Intégration
Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions de plusieurs variables

1.1 Dérivées partielles, surfaces

Exercice 1.1. 1. Pour la fonction f donnée par $f(x,y) = x^2y^2 + \sin(2xy)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

> **Solution:** On a
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2y\cos(2xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 2x\cos(2xy).$$

2. Pour la fonction u donnée par $u(x,y,z) = x^4y^3z^5$, calculer $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$.

> **Solution:** La notation signifie qu'on dérive en tout six fois, en commencant par dériver deux fois par rapport à z, puis une fois par rapport à y et enfin trois fois par rapport à x. On obtient
> $$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= 5x^4y^3z^4 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 20x^4y^3z^3 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} &= 60x^4y^2z^3 \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2} &= 240x^3y^2z^3 \\ \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} &= 720x^2y^2z^3 \\ \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y \partial z^2} &= 1440xy^2z^3 \end{aligned}$$

3. Vérifier que la fonction g définie par

$$g(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 - y^4$$

satisfait l'équation

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Solution: On calcule les dérivées partielles de la fonction g en prenant garde au fait que lorsqu'on dérive par rapport à x, le terme en y^4 disparaît :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y + 8xy^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^3 + 8x^2y - 4y^3.$$

Il est alors facile de vérifier que l'équation

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4g(x,y)$$

est satisfaite.

Exercice 1.2. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Solution: Il suffit de calculer les dérivées secondes de h par rapport à x et y. On constate que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2}(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2e^{x^2-y^2}(x\sin(2xy) - y\cos(2xy)),$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \quad 2e^{x^2-y^2}((2x^2-2y^2+1)\cos(2xy) - 4xy\sin(2xy)),\\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= -2e^{x^2-y^2}((2x^2-2y^2+1)\cos(2xy) - 4xy\sin(2xy)).\end{aligned}$$

On constate bien l'égalité voulue.

Exercice 1.3. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y,z) = g(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Solution: On utilise ici la règle dite *de la chaîne* pour la dérivation des fonctions composées. Si on note

$$a = x-y, \quad b = y-z, \quad c = z-x,$$

alors la dérivée de f par rapport à x peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial c}.$$

On voit alors que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial c}.$$
De la même manière, on trouve que
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial c}.$$
En combinant les identités précédentes, on trouve bien l'égalité voulue.

Exercice 1.4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = x^2 + \cos(y).$$
On note $\mathcal{S}$ la surface représentative de f.

1. Déterminer l'équation de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'ensemble $P_1 \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation
$$x = 0.$$
   (a) Décrire P_1 en terme géométrique (i.e. dire s'il s'agit d'une droite, d'un cercle, etc.).
   (b) Effectuer une représentation graphique de P_1.
3. On considère l'ensemble $P_2 \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation
$$z = -\frac{1}{2}.$$
   (a) Décrire P_2 en terme géométrique (i.e. dire s'il s'agit d'une droite, d'un cercle, etc.).
   (b) Effectuer une représentation graphique de P_2.
4. Décrire en terme géométrique l'intersection $D = P_1 \cap P_2$.
5. Décrire analytiquement l'ensemble $I = D \cap \mathcal{S}$ (i.e. donner les valeurs des points (x, y, z) de I).
6. Calculer le gradient de f en chacun des points de I.
7. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun des points de I.

Exercice 1.5. Soit S la surface déterminée par l'équation
$$2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

1. Montrer que le point $(1, 1, 1)$ appartient bien à la surface S.

Solution: La surface S est déterminée implicitement par l'équation
$$g(x, y, z) = 0,$$
où la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par
$$g(x, y, z) = 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 5.$$
Le point $(1, 1, 1)$ vérifie
$$g(1, 1, 1) = 5,$$
il appartient donc bien à la surface S.

2. Déterminer l'équation du plan tangent à S en $(1, 1, 1)$.

Solution: On sait que l'équation du plan tangent en un point (x_0, y_0, z_0) est donnée par la formule

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Les dérivées partielles de g sont

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2yz + 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2xz + 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + 2z.$$

Au point $(1, 1, 1)$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 4.$$

Par conséquent, l'équation du plan tangent à S en $(1, 1, 1)$ est donnée par l'équation

$$4(x - 1) + 4(y - 1) + 4(z - 1) = 0,$$

ce qui devient après simplification

$$x + y + z - 3 = 0.$$

2 TD 2

Exercice 2.1. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées premières et secondes, puis appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au point (x_0, y_0) donné.

