S1 TD

Table des matières

1 Calcul vectoriel 1

2 Dérivation 3

3 Fonctions réciproques 6

4 Polynômes 8

5 Accroissements finis. Formule de Taylor. Développements limités 9

6 Probabilités 12

1 Calcul vectoriel

Exercice 1.1. Soient les points $A(3,-3,0), B(-1,4,4), C(7,0,5)$ dans le repère orthonormé habituel. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 1.2. Déterminer les produits scalaires et vectoriels des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ci-dessous.

1. $\vec{X} = (2,1,0)$, $\vec{Y} = (0,-1,1)$
2. $\vec{X} = (2,3,2)$, $\vec{Y} = (-2,1,3)$
3. $\vec{X} = (1,-2,4)$, $\vec{Y} = (2,-4,8)$

Exercice 1.3. Soient les points $A(2,-2,-3), B(-5,-3,-2), C(-5,0,-8)$ dans le repère orthonormé habituel. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Même question pour $A(-1,2,2), B(2,6,-3), C(5,5,8)$.

Exercice 1.4. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, placer les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$.

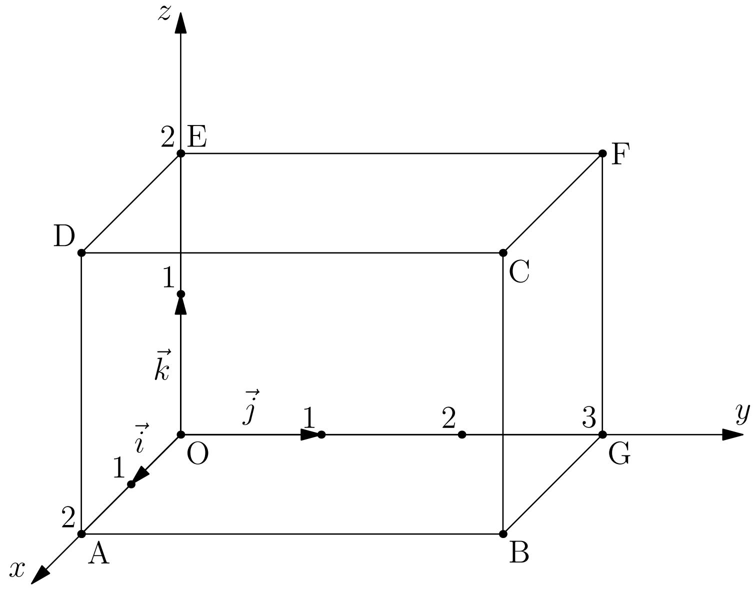
Tracer la droite d d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u_d}$ de d.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sur d.

Exercice 1.5. Soit un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans ce repère, on considère un parallélépipède rectangle $OABGFEDC$. Soit I le milieu du segment $[FG]$ et J le point tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

1. Placer les points I et J sur la figure.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, O, I, J.
3. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
4. Déterminer les composantes du vecteur directeur unitaire de la droite (AI) orienté de A vers I.

5. Calculer la projection de $\overrightarrow{BC}$ sur (AI).
6. Calculer $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{BJ}$.



Exercices facultatifs

Exercice 1.6. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $O\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ de la droite d.
2. Caractériser l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la droite d à l'aide du produit scalaire.
3. En déduire l'équation cartésienne de la droite d.

Exercice 1.7. Déterminer les produits scalaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec

1. $AB = 5$, $AC = 9$, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 1/3$,
2. $AB = 7$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = \pi/3$.

Exercice 1.8. Soient les droites d_1 et d_2 d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. Donner pour chacune un vecteur directeur et en déduire que ces droites sont orthogonales.

Exercice 1.9. Déterminer un vecteur normal aux plans d'équations $x - 2y - z = 0$ et $2x + 3y - 4z = 0$. En déduire leur position relative.

Exercice 1.10. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Exercice 1.11. Soient u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\langle u, v\rangle$ leur produit scalaire.

1. Montrer que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$. En déduire l'identité $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
2. Montrer que les vecteurs $x = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$ et $y = u - x$ sont orthogonaux.
3. En appliquant le théorème de Pythagore aux vecteurs x et y, montrer que $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \|v\|$.

