TP : Équations différentielles

1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler[1] permet d'obtenir une solution approchée de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Ici, f désigne une fonction de deux variables à valeurs réelles, c'est à dire

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto f(x,y). \end{aligned}$$

Par exemple, si l'équation est $y' = x\cos(y)$, alors $f(x,y) = x\cos(y)$. On suppose qu'on recherche la solution y de (1) pour $x > x_0$. On fixe un pas d'itération h (bien sûr plus h est petit et meilleure est l'approximation) et on définit $x_1 = x_0 + h$ et plus généralement

$$x_i = x_0 + ih.$$

Les valeurs approchées y_j de $y(x_j)$ sont définies itérativement en posant

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j). \tag{2}$$

Il est à noter que y_0 est connue et donnée exactement par (1).

Remarque 1. *La justification de la formule* (2) *de la méthode d'Euler peut se faire de la façon suivante. On commence par intégrer l'équation* (1) *entre* x_i *et* x_{i+1}*:*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx.$$

Le membre de gauche s'intègre explicitement:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = y(x_{i+1}) - y(x_i).$$

Pour intégrer le membre de droite, on utilise une méthode de rectangle à gauche à un pas:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \simeq (x_{i+1} - x_i)f(x_i, y(x_i)).$$

En remplacant $y(x_i)$ *par* y_i, $y(x_{i+1})$ *par* y_{i+1} *et* $(x_{i+1} - x_i)$ *par* h, *on retrouve bien la formule* (2).

Exercice 1. On se propose de calculer numériquement la solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = 2y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

1. Rappeler la solution théorique de (3).

2. Construire 30 itérations de la suite (y_j) définie à l'aide de la méthode d'Euler avec pour un pas $h = 0,1$. Comparer les valeurs correspondantes à la solution exacte (obtenue dans la question précédente) et les valeurs calculées à l'aide de la fonction préprogrammée de votre tableur (*Indication:* utiliser la commande `EXP`).

[1] Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

3. Représenter graphiquement la suite (y_j) et la solution théorique.

Exercice 2. Résoudre numériquement l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = xy^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Utiliser la méthode d'Euler pour $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,01$ et représenter graphiquement la solution approchée ainsi calculée jusqu'à $x = 1$.

2 Évaluation de l'erreur

On se donne un point final x_f. Si on fixe un nombre d'itération n, alors x_f sera obtenu après n itérations si h est choisi $h = (x_f - x_0)/n$.
Pour évaluer l'erreur commise en utilisant la méthode d'Euler sur l'intervalle $[x_0, x_f]$, on peut comparer la valeur théorique $y(x_f)$ au point avec la valeur y_n (obtenue après n itérations de la méthode). Notons

$$\mathrm{err}(n) = |y(x_f) - y_n|.$$

S'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{err}(n) \leq Cn^{-k},$$

on dit que la méthode est *d'ordre* (au moins) k.

Exercice 3. Le but est d'évaluer l'ordre de la méthode d'Euler en se basant sur l'exercice 1

1. Reprendre les calculs de l'exercice 1 avec $x_0 = 0$, $x_f = 1$, $n = 10, 20, 40, 200$.
2. Représenter graphiquement en abscisse $\ln(n)$ et en ordonnée $\ln(\mathrm{err}(n))$. Trouver par une méthode au choix la pente de la droite de de régression linéaire obtenue et en déduire l'ordre de la méthode d'Euler.