1. $f(x, y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Solution: Les dérivées premières sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x\sin(xy).$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 - 3y^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3x^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3\sin(xy) - 3xy\cos(xy).$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 en (x_0, y_0) est donnée par

$$f(x, y) = 3 + 2x^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y),$$

avec $\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon(x, y) = 0$.

2. $g(x, y) = e^{xy} + (x + y)^3$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Solution: Les dérivées premières sont données par

$$\frac{\partial g}{\partial x} = ye^{xy} + 3(x+y)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{xy} + 3(x+y)^2.$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = e^{xy}(1+xy) + 6(x+y).$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 en (x_0, y_0) est donnée par

$$g(1+x, y) = 2 + 3x + 4y + 3x^2 + 7xy + \frac{7}{2}y^2 + (x^2+y^2)\varepsilon(x,y),$$

avec $\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon(x,y) = 0$.

3. $h(x,y) = \arctan(x^2+y)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Solution: Les dérivées premières sont données par

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2x}{1+(x^2+y)^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{1+(x^2+y)^2}.$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{-6x^4 - 4x^2y + 2y^2 + 2}{(1+(x^2+y)^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{-2(x^2+y)}{(1+(x^2+y)^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{-4x(x^2+y)}{(1+(x^2+y)^2)^2}.$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 en (x_0, y_0) est donnée par

$$h(x,y) = y + x^2 + (x^2+y^2)\varepsilon(x,y),$$

avec $\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon(x,y) = 0$.

Exercice 2.2. Soit g la fonction définie par

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1.$$

1. Déterminer la position des extrema locaux de g.

Solution: Rappelons qu'un point (x_0, y_0) est un extremum local de g si

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Cherchons tout d'abord les points critiques de g. Les dérivées premières de g sont données par

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x + 2y - 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x + 2y.$$

Par conséquent, (x,y) est un point critique si et seulement si il vérifie le système suivant

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

De la seconde équation, on conclue que

$$x = -y,$$

puis, en substituant dans la première, que

$$x = 1, \quad y = -1.$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique pour g, le point $(1, -1)$. Vérifions qu'il s'agit d'un extremum. On calcule les dérivées secondes de g. En tout point, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2.$$

Ainsi, en $(x, y) = (1, -1)$ on a bien

$$4 = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 8,$$

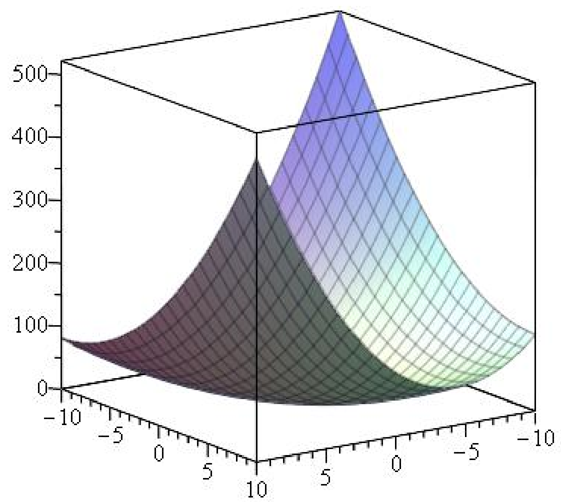
et $(1, -1)$ est bien un extremum local.

2. Préciser leur nature.

Solution: La nature de l'extremum est déterminé par le signe de $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, qui dans le cas présent est positif. Le point $(1, -1)$ est donc un minimum local.

3. En déduire un dessin approximatif de la surface.

Solution: Une représentation informatique donne la figure suivante.



Exercice 2.3. Soit S la surface représentative de la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy.$$

1. Déterminer les points critiques de f (indications : il y en a 3).

Solution: Les points critiques de f sont les valeurs où le gradient de f s'annule. On calcule les dérivées premières de f et on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4y^3 - 4x.$$

Donc les points critiques de f sont les solutions de

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0, \\ 4y^3 - 4x = 0. \end{cases}$$

On peut résoudre ce système en procédant par substitution : la première équation donne

$$y = 4x^3.$$

En remplacant par dans la seconde équation on trouve

$$x^9 - x = 0.$$

Les solutions de cette équation sont

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1,$$

donc les points critiques de f sont les points de coordonnées

$$(-1, -1), \quad (0, 0), \quad (1, 1).$$

2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Solution: On commence par calculer la Hessienne de f. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4.$$

Donc dans les points critiques, la Hessienne $H(f)$ est donnée par

$$H(f)(-1,-1) = H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la Hessienne est

$$\det(H(f)(-1,-1)) = \det(H(f)(1,1)) = 128 > 0, \quad \det(H(f)(0,0)) = -16 < 0.$$

