Groupes ABCDEFGH
Année universitaire 2012/2013
Unité d'enseignement UE1
Mardi 10 décembre 2012
Semestre S3

Mathématiques

durée : 2h

Documents, tout type de calculatrices (y compris "Collège") et téléphones portables interdits. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours, 3 points)**.**

1) Dans un espace vectoriel E, on considère une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ qui vérifie la propriété suivante :

   Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$.

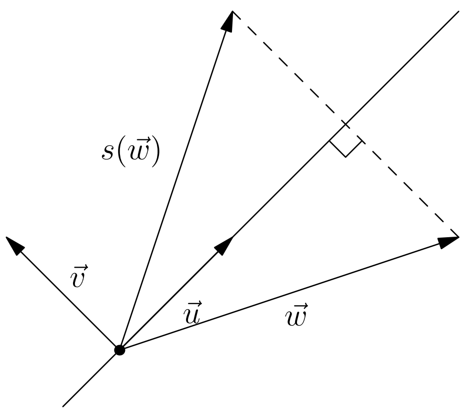
   Que peut-on dire de la famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$?
2) Rappeler la définition d'une application linéaire.
3) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.

Exercice 2 (Déterminants, 4 points)**.** Calculer la valeur des déterminants suivants. Pour le (c), on donnera si possible le déterminant *sous forme factorisée.*

$$(a)\quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (c)\quad \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

Exercice 3 (Symétrie, 7 points)**.** On se place dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs $\vec{u} = \binom{1}{1}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{1}$. Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale d'axe dirigé par $\vec{u}$ et passant par l'origine.

1) Montrer que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2) Écrire la matrice Δ de s dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
3) Soient $\vec{\imath} = \binom{1}{0}$ et $\vec{\jmath} = \binom{0}{1}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de changement de base P de la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ vers la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
4) Calculer P^{-1}.
5) Sans effectuer le calcul, exprimer la matrice M de s dans la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ en fonction de Δ, P et P^{-1}.
6) Calculer les images de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ par s.
7) Exprimer la matrice M de s dans la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.



Exercice 4 (Systèmes, 6 points)**.** On considère le système

$$\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x+y+3z=1, \\ x+2y+2z=0. \end{cases} \tag{S}$$

1) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer deux matrices A et B telles que le système (S) s'écrive sous forme matricielle $AX = B$.
2) Montrer que la matrice A est inversible.
3) Calculer l'inverse de A.
4) En déduire la solution du système (S).
5) Un gorille, un chimpanzé et un orang-outan se mesurent dans une épreuve de triathlon qui comporte une épreuve de nage de longueur x, une course en vélo de longueur y et une course à pattes sur une distance z. Les trois singes nagent à la même vitesse de 1 km/h ; le gorille et l'orang-outan font du $\frac{1}{2}$ km/h à vélo tandis que le chimpanzé roule à 1 km/h ; en course le gorille et le chimpanzé atteignent une vitesse de $\frac{1}{3}$ km/h alors que l'orang-outan est un peu plus rapide, à $\frac{1}{2}$ km/h. Le gorille effectue le parcours complet en 6h contre 5h pour le chimpanzé et l'orang outan.
   a) Écrire le sytème vérifié par les distances x, y et z.
   b) En déduire les valeurs de x, y et z.