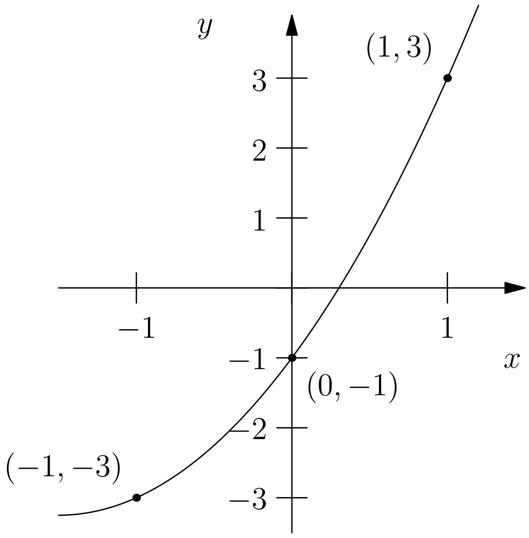
Algèbre linéaire

Exercice 1 (Calcul matriciel)**.** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Effectuer, lorsqu'ils sont possibles, les produits suivants :

$$A \cdot A^t, \quad A^t \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B^t, \quad B \cdot A^t, \quad B \cdot A.$$

Exercice 2. On souhaite déterminer les coefficients a, b, c tels que la courbe suivante soit la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rappeler la définition de l'inverse d'une matrice. Si A est inversible, calculer A^{-1}.
2. Soit le vecteur $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^{-1}B$.
3. Évaluer $f(x)$ pour $x = 0, -1, 1$ et en déduire un système de trois équations vérifiées par a, b et c.
4. Écrire le système obtenu à la question précédente sous forme matricielle. En déduire a, b et c.

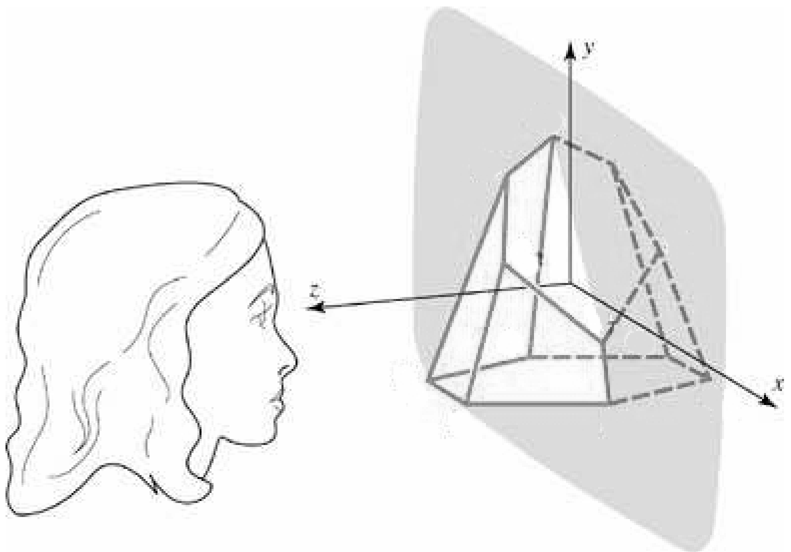
Exercice 3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{u}, \vec{v}$ à partir de l'origine O.
2. Soit B un point de coordonnée $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Quelles sont les coordonnées de B dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$? Par quelle matrice doit-on multiplier $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ pour obtenir ces nouvelles coordonnées ? On notera P cette matrice [1]. Que remarquer ?
3. Calculer P^{-1}.
4. Exprimer les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans le repère $(\vec{u}, \vec{v})$. Que remarquer ?

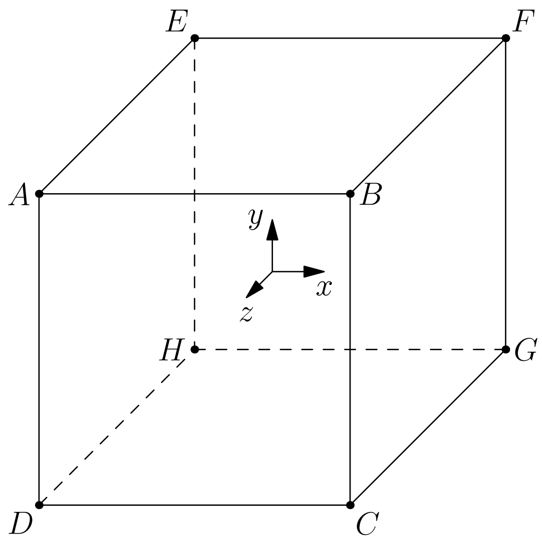
1. La matrice P est dite *matrice de passage* de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vers $(\vec{u}, \vec{v})$

5. Soit A un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Quelles sont les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$? Par quelle matrice doit-on multiplier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour obtenir ces nouvelles coordonnées ?

Exercice 4. Pour représenter un objet tridimensionnel polyédral sur un écran, on peut procéder de la façon suivante. On place un repère au centre de l'écran, les coordonnées (x, y) étant dans le plan de l'écran et la direction (Oz) la direction du regard de l'observateur, comme illustré dans la figure [2] ci-après.

