Automorfismos polinómicos que preservan una acción de grupo

Stéphane LAMY

Tordesillas - 11 de febrero 2000

1 Motivaciones

En el estudio del grupo $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$ de los automorfismos polinómicos de $\mathbb{C}^n$, el caso $n = 2$ es muy especial. Disponemos en efecto de un teorema de estructura que describe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ como el producto amalgamado de dos subgrupos : los grupos afín y elemental (cf. [8]). Notamos A_n el grupo de los automorfismos afines de $\mathbb{C}^n$, y E_n el grupo de los automorfismos elementales es decir los que son de la forma

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (\alpha_1 x_1 + f_1, \cdots, \alpha_n x_n + f_n)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{C}^*, f_i \in \mathbb{C}[x_{i+1}, \cdots, x_n]$. Así en dimensión 2 tenemos el

Teorema 1 (Jung)

$$Aut[\mathbb{C}^2] = A_2 *_{A_2 \cap E_2} E_2$$

Es decir que A_2 y E_2 engendran $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, y además todas las relaciones en $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ son inducidas por las relaciones en A_2 y E_2. Este resultado parece no poder generalizarse en dimensión superior. Por ejemplo en dimensión 3 es facil ver que $< A_3, E_3 >$ no es el producto amalgamado de A_3 y E_3, considerando la relación

$$(x, z, y) \circ (x + yz, y, z) \circ (x, z, y) \circ (x - yz, y, z) = Id$$

Por otra parte la pregunta de saber si $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3] = < A_3, E_3 >$ todavía queda abierta, sin embargo la opinión general es que esta igualdad es falsa y un candidato para ser un contra ejemplo es el siguiente automorfismo propuesto por Nagata en 1972 [9]

$$N : (x, y, z) \to (x - 2y(y^2 + xz) - z(y^2 + xz)^2, y + z(y^2 + xz), z)$$

Este automorfismo proviene de una derivación localmente nilpotente. Una derivación D del álgebra $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ es localmente nilpotente (cf. [3]) si para todo $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $D^n(f) = 0$. Tomando la exponencial se asocia a una derivación localmente nilpotente un automorfismo polinómico

$$\exp(D) : (x_1, \cdots, x_n) \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_1), \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_n) \right)$$

Podemos notar que si $f \in \mathrm{Ker}(D)$ entonces

- $f.D$ también es una derivación localmente nilpotente;

- $f \circ \exp(D) = f$.

Ahora consideramos la derivación $D = -2y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$ sobre el álgebra $\mathbb{C}[x, y, z]$. Es una derivación localmente nilpotente con nucleo $\mathbb{C}[z, y^2 + xz]$. Tenemos entonces

$$N = \exp((y^2 + xz).D)$$

Notamos $Q = y^2 + xz$, así que $Q \circ N = Q$. En [2] Drensky y Yu consideran los automorfismos de tipo Nagata de la forma $\exp(\delta.D)$ con $\delta \in \mathbb{C}[z, Q] = \mathrm{Ker}(D)$ y plantean el problema : es el grupo "ortogonal non lineal" $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, i.e el grupo constituido por los $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ tal que $Q \circ \varphi = Q$, engendrado por el grupo ortogonal lineal y los automorfismos de tipo Nagata ?
Por otra parte, la descripción de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ se puede pensar como un caso particular del problema más general siguiente. Dada la acción de un grupo G sobre $\mathbb{C}^n$, podemos tratar de describir el grupo $\mathrm{Aut}_G[\mathbb{C}^n]$ de los automorfismos polinómicos que preservan las órbitas de esta acción. Una situación básica es cuando G es un grupo de Lie complejo actuando sobre su álgebra de Lie (que se identifica a $\mathbb{C}^n$). Vamos a considerar dos casos, para los cuales podremos dar una descripción precisa del grupo de automorfismos asociado :

1. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ asociado a la acción de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$;

2. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ asociado a la acción de $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$.