2 Dérivation

2.1 Tables

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\begin{cases} 1+\tan^2(x) \\ \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$v' \cdot u' \circ v$

$f(x)$	$f'(x)$
u^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$

2.2 Tables

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\begin{cases} 1+\tan^2(x) \\ \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$v' \cdot u' \circ v$

$f(x)$	$f'(x)$
u^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

2.3 Exercices

Exercice 2.1. Soit f la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Calculer la dérivée de f au point $x_0 \neq 0$ en utilisant la définition de la dérivée. Calculer ensuite la dérivée de f en utilisant les formules standard.

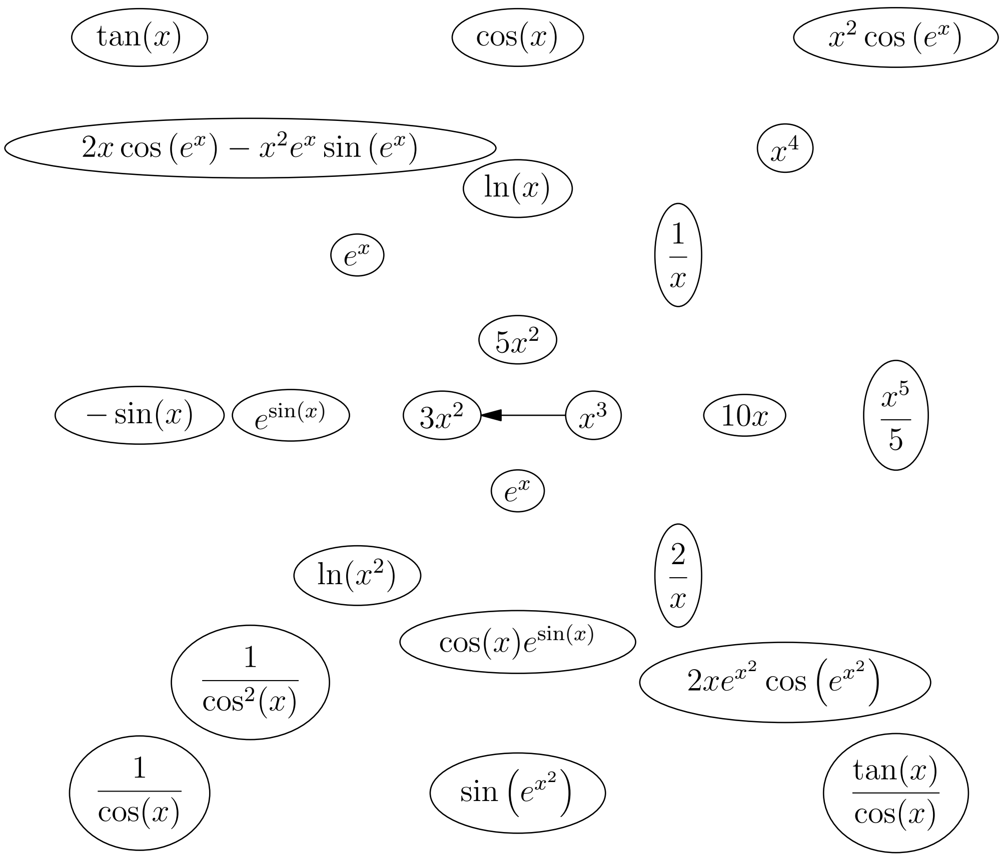
Exercice 2.2. Déterminer les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}, \quad (b)\ \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}, \quad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \quad (d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}, \quad (e)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}.$$

Exercice 2.3. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes (σ est une constante, p et q sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, x et t sont des variables dans $\mathbb{R}$ sauf mention du contraire) :

$$\begin{array}{lllll}
a(x) = 3x + \sin(x), & b(x) = e^x \cos(x), & c(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} \text{ avec } x > 1, & d(x) = \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+2}} \text{ avec } x > -2, & e(x) = e \\
f(x) = (1-2x)^2, & g(x) = \left(2-x^3\right)^3, & h(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \text{ avec } x > 1, & i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{\sigma}}, & \\
j(x) = (\sin(2x))^3, & k(x) = p\left(x^2\right), & l(x) = e^{q\left(x^3\right)}, & m(x) = \cos\left(p\left(\sin(x)\right)\right). &
\end{array}$$

Exercice 2.4 (Derivative cloud)**.** Dans la figure ci-dessous, on a mélangé des fonctions et leurs dérivées. Comme sur l'exemple au centre, reconstituer les correspondances en reliant chaque fonction avec sa dérivée avec une flèche dont le début est sur la case de la fonction et la pointe sur la case de la dérivée.



