

## Flotteur dans une cuve

Une société qui construit des toilettes cherche à savoir la profondeur d'immersion dans de l'eau de leurs flotteurs sphériques de rayon  $r = 5.5\text{cm}$  (figure 1).

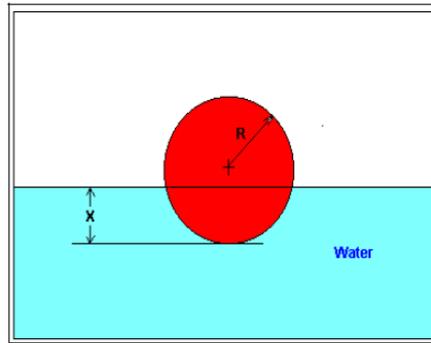


Figure 1. Profondeur  $x$  d'immersion du flotteur dans l'eau.

**Question 1 :** Démontrer que le volume du flotteur qui est immergé s'exprime

$$V = \frac{\pi x^2(3r - x)}{3}.$$

*Indication :* On rappelle que  $V = \int_{X=r-x}^{X=r} A(X)dX$  où  $X$  permet de repérer un point sur l'axe vertical passant par le centre de la sphère considéré comme origine, orienté vers le bas et  $A(X)$  est l'aire d'une section de coupe en  $X$ .

Vérifier que pour une coupe en  $X_0 \in [r - x, r]$ ,  $A(X_0) = \pi(r^2 - X_0^2)$ .

**Question 2 :** En vertu des lois de la mécanique (poussée d'Archimède), le poids du flotteur exerce une force sur l'eau engendrant une force de réaction. On notera  $\rho_f$ ,  $\rho_w$  la densité du flotteur et de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ). Ecrire sous forme d'équation le bilan des forces suivant :

$$\begin{aligned} &(\text{Volume du flotteur}) \times (\text{Densité du flotteur}) \times (\text{Accélération de la pesanteur}) = \\ &(\text{Volume immergé du flotteur}) \times (\text{Densité de l'eau}) \times (\text{Accélération de la pesanteur}). \end{aligned}$$

Montrer alors que  $x$  est solution de l'équation

$$4r^3\gamma - 3x^2r + x^3 = 0.$$

Le rapport  $\gamma = \frac{\rho_f}{\rho_w}$  est appelé densité spécifique du flotteur.

**Question 3 :** Répondre à la question posée : trouver  $x$ .

La difficulté réside dans le fait que  $x$  doit satisfaire une équation non linéaire dont la résolution analytique n'est pas connue. On se propose donc d'utiliser les méthodes itératives d'approximations vues en cours pour trouver  $x$ . On supposera que  $\gamma = 0,6$ . Les calculs seront réalisés avec 5 décimales.

Dans tous les cas, le choix des valeurs choisies pour initialiser le processus de calcul est à expliquer, ainsi que le choix du nombre d'itérations réalisées.

**3a :** Utiliser la méthode de point fixe.

**3b :** Utiliser la méthode de Newton.

**3c :** Comparer les deux méthodes et donner une interprétation physique des résultats obtenus.