Este artículo está así organizado. En la segunda parte introducimos la noción de automorfismo con parámetro, que será omnipresente en lo que sigue. Además mostramos como el estudio de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ y de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ se puede reducir al de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. La descripción del grupo $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ es el objeto de la tercera parte. Estos resultados están contenidos en [6]; aquí los exponemos con más detalles. En la cuarta parte contestamos (negativamente) a la pregunta de Drensky y Yu, produciendo un contra ejemplo. Mostramos como los resultados de la precedente parte se pueden interpretar en el contexto de la identificación $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Finalmente, terminamos la descripción de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ y de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$.
Notaramos :

- $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$ (resp. $\mathrm{AutBir}(\mathbb{C}^n)$) los grupos de los automorfismos polinómicos (resp. biracional) de $\mathbb{C}^n$;

- (u, v) las coordenadas en $\mathbb{C}^2$, (x, y, z) en $\mathbb{C}^3$ y $(x_1, \cdots, x_n)$ en cualquier dimensión;

- por ejemplo $f = (u + v^n, v)$ para señalar un automorfismo (en lugar de $f(u, v) = (u + v^n, v)$).

2 El primer papel : $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$

2.1 Automorfismos con parámetros

Introducimos ahora la noción de automorfismo con parámetros. Notamos $(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_p)$ las coordenadas en $\mathbb{C}^{n+p}$, y sea F un subgrupo de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$. Diremos que $f \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^{n+p}]$ es un elemento de F con parámetros polinómicos $t_1, \cdots, t_p$ si

1. $\forall i = 1, \cdots, p,\ f(t_i) = t_i$;

2. $\forall \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$, la aplicación $f_\lambda : (x_1, \cdots, x_n) \to f(x_1, \cdots, x_n, \lambda)$ es un elemento de F.

De manera similar diremos que $f \in \mathrm{AutBir}(\mathbb{C}^{n+p})$ es un elemento de F con parámetro racional $t_1, \cdots, t_p$ si

1. $\forall i = 1, \cdots, p$, $f(t_i) = t_i$;
2. $\forall \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$, la aplicación $f_\lambda : (x_1, \cdots, x_n) \to f(x_1, \cdots, x_n, \lambda)$ es o bien un elemento de F, o bien non definida (porque hay un polo en el punto λ).

Notamos $F_{[t_1, \cdots, t_p]}$ (resp. $F_{(t_1, \cdots, t_p)}$) los elementos de F con parámetros polinómicos (resp. racional). Un elemento del grupo $\mathrm{Aut}[k^n]$ puede verse como un elemento del grupo $\mathrm{Aut}(k[x_1, \cdots, x_n])$ de los k-automorfismos del álgebra $k[x_1, \cdots, x_n]$. Así podemos considerar un elemento de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}(t)^2]$ como un automorfismo de $\mathbb{C}^2$ cuyos coeficientes dependen racionalmente de t, o bien como un elemento del grupo $\mathrm{Aut}_t(\mathbb{C}(t)[u, v])$ de los $\mathbb{C}(t)$-automorfismos del álgebra $\mathbb{C}(t)[u, v]$. Vamos a utilizar los dos puntos de vista. Además, si f es un automorfismo de $\mathbb{C}^n$ con parámetros $t_1, \cdots, t_p$, notaremos

$$f : x_1, \cdots, x_n \to f_1, \cdots, f_n$$

con $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_p]$ (en lugar de $f : x_1, \cdots, x_n \to f_1, \cdots, f_n, t_1, \cdots, t_p$).
Ejemplos :

- $f_1 = (u + tv^n, v)$ es un automorfismo de $\mathbb{C}^2$ con parámetro polinómico t.
- $f_2 = (u + \frac{1}{t_1 + t_2} v^n, v)$ es un automorfismo de $\mathbb{C}^2$ con parámetros racionales t_1, t_2.
- $f_3 = (tu, v)$ es igualmente un automorfismo de $\mathbb{C}^2$ con parámetro racional, de inverso $(\frac{1}{t} u, v)$, pero al contrario de los dos precedentes ejemplos su determinante jacobiano depende de t. En este artículo no consideremos tales automorfismos .