Exercice 2.5. Soit h la fonction définie par $h(t) = e^{-t}(A\cos(t) + B\sin(t))$ où A et B sont des constantes. Montrer que h vérifie la relation - dite *équation différentielle* - suivante

$$h''(t) + 2h'(t) + 2h(t) = 0.$$

Exercice 2.6. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

- $f_1(x) = x^2 + x - 3$, $a = -1$
- $f_2(x) = \cos(x)\sin(x)$, $a = \pi$
- $f_3(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+1}$, $a = -1$

Exercices facultatifs

Exercice 2.7. Quelle est la dérivée de la fonction $x \to \cos(x)$? Quelle est la dérivée de la dérivée ? Et la dérivée de la dérivée de la dérivée. A partir des résultats précédents, proposer une formule générale pour le résultat de la dérivée $n^{ième}$ (c'est à dire la dérivée de la dérivée de la ... de la dérivée - on répète n fois) de la fonction cosinus.

Exercice 2.8. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Représenter la fonction f.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ puis pour $x < 0$.
4. Calculer les nombres dérivés de f en 0 à droite et à gauche $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui que vaut $f'(0)$?

5. La fonction f' est elle continue en 0 ?
6. Représenter la fonction f'.
7. Calculer la dérivée de f' pour $x < 0$ et $x > 0$, notée f"
8. Calculer les nombres dérivés de f' en 0 à droite et à gauche. La fonction f' est elle dérivable en 0 ?

Exercice 2.9. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$f_1(x) = \ln\left(\ln(x)\right), x > 1$
$f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x > 0$
$f_3(x) = \exp(\sin^2(x))$
$f_4(x) = \frac{x^3+2}{(x^2-5)^3}$
$f_5(x) = \frac{\exp(1/x)-1}{\exp(1/x)+1}$

3 Fonctions réciproques

Exercice 3.1. Pour les deux applications f suivantes, montrer que f est bijective de l'intervalle I sur son image que l'on déterminera. Calculer ensuite f^{-1}.

(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3, \qquad I = \mathbb{R}^+.$ (2) $f(x) = x^2 - 2x - 1, \qquad I \in [1, \infty[.$

Exercice 3.2 (Réciproque du logarithme)**.** La fonction ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et admet donc une réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de cette réciproque.

1. Étudier les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.
2. Calculer $f^{-1}(0)$.
3. Soient a et b deux réels. Exprimer $f^{-1}(a+b)$ et $f^{-1}(a-b)$ en fonction de $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$.
4. Calculer la dérivée de f^{-1}. Que remarquez-vous ?
5. Effectuer la représentation graphique de ln puis celle de f^{-1}.
6. Quelle est la fonction f^{-1} ?

Exercice 3.3. Rappeler pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. En déduire les valeurs suivantes

$$\ln(e), \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right), \qquad \ln\left(\sqrt{e}\right), \qquad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice 3.4. Déterminer, lorsque c'est possible, les valeurs suivantes.

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right),\ \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right),\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \arccos\left(\cos\left(\frac{27\pi}{2}\right)\right),\ \arcsin(\cos(35\pi)),\ \sin(14\pi).$$

Exercice 3.5. *Relations remarquables entre les fonctions trigonométriques réciproques.*

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ est constante sur son domaine de définition. Quelle est la valeur de cette constante ?
2. Montrer que pour tout $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Qu'en est-il pour $x > 0$?

Exercice 3.6. Le tableau suivant a été mélangé. Le corriger en faisant correspondre à chaque élément de la ligne supérieure sa dérivée sur la ligne inférieure. Dans chaque cas, on considère $-1 < x < 1$.

