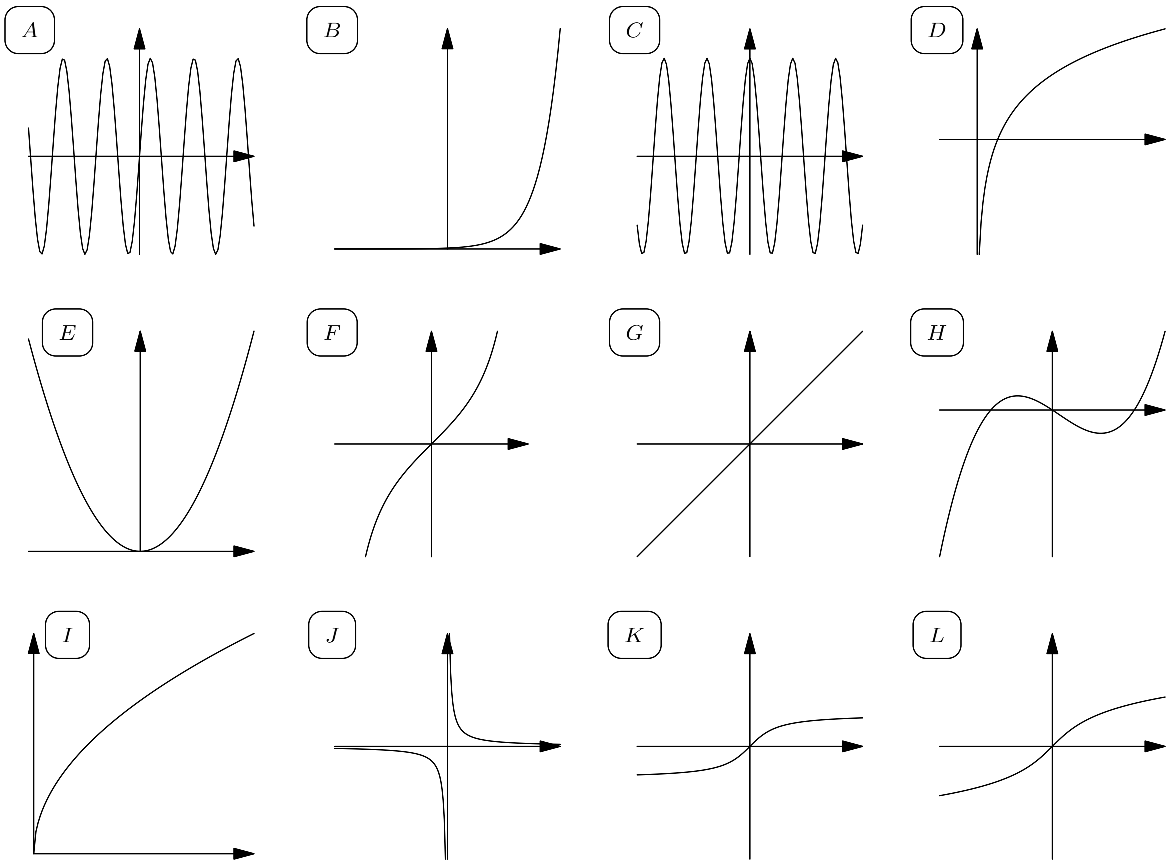
Retour vers le passé

Graphes, courbes et surfaces

Exercice 1 (Fonctions usuelles)**.** Newton[1] vient de recevoir un courrier de Leibniz[2] contenant les représentations graphiques des fonctions cos, sin, tan, exp, arctan, argsh, ln, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (x^3 - x^2 - 12x)$. Leibniz ayant oublié de préciser les légendes sur ses dessins, aidez Newton à retrouver quel graphe correspond à quelle fonction.



Exercice 2. Représenter graphiquement :

(a) $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1, 1]$,	(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ tels que $x^2 + y^2 = 1\}$,
(c) $\tau \mapsto (\cos(\tau), \sin(\tau))$, $\tau \in [0, \pi]$,	(d) $\rho(\theta) = 1$, $\theta \in [0, \pi]$, (ρ, θ) coordonnées polaires.