2.2 Relación entre $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ y $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$

Se identifican $\mathbb{C}^3$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vía la aplicación

$$(x, y, z) \to \begin{pmatrix} y & x \\ z & -y \end{pmatrix}$$

La forma cuadratica $Q = y^2 + xz$ corresponde así (excepto el signo) al determinante.

Hecho 2 *Los elementos de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ *son exactamente los elementos de* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ *que preservan la foliación dada por los niveles de la aplicación* $y^2 + xz$.

En efecto un systema de representes de las clases de conjugación es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{C} \right\}$$

Así

$$f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3] \Leftrightarrow f \in \ \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3] \ \text{ preserva el determinante y } f(0) = 0$$

Pero la condición $f(0) = 0$ es superflua pues la matriz nula es el único punto singular de la aplicación determinante y por lo tanto es fijada por todo f que preserva los niveles de $y^2 + xz$. $\square$
Así todo elemento $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ induce una aplicación $\bar{f}$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$\bar{f}(det(M)) = det(f(M))$$

Hecho 3 *Para todo $f \in Aut_{SL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ la aplicación $\bar{f}$ es de la forma*

$$\bar{f} : x \to \alpha.x \ \ con \ \alpha \in \mathbb{C}^*$$

Primero mostramos que $\bar{f}$ es polinómica. Considerando la igualdad

$$\bar{f}(a^2) = \det\left(f\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}\right) = \det\left(f\begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix}\right)$$

vemos que $\bar{f}(a^2)$ es un polinomio en a invariante por el cambio de variables $a \to -a$; es decir $\bar{f}(a^2)$ es un polinomio en a^2. La aplicación $\bar{f}$ es biyectiva, pues $\bar{f}^{-1} = \overline{f^{-1}}$. Así $\bar{f}$ es de la forma $\bar{f} : x \to \alpha.x + \beta$, y $\beta = 0$, pues hemos visto que f fija la matriz nula. $\square$
Tenemos

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3] = < \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3], \mathbb{C}^* >$$

donde $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ es constituido de los $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ tales que $\bar{f}$ sea la identidad, y $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ es la inclusión natural . Además tenemos

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]/_{<-Id>} = \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]/_{<-Id>} \rtimes \mathbb{C}^*/_{<-Id>}$$

Así, para terminar la descripción de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ sólo nos queda describir el grupo $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

2.3 Relación entre $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ y $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$

Identificamos $\mathbb{C}^4$ y $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ vía la aplicación

$$(x, y, z, w) \to \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix}$$

Para $M \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$, notamos :

$$\begin{aligned} tr(M) &= y + w \\ det(M) &= yw - xz \\ dis(M) &= tr(M)^2 - 4det(M) \\ &= (y-w)^2 + 4xz \end{aligned}$$

Hecho 4 *Todo elemento f de $Aut_{GL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ induce una aplicación $\bar{f}$ de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ que verifica*

$$\bar{f}(tr(M), dis(M)) = (tr(f(M)), dis(f(M)))$$

Además $\bar{f}$ es un automorfismo polinómico elemental de la forma

$$\bar{f} : (u, v) \to (\alpha u + P(v), \beta v) \ \ con \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[X]$$

Recíprocamente todos estos automorfismos se pueden realizar como la aplicación $\bar{f}$ inducida por algún $f \in Aut_{GL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$.

La existencia de $\bar{f}$ proviene del simple hecho de que si M, N son dos matrices en una misma órbita entonces M y N tienen misma traza y mismo determinante. Mostramos que $\bar{f}$ es polinómico aplicando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \\ (tr, dis)\downarrow & & \downarrow (tr, dis) \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

a las matrices $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. En efecto vemos entonces que $\bar{f}(\lambda_1+\lambda_2, (\lambda_1-\lambda_2)^2)$ es polinómico en λ_1 y λ_2 y invariante por cambio de λ_1 con λ_2; i.e se expresa con la ayuda de las funciones simétricas $\lambda_1+\lambda_2$ y $(\lambda_1-\lambda_2)^2$. Como en el hecho 2 mostramos que $\bar{f}$ es biyectiva notando que $\bar{f}^{-1} = \overline{f^{-1}}$. Mostramos ahora que f se restringe en un automorfismo sobre las matrices de discriminante nulo. Un elemento M de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ puede ser de uno de los tres siguientes tipos :

1. los dos valores propios de M son distintos : la órbita de M es cerrada y no reducida a un punto;
2. M es una matriz escalar : la órbita de M se reduce a un punto;
3. M tiene sus dos valores propios iguales y no es escalar : entonces la órbita de M no es cerrada.