$f(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{2x}{1+x^2}$

Exercice 3.7. L'objectif de cet exercice est de réaliser l'étude de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

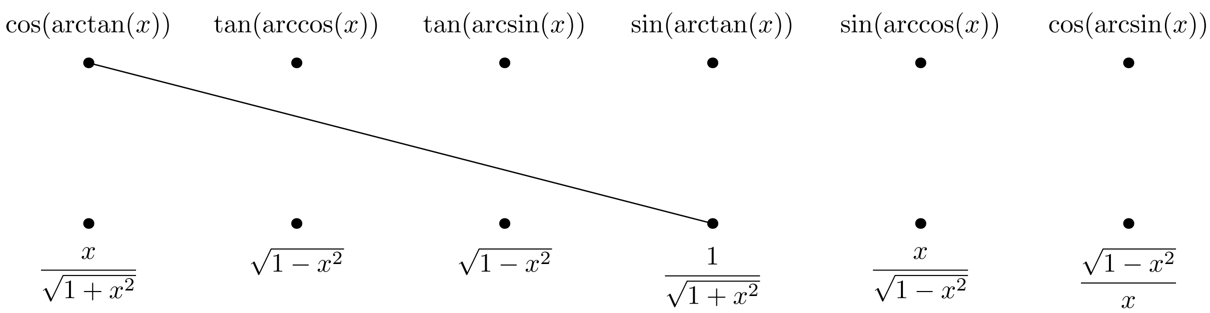
1. Donner les domaines de définition et d'arrivée de la fonction $\arctan(x)$.
2. Montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Puis, en utilisant le fait que $\tan(\arctan(x)) = x$, démontrer que
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. Déterminer le tableau de variation de la fonction $\arctan(x)$ puis son graphe.

Exercice 3.8. Simplifier :

1. $\sin(2\arcsin(x))$;
2. $\cos(2\arcsin(x))$;
3. $\sin(2\arccos(x))$;
4. $\cos(2\arccos(x))$.

Exercices facultatifs

Exercice 3.9. Soit $x \in]0,1[$. Dans la figure ci-dessous, relier les points supérieurs avec les points inférieurs de telle manière qu'il y ait égalité entre les étiquettes de points reliés par un même trait.



Exercice 3.10. *Equations trigonométriques.*

1. Donner les valeurs de $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$, de $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ et de $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.
2. Résoudre les équations $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $\cos(x) = \frac{1}{3}$.
3. Résoudre l'équation $2\cos^2(3x+1) - 3\cos(3x+1) + 1 = 0$.

Exercice 3.11. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\cos\left(\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\right)} + 6\pi\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}}$;
2. $g(x) = \arcsin(x) + \ln\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right)$.

Exercice 3.12. Simplifier :

1. $\sin(2\arcsin(x))$;
2. $\cos(2\arcsin(x))$;
3. $\sin(2\arccos(x))$;
4. $\cos(2\arccos(x))$.

Exercice 3.13. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, calculer sa dérivée f' en tout point de $\mathbb{R}$.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $x = 1$.
5. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}^*$?

4 Polynômes

Exercice 4.1. Soient les polynômes $P(x) = 15x^7 + x^4 + 2x^2 + x$ et $Q(x) = 3x^2 + 8x + 25$.

1. Quel est le degré de ces deux polynômes ?
2. Que vaut le polynôme P+Q ?
3. Que vaut le polynôme 2P ?

Exercice 4.2. Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans le cas suivants :

1. $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ et $B(x) = x^5 + 72$
2. $A(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7$ et $B(x) = x^2 + 2$
3. $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ et $B(x) = x + 1$
4. $A(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$ et $B(x) = (x + 1)^2$

Dans quel(s) cas B divise A ?

Exercice 4.3.

1. Soit le polynôme $P(x) = x^2 + x - 2$.
   (a) Montrer que 1 et -2 sont racines de P.
   (b) Factoriser P.
2. Soit le polynôme $Q(x) = 3x^2 - 9x + 6$.
   (a) Calculer $Q(1)$ et $Q(2)$.
   (b) Factoriser Q.

Exercice 4.4.

1. Soit le polynôme $P(x) = x^4 - x$.
   (a) Trouver deux *racines évidentes* de P.
   (b) Effectuer la division euclidienne de P par $x(x - 1)$.
   (c) En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de P.
2. Soit le polynôme $Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$.
   (a) Calculer $Q(2)$ et $Q(-1)$.

(b) Effectuer la division euclidienne de Q par $(x-2)(x+1)$.