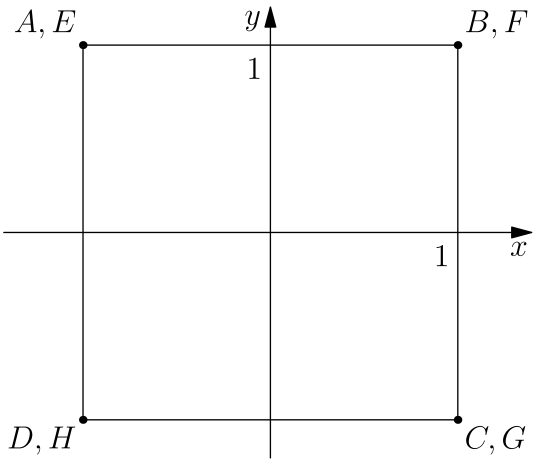


Pour représenter un objet polyédral, on a donc besoin de connaître les coordonnées de ses sommets et de savoir quelles sont les arêtes extérieures. Prenons le cas simple d'un cube de sommets $A(-1, 1, 1)$, $B(1, 1, 1)$, ... $G(1, -1, -1)$, $H(-1, -1, -1)$ comme dans la figure ci-après.



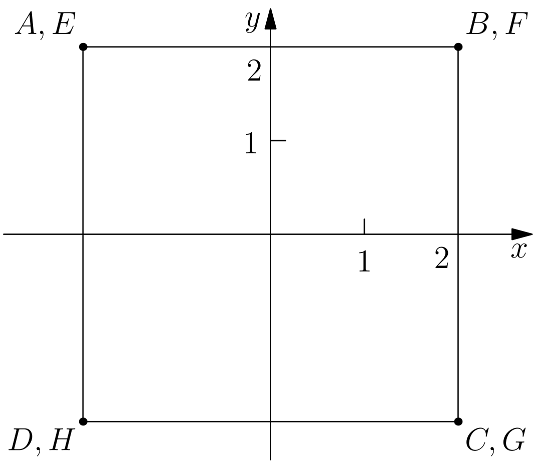
Dans la disposition actuel du cube, l'observateur verra sur l'écran la figure suivante.

2. source de la figure : *Elementary Linear Algebra*, Howard Anton and Chris Rorres, 9th edition.



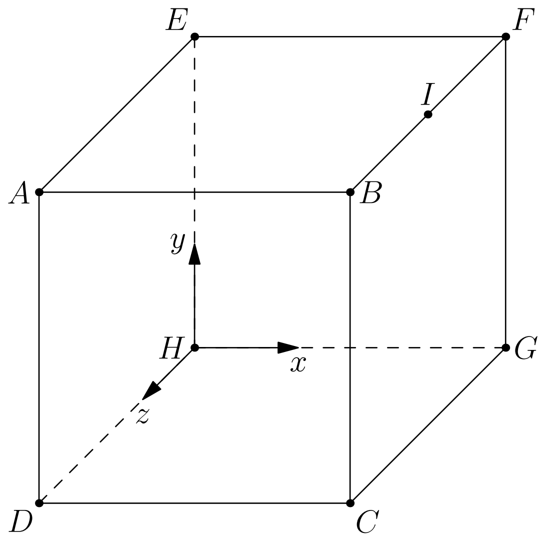
Notre but dans cet exercice est, à l'aide du calcul matriciel, de modifier de différentes manières la vue du cube qu'a l'observateur.

1. Écrire une matrice P contenant en colonne les coordonnées des points de A à H.
2. Soit la matrice $S := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer la matrice $P' = SP$. Graphiquement, quel est l'effet de la multiplication de C par S ? Par quelle matrice doit-on multiplier P pour que l'observateur voit la figure suivante.



3. Écrire la matrice d'une rotation du plan autour de l'axe (Oz) de centre $(0, 0)$ et d'angle θ. Soit θ un réel et R_z la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est l'effet de la multiplication de P par R_z (on ne demande pas d'effectuer cette multiplication) ?
4. On cherche à effectuer une rotation d'axe (Ox) et d'angle θ sur le cube. Par quelle matrice doit-on multiplier P pour obtenir les coordonnées du nouveau cube ?

Exercice 5. On considère le cube unité



Le point A a donc pour coordonnées $(0, 1, 1)$, le point B $(1, 1, 1)$, etc. On place le point I au milieu du segment $[BF]$.

1. Quelles sont les coordonnées du point I ?
2. Calculer la distance de I à l'axe $(0z)$.
3. Combien vaut le produit scalaire $(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE})$? Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HI})$.
4. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BF}$.

Exercice 6. Chez les Corleone, les membres de la famille s'influencent de la manière suivante. La mère Carmela influence sa fille Connie et son fils ainé Sonny ; le père Vito peut influencer ses deux fils Sonny et Michael ; Connie influence son père ; Sonny influence Michael ; et Michael influence sa mère.

1. Compléter la matrice suivante avec 1 si le membre de la famille en ligne influence le membre de la famille en colonne, 0 sinon. On fait la convention qu'un membre de la famille ne s'influence pas lui-même.

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccccc} \text{Carmela} & \text{Vito} & \text{Connie} & \text{Sonny} & \text{Michael} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Carmela} \\ \text{Vito} \\ \text{Connie} \\ \text{Sonny} \\ \text{Michael} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & & & 0 & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. On appelle M la matrice obtenue dans la question 1. Rappeler la définition de la transposée M^t de la matrice M. Calculer le produit M^tM.
3. Vérifier que chaque valeur de la diagonale de la matrice M^tM correspond au nombre de membres de la famille qui influencent le membre correspondant en ligne et colonne. Expliquer pourquoi c'est le cas.
4. Trouver une interprétation similaire pour les valeurs diagonales de MM^t.