Que remarquez-vous ?

Exercice 3. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}_f$ la surface définie par l'équation $z = f(x, y)$.

1) Soit $\mathcal{C}_0$ (resp. $\mathcal{C}_1$) la courbe obtenue en effectuant l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $x = 0$ (resp. $y = 0$). Effectuer les représentations graphiques de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

1. Isaac Newton (1643–1727) philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.
2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 –1716) philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste et bibliothécaire allemand.

2) Soit $\mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_3$) la courbe obtenue en effectuant l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $z = 1$ (resp. $z = 2$). Effectuer la représentation graphique de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
3) En déduire la représentation en 3D de la surface $\mathcal{S}_f$.

Équations différentielles

Exercice 4 (Loi du refroidissement de Newton)**.** Si on désigne par T la température en fonction du temps d'un corps ou d'un liquide dans un environnement à température ambiante constante T_A, les variations de T sont décrites par l'équation différentielle

$$T' = -r(T - T_A), \tag{E}$$

où r est une constante positive dépendant des conditions de l'expérience.

1. Soit T_0 une température initiale. Déterminer la solution de (E) telle que $T(0) = T_0$.
2. Max vient de se servir un café brulant (100°C) en salle des profs. La température ambiante de la salle est de 20°C. Après 4 minutes, la température du café de Max est encore de 73°C.
   a. Déterminer la loi que suit la température du café de Max.
   b. Sachant que la température au-delà de laquelle Max se brûlera en buvant son café est 60°C et qu'il s'est servi 10 minutes avant d'aller en cours, pensez-vous que
   ☐ Max devra abandonner son café trop chaud en salle des profs pour aller en cours ?
   ☐ Max aura bu son café avant d'aller en cours ?

Exercice 5.
On veut modéliser le mouvement d'une masse M accrochée à un ressort et contrainte à se déplacer dans une seule direction. On appelle y la fonction qui décrit la position de la masse par rapport à l'origine. Lorsque la masse est mise en mouvement, trois types de force peuvent s'exercer sur elle : la force de rappel F_R du ressort, la force d'amortissement F_A (ou de frottement), et une force extérieure F_E (la gravité par exemple).

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, la force de rappel est donnée par la loi de Hooke

$$F_R = -Ky,$$

où K est la constante de raideur du ressort. La force F_A varie selon le type d'amortissement. Si par exemple le ressort et la masse sont plongées dans un milieu fortement visqueux, F_A est donnée par un coefficient d'amortissement B et la relation

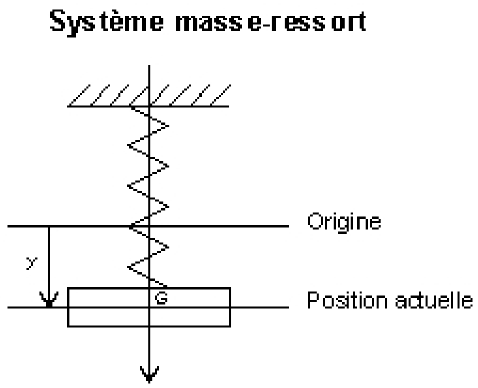


FIGURE 1 – source : wikipedia

$$F_A = -By'.$$

Enfin n'importe quel type de force extérieure peut-être considéré.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton), donner l'expression de y'' en fonction de M, F_R, F_A et F_E.
2. En remplaçant (quand c'est possible) chaque force par son expression en fonction de y ou y', écrire l'équation différentielle vérifiée par y.
3. On suppose désormais qu'aucune force extérieure ne s'exerce sur le système. Décrire le mouvement de la masse (i.e. trouver y) dans chacun des cas suivants
   a. $M = 1$, $B = 3$, $K = 2$,
   b. $M = 1$, $B = 2$, $K = 1$,
   c. $M = 1$, $B = 0$, $K = 1$.