(c) En déduire une factorisation de Q. Est-elle une décomposition en facteurs irréductibles ?

(d) Donner une décomposition en facteurs irréductibles de Q.

Exercice 4.5. 1. Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

(a) Calculer $P(1)$ et $P'(1)$. Que peut-on en déduire ?

(b) Effectuer la division euclidienne de P par $x^2 - 2x + 1$.

(c) En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de P.

2. Soit le polynôme $Q(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$.

(a) Calculer $Q(1)$, $Q'(1)$ et $Q(-2)$.

(b) Effectuer la division euclidienne de Q par $(x-1)^2(x+2)$.

(c) En déduire une factorisation de Q. Est-elle une décomposition en facteurs irréductibles ?

Exercices facultatifs

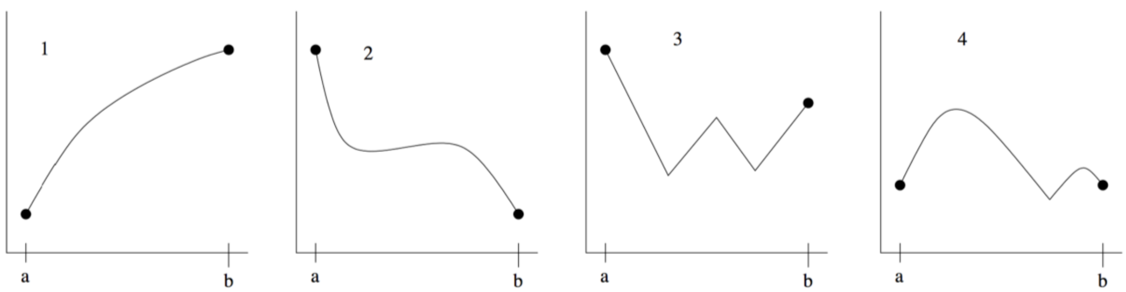
Exercice 4.6. Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X-1$ est 7 et par $X+5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4X - 5$?

Exercice 4.7. Soit P un polynôme et $P(X+1)$ le polynôme composé où l'on remplace X par $X+1$ dans P. Existe-t-il des polynômes de degré trois vérifiant $P(X) - P(X+1) = 1 - X^2$ et $P(0) = 1$? On pourra chercher à dériver la première relation.

Exercice 4.8. Soit a un réel non nul et le polynôme $P(X) = X^4 + a(X+a)(2X+a)(3X+a)$. Montrer que P est le carré d'un polynôme Q que l'on déterminera. Montrer que P a deux racines réelles doubles.

5 Accroissements finis. Formule de Taylor. Développements limités

Exercice 5.1. Les graphes suivants sont des graphes de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacun d'eux, déterminer s'ils vérifient les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a, b]$. Le cas échéant, représenter et interpréter graphiquement les valeurs $c \in [a, b]$ satisfaisant la conclusion du théorème des accroissements finis appliqué entre a et b.



Exercice 5.2. Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = f(c)$ $(a < b < c)$. La fonction f'' admet-elle un zéro strictement compris entre a et c ?

Exercice 5.3. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4. En déduire la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ quand x tend vers 0.

Exercice 5.4.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x^2}$.
2. Donner, à l'ordre 2, le développement limité en 0 de e^x et $\sin(x)$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $e^x \sin(x)$.
   Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 5.5. Calculer les développements limités suivants

1. $f_1(x) = 2\cos(x) + 2x^3 - x^2 + 1 - \sin(x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. $f_2(x) = \left(1 + x^2\right)\cos(2x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$ à l'ordre 6 en 0.

Exercice 5.6. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t^2} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t^3} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2} - 1 + x - \ln(1+x)}{e^x - \sqrt{1+2x}}.$$

Exercice 5.7. 1. Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction e^x.

2. En déduire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = e^x + e^{-x}$.
3. Déterminer la limite en 0 de $g(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} - 1$.

Exercices facultatifs

Exercice 5.8. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I (intervalle ouvert). Soient $x \in I$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in I$.On définit la fonction $G(t) = f(x + th) + f(x - th)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.
2. En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x + \theta h) - f'(x - \theta h).$$
3. En utilisant nouveau le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c \in]x - \theta h, x + \theta h[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 2\theta h f''(c).$$

Exercice 5.9. Écrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + \sin x)$ à l'ordre 3 ;
2. $\ln(1 + \cos x)$ à l'ordre 3 ;
3. $\sqrt{\cos x}$ à l'ordre 4 ;
4. $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2.