Esta partición de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ es respetada por todo elemento de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$; además las matrices de discrimante nulo corresponden exactamente a los tipos 2 y 3. Así tenemos

$$dis(M) = 0 \Rightarrow \bar{f}(dis(M)) = dis(f(M)) = 0$$

por lo tanto v divisa $\bar{f}(v) \in \mathbb{C}[u,v]$, que es irreductible (pues $\bar{f}$ es un automorfismo). A consecuencia $\bar{f}$ es un automorfismo elemental de la forma :

$$\bar{f} : (u,v) \to (\alpha u + P(v), \beta v)$$

Recíprocamente mostramos que todos estos automorfismos elementales son realizados : los automorfismos de la forma

$$f : M \to M + P(dis(M)).Id \quad (*)$$

inducen

$$\bar{f} : (u,v) \to (u + P(v), v)$$

y los automorfismos de la forma

$$f : M = \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix} \to \alpha \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w & -x \\ -z & y \end{pmatrix} \quad (**)$$

dan (para $\alpha \neq \pm\beta$) los automorfismos lineales diagonales

$$\bar{f} : (u,v) \to ((\alpha+\beta)u, (\alpha-\beta)^2 v)$$

lo que termina la prueba. $\square$
Notamos $\mathcal{E} \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ el grupo engendrado por los automorfismos de la forma $(*)$ o $(**)$. Tenemos $E_2 \simeq \mathcal{E}/_\sim$, donde

$$f \sim g \Leftrightarrow f \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w & -x \\ -z & y \end{pmatrix}$$

Notamos $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ constituido de los elementos f tales que $\bar{f}$ sea la identidad. Tenemos entonces

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4] = < \mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4], \mathcal{E} >$$

y más precisamente

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]/_\sim = \mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]/_\sim \rtimes \mathcal{E}/_\sim$$

Queda describir $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$. La siguiente proposición muestra que de nuevo hay una relación con el grupo $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

Proposición 5 *El grupo $Aut_{tr,dis}[\mathbb{C}^4]$ es isomorfo a $Aut_Q[\mathbb{C}^3]_{[t_2]}$.*

Prueba. Conjugando un elemento de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t_2]}$ por la translación

$$(x, y, z) \to (x, y - t_2, z)$$

obtenemos un automorfismo φ de $\mathbb{C}^4$ (en las coordenadas (x, y, z, t_2)) que fija t_2 y $(y - t_2)^2 + xz$. Haciendo el cambio de variable $t_2 = \frac{y+w}{2}$ obtenemos entonces un automorfismo de $\mathbb{C}^4$ (en las coordenadas (x, y, z, w)) que preserva traza y discriminante. Recíprocamente, a partir de un elemento de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$, haciendo el cambio de variable $w = 2t_2 - y$ y luego conjugando por $(x, y + t_2, z)$ obtenemos un elementos de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t_2]}$. Así hemos producido el isomorfismo anunciado. $\square$

3 Descripción del grupo $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$

3.1 Introducción de los grupos $H \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ y $G \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$

El teorema de estructura de Jung enunciado en la introducción sigue siendo válido para cualquier cuerpo k (aunque en [8] los autores se restringen al cuerpo de los complejos). Vamos a trabajar con $k = \mathbb{C}$, y con $k = \mathbb{C}(t)$ el cuerpo de las fracciones racionales. Notamos H el subgrupo de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constituido de los automorfismos con determinante jacobiano ± 1 que conmutan con $-Id$, y ponemos $A_H = A_2 \cap H$, $E_H = E_2 \cap H$.