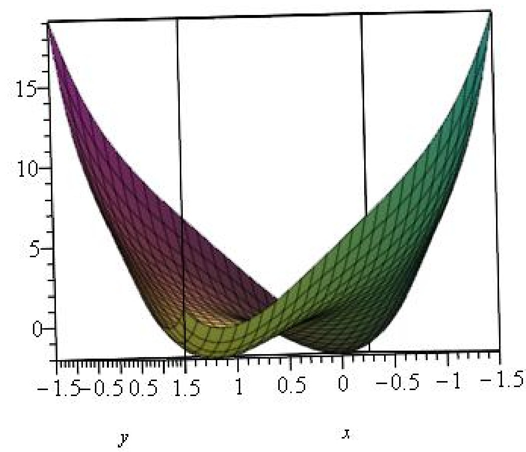
Donc $(0,0)$ est un point selle et $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont des extremums. Comme par ailleurs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0,$$

les points $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont tous deux des minimums.

3. En déduire un dessin approximatif de la surface.

Solution: Une représentation informatique donne la figure suivante.



Exercice 2.4 (Méthodes des moindres carrés)**.** On considère trois points du plan $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ et une droite d'équation $y = ax + b$.

1. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 ont les coordonnées données dans le tableau suivant

i	x_i	y_i
1	0	2
2	1	4
3	2	1

et que la droite a pour équation $y = x + 1$. Représenter M_1, M_2 et M_3 sur un dessin. Calculer pour chaque point la valeur de

$$y_i - (ax_i + b).$$

Préciser sur le dessin ce que représente cette valeur.

Solution:

2.1 Calcul d'incertitude, intégrales doubles et triples

Exercice 2.5. On rappelle que la période des oscillations d'un pendule simple de longueur l est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

où g désigne la constante gravitationnelle.

1. On suppose dans cette question que la valeur de π de notre calculatrice est exacte. Calculer l'incertitude sur la période du pendule lorsqu'on considère $l = 1\,m$ à 10^{-3} près et $g = 9,81\,m/s^2$ à 10^{-2} près.

Solution: On considère T comme une fonction des deux variables l et g. D'après le cours, l'incertitude sur T sachant que l'incertitude sur g est de δg et l'incertitude sur l est de δl est donnée par la formule

$$\delta T = \left|\frac{\partial T}{\partial g}(g, l)\right|\delta g + \left|\frac{\partial T}{\partial l}(g, l)\right|\delta l.$$

Les dérivées partielles premières de T sont données par

$$\frac{\partial T}{\partial g}(g, l) = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \frac{\partial T}{\partial l}(g, l) = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}.$$

On a donc les valeurs numériques suivantes (en supposant que la valeur de π donnée par notre calculatrice est exacte)

$$\frac{\partial T}{\partial g}(9.81, 1) = -0.1022460082, \quad \frac{\partial T}{\partial l}(9.81, 1) = 1.003033340,$$

et donc pour T et δT on trouve

$$T(9.81, 1) = 2.006066680\, s, \quad \delta T = 0.2025493422.10^{-2}.$$

2. On suppose maintenant que la valeur exacte de π n'est pas connue et que $\pi = 3.141$ à 10^{-3} près. Calculer l'incertitude sur la période du pendule en reprenant les mêmes valeurs que précédement.

Solution: On considère maintenant T comme une fonction des trois variables l, g et π. D'après le cours, l'incertitude sur T sachant que l'incertitude sur g est de δg, celle sur l de δl et celle sur π de $\delta\pi$ est donnée par la formule

$$\delta T = \left|\frac{\partial T}{\partial g}(g, l, \pi)\right|\delta g + \left|\frac{\partial T}{\partial l}(g, l, \pi)\right|\delta l + \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}(g, l, \pi)\right|\delta\pi.$$

Les dérivées partielles premières de T sont données par

$$\frac{\partial T}{\partial g}(g, l, \pi) = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \frac{\partial T}{\partial l}(g, l, \pi) = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \pi}(g, l, \pi) = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On a donc les valeurs numériques suivantes

$$\frac{\partial T}{\partial g}(9.81, 1, 3.141) = -0.1022267197, \quad \frac{\partial T}{\partial l}(9.81, 1, 3.141) = 1.002844121,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \pi}(9.81, 1, 3.141) = 0.6385508568,$$

et donc pour T et δT on trouve

$$T(9.81, 1) = 2.005688242\, s, \quad \delta T = 0.2663662175.10^{-2}.$$