Exercice 5.10. Calculer les limites de $f(x)$ lorsque $x \to a$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$, avec $a = 0$;
2. $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$, avec $a = 0$;
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 - x^2}{x^3}$, avec $a = 0$;
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$, avec $a = 0$;
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\sin x - x + x^2}{x^4}$, avec $a = 0$;
6. $f(x) = \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x - 1)\sin x}$, avec $a = 0$;
7. $f(x) = x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right)$, avec $a = +\infty$.

5.1 Previously commented

Exercice 5.11. On considre une fonction f dfinie sur $\mathbb{R}$ et drivable jusqu' l'ordre 3. De cette fonction, on ne connat que les informations suivantes :

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 2, \qquad f''(0) = \frac{1}{2}, \qquad \left|f'''(x)\right| \leq \frac{1}{10} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Écrire la formule de Taylor-Young pour f en 0 l'ordre 2. En dduire une valeur approche de $f(\frac{1}{4})$.
2. On pose $P(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{4}$. On cherche estimer l'erreur absolue commise si on approxime $f(x)$ par $P(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'erreur $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$ vrifie
   $$\left[|\varepsilon(x)| \leq \frac{x^3}{60}.\right]$$
   (b) En dduire un encadrement de $f(\frac{1}{4})$.
   (c) Dterminer A tel que l'erreur soit infrieure $\dfrac{1}{100}$ si $x \in [0, A]$.

Exercice 5.12. Un projectile est tir depuis une origine avec une vitesse intiale$v = 1$ et un angle de $\frac{\pi}{4}$. *Pour les besoins de l'exercice, on va supposer que la force de gravit est uniforme et que* $g = 1$.

1. Lorsque le frottement de l'air est nglig, la trajectoire du projectile est le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + x$. Quel est la position du point d'impact ? Dessiner l'allure de la trajectoire.
2. Lorsque que l'on suppose l'existence d'un frottement de l'air fluide avec ici un coefficient de frottement k, la trajectoire du projectile est le graphe de la fonction $h(x) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k}\right)x + \frac{1}{k^2}\ln\left(1 - \sqrt{2}kx\right)$. Dessiner l'allure de la trajectoire. Donner le dveloppement de Taylor de h l'ordre 2 en 0. Que remarquez-vous ?

3. Donner ensuite le dveloppement de Taylor de h l'ordre 3 et montrer que dans cette approximation de la trajectoire le point d'impact est

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{3}\sqrt{2}k} - 1}{k} \quad (*)\,.$$

4. Dterminer la limite de la position du point d'impact lorsque k tend vers 0. Que pensez-vous de la remarque suivante :
   Pour dterminer une approximation du point d'impact lorsque que le coefficient de frottement est trs faible, on peut se contenter de considrer le dveloppement de Taylor en 0 *l'ordre* 2 *de la trajectoire.*
   En utilisant la formule $(*)$, vrifier que pour $k = 1$, l'approximation l'ordre 2 commet une erreur relative de l'ordre de 40% par rapport l'approximation l'ordre 3.

6 Probabilités

Exercice 6.1.

1. Combien d'équipes différentes de rugby à 15 peut-on constituer avec les 22 joueurs d'une équipe de football américain sans tenir compte de la place des joueurs ?
2. Combien d'équipes de jeu à 13 peut on constituer avec les 15 joueurs d'une équipe de rugby en tenant compte de la place des joueurs ?

Exercice 6.2. On lance deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les probabilités d'obtenir l'une des six faces pour chacun des dés sont égales. On appelle S la somme des chiffres marqués sur les faces supérieures des dés.
- Si $S = 2$ ou 3, on marque 20 points.
- Si $3 < S \leq 5$, on marque 10 points.
- Si $5 < S < 10$, on marque 5 points.
- Si $10 \leq S \leq 12$, on marque 1 point.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de points marqués.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

Exercice 6.3. On dispose d'un lot de pièces métalliques destinées à un assemblage. Parmi ces pièces,
- 2% ont une longueur et une largeur qui les rend inutilisables
- 3% sont inutilisables seulement à cause de leur longueur
- 5% sont inutilisables seulement à cause de leur largeur.

