on peut montrer que u doit vérifier

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{F}{EA(x)}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq l.$$



On considère une colonne conique en acier de longueur $l = 2m$ et de rayons $r_0 = 2,5cm$, $r_1 = 5cm$ à ses deux extrémités.

Question 1 : Exprimer le rayon de la colonne à une distance x de son extrémité.

Question 2 : Déduire de la question précédente l'expression de $A(x)$.

Question 3 : Calculer exactement la compression totale ($0 \leq x \leq l$) en fonction de F.

Question 4 : Pour une colonne en acier et $F = 400N$, quelle compression observe-t-on ?

Cette approche n'est malheureusement possible que pour des expressions simples de $A(x)$. Pour arriver à conclure en toute situation on doit faire appel à des méthodes numériques, d'où les deux questions suivantes.

Question 5 : Appliquer la méthode de Euler pour retrouver ce résultat.

Question 6 : Appliquer la méthode de Runge-Kutta pour retrouver ce résultat.

Question 7 : Comparer les deux méthodes de calcul et interpréter les résultats.

1. Unités de mesures : $N = kg.m/s^2$, $1GPa = 10^9 Pa = 10^9 N/m^2$