Proposición 6 *Tenemos las decomposiciones en producto amalgamado :*

$$H = A_H *_\cap E_H \text{ y } H_{(t)} = A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}$$

Prueba. Primero según [10] (pp. 14) tenemos $A_H *_\cap E_H = < A_H, E_H >$. Queda ver que A_H y E_H engendran H. Para eso volvemos a considerar la inducción en la prueba del teorema de estructura para $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (cf [8]). Sea $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, componiendo eventualmente (a la izquierda) por un automorfismo de la forma $(u + \alpha v, v)$ y después por (v, u) se puede suponer $\deg(g_1) > \deg(g_2)$. Se muestra entonces que $\deg(g_1) = \deg(g_2) \times n$, y componiendo por $(u + \beta v^n, v)$ podemos bajar el grado. Notamos que si g conmuta con $-Id$, es decir si g_1 y g_2 tienen todos sus monomios de grado impar, entonces n también es impar. Así por inducción escribimos $g = m \circ s$ con $s \in A_2 \cap E_2$, $\det(\mathrm{Jac}(m)) = \pm 1$ y m conmuta con $-Id$, de donde resulta la proposición. La prueba en el caso con parámetros racionales es similar (trabajando sobre el cuerpo $\mathbb{C}(t)$). $\square$

Nota 7 En contraste con la proposición 6, el grupo de los automorfismos de $\mathbb{C}^2$ con parámetro polinómico no está engendrado por los subgrupos afín e elemental con parámetro polinómico. Un contra ejemplo está dado por el automorfismo de Nagata : este hecho es bien conocido y se expresa diciendo que N no es moderado en $\mathbb{C}[z][x,y]$ (cf. [1] o [9]). En efecto considerando la tercera coordenada como un parámetro obtenemos :

$$N_t : (u, v) \to (u - 2v(v^2 + tu) - t(v^2 + tu)^2, v + t(v^2 + tu))$$

que admite la decomposición :

$$N_t = (u - \frac{v^2}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^2}{t}, v)$$

Aún queda comprobar que N_t no admite otra decomposición con coeficientes polinómicos (cf. [9] y también sección 4.1).

Introducimos ahora un subgrupo particular de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. Primero notamos E_G el grupo formado de las aplicaciones

$$(x, y, z) \to (\alpha^2 x + 2\alpha y \delta(z) - z\delta^2(z), y - \frac{z}{\alpha}\delta(z), \frac{1}{\alpha^2} z)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\delta \in \mathbb{C}[z]$. Es un subgrupo natural : no es difícil comprobar que $E_G = E_3 \cap \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. Notamos $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ el grupo ortogonal lineal asociado a la forma cuadrática Q, y G el grupo engendrado por $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ y E_G. Este grupo interviene de la manera siguiente. Un elemento de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ induce un automorfismo sobre cada cuádrica $V_\lambda = \{y^2 + xz = \lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, y los automorfismos de tales superficies son clasifiadas en [5] y [7] :

Proposición 8 (Gizatullin-Danilov, Makar-Limanov) *Sea $\lambda \neq 0$. El grupo G_λ de los automorfismos de la superficie V_λ es obtenido como la restricción del grupo G a V_λ.*

En particular la proposición dice que todo automorfismo de V_λ se puede extender en un automorfismo de $\mathbb{C}^3$ que preserva Q. Hemos excluido el caso $\lambda = 0$ pues en este caso el grupo asociado es un poco mayor : el grupo de los automorfismos del nivel V_0 es el grupo engendrado por las transformaciones $(x, y, z) \to (\mu x, \mu y, \mu z)$ con $\mu \in \mathbb{C}^*$ y por el grupo G_0 restricción de G a V_0. Además G posee una estructura más precisa :