On choisit une pièce au hasard.

1. On note A l'évènement "la pièce a une largeur anormale", B l'évènement "la pièce a une longueur anormale". Ces évènements sont ils indépendants ?
2. Si la pièce a une largeur anormale, quelle est la probabilité que sa longueur soit aussi anormale ?

Exercice 6.4. On dispose d'un lot de 32 ampoules dont 8 sont défectueuses. On choisit une ampoule au hasard que l'on teste.

1. Quelle est la probabilité que l'ampoule fonctionne ?

2. On effectue 8 fois cette opération en replacant à chaque fois l'ampoule dans le lot. On note X le nombre d'ampoules qui fonctionnent. Quelle est la loi de X ?
3. En moyenne, quel est le nombre d'ampoules en état de marche parmi celles testées ?
4. Quelle est la probabilité d'en prendre 3 défectueuses ?
5. Quelle est la probabilité d'en prendre entre 2 et 4 qui fonctionnent ?

Exercice 6.5. La durée de vie d'un article peut être représentée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne m = 10000 h et d'écart type $\sigma = 100$ h.

1. Quel pourcentage de ces articles dureront plus de 10150 h ?
2. Quel pourcentage de ces articles dureront moins de 9800 h ?
3. On veut garantir une durée de vie minimale de facon à ce que les retours sous garantie n'éxcèdent pas 3%. Calculer cette durée de vie.
4. En garantissant cette durée de vie, quelle serait la valeur de la moyenne (l'écart type restant inchangé) qui conduirait à un retour sous garantie égal à 1%.

Exercice 6.6. On prélève dans la production d'une machine un échantillon de 100 tiges métalliques. La moyenne des longueurs des tiges de cet échantillon est 100,04 cm avec un écart type de 0,16 cm. La machine est réglée en principe pour obtenir des tiges de 100 cm.

1. Au risque de 5%, peut-on dire que la machine est bien réglée ?
2. Reprendre la question précédente avec un risque de 1%.

Exercice 6.7 (Exercice supplémentaire)**.** Dans un grand lot de pièces circulaires, on a prélevé un échantillon de 300 pièces, et mesuré les diamètres (en cm). Le tableau suivant contient les résultats :

Diamètre d en mm	42	43	44	45	46	47	48
Effectif	13	26	63	149	30	15	4

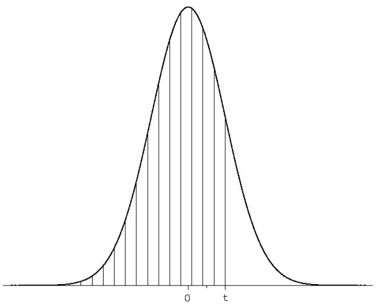
1. Estimer le diamètre moyen m de ces pièces, ainsi que la variance σ^2.
2. Donner un intervalle de confiance à 95% pour le diamètre moyen.
3. Donner un intervalle de confiance à 99% pour le diamètre moyen.

(Pour les questions 2 et 3, utiliser le tableau de la loi normale)

Exercice 6.8 (Exercice supplémentaire)**.** Un test pour le dépistage d'une maladie étant en phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes : Lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de 0,95. Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de 0,02.

1. On sait que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4%. Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité qu'elle ne soit pas malade.
2. 100 personnes de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants) montent dans un avion. Soit X le nombre de personnes parmi elles qui sont malades. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.
3. Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

Table de la fonction de répartition de la loi normale



Pour X une variable aléatoire centrée réduite on considère sa fonction de répartition $\Pi(t) = P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Graphiquement, $\Pi(t)$ est représenté par l'aire hachurée.
Si Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ, alors $X := \frac{Y-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite et donc $P(Y \leq t) = \Pi(\frac{t-m}{\sigma})$.

Les valeurs de $\Pi(t)$ se lisent dans le tableau suivant. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de t, c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes. Par exemple, la valeur de $\Pi(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05 - on trouve $\Pi(1.65) = 0.9505$, à $10 - 4$ près. Pour les valeurs négatives de t, on utilise la relation $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000