Lema 9 *Hay una decomposición en producto amalgamado*

$$G = O(3, \mathbb{C}) *_\cap E_G$$

Prueba. Gizatullin y Danilov obtienen este resultado en el mismo tiempo que el resultado de la proposición 8. Sin embargo se puede dar una prueba elemental procediendo por inducción sobre el grado de una composición de elementos de $O(3,\mathbb{C})$ y de E_G. Dejamos los detalles del argumento al lector (cf. también la prueba similar en [4] del hecho que $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2] = A_2 *_\cap E_2$ sabiendo que $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ $=< A_2, E_2 >$). □

3.2 El morfismo σ entre los grupos H y G

Utilizamos la siguiente parametrización de la superficie V_0 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \stackrel{p}{\to} & \mathbb{C}^3 \\ (u,v) & \to & (u^2, uv, -v^2) \end{array}$$

y más exactamente el morfismo de álgebras inducido por p :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x,y,z] & \stackrel{p^*}{\to} & \mathbb{C}[u,v] \\ x,y,z & \to & u^2, uv, -v^2 \end{array}$$

Cuando trabajemos sobre el cuerpo $\mathbb{C}(t)$ extendemos simplemente p^* en un morfismo de $\mathbb{C}(t)$-álgebras poniendo $p^*(t) = t$.

Proposición 10 *Existe un morfismo $\sigma : H_{(t)} \to G_{(t)}$ exhaustivo y de núcleo $< -Id >$ tal que para todo $f_t \in H_{(t)}$, $\sigma(f_t)$ haga conmutar el diagrama :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t)[x,y,z] & \stackrel{\sigma(f_t)}{\to} & \mathbb{C}(t)[x,y,z] \\ p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ \mathbb{C}(t)[u,v] & \underset{f_t}{\to} & \mathbb{C}(t)[u,v] \end{array}$$

Prueba. Definimos σ sobre $A_{H,(t)}$ y sobre $E_{H,(t)}$ poniendo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_{H,(t)} \to \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & -b^2 \\ ac & ad+bc & -bd \\ -c^2 & -2cd & d^2 \end{pmatrix} \in O(3,\mathbb{C})_{(t)}$$

$$(\alpha u + v\delta(-v^2), \frac{\pm v}{\alpha}) \in E_{H,(t)} \to (\alpha^2 x \pm 2\alpha y \delta(z) - z\delta^2(z), y \mp \frac{z}{\alpha}\delta(z), \frac{z}{\alpha^2}) \in E_{G,(t)}$$

Comprobamos que σ es así bien definido (es decir las dos definiciones coinciden sobre $A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$) y hace conmutar el diagrama más arriba indicado. Además σ induce isomorfismos

$$A_{H,(t)}/ < -Id > \cong O(3,\mathbb{C})_{(t)} \text{ y } E_{H,(t)}/ < -Id > \cong E_{G,(t)}$$

No es difícil comprobar que el producto amalgamado dado por la proposición 6 baja al cociente :

$$H_{(t)}/ < -Id > = A_{H,(t)}/ < -Id > *_\cap E_{H,(t)}/ < -Id >$$

por lo tanto σ induce también como anunciado un isomorfismo

$$H_{(t)}/ < -Id > \cong G_{(t)}$$

□

El siguiente lema viene a precisar un poco más la proposición 8 :

Lema 11 *Sea $f = (f_1, f_2, f_3) \in G \setminus O(3, \mathbb{C})$, y sea h_i la componente homogénea de mayor grado de f_i.*

1. *Existe un polinómio $L = \alpha x + \beta y + \gamma z$ tal que para todo i, h_i sea una potencia de L (excepto una constante multiplicativa);*
2. *h_i no es un múltiplo de $y^2 + xz$;*
3. *para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, el morfismo de restricción $G \xrightarrow{q_\lambda} G_\lambda$ es un isomorfismo.*

Prueba. Escribimos $f = g \circ a$, donde $a \in \mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ y la decomposición de g en el producto amalgamado $\mathrm{O}(3, \mathbb{C}) *_\cap E_G$ se acaba (a la derecha) por un elemento de E_G. Se muestra facilmente por inducción que cada una de las tres componentes homogéneas de mayor grado de g es una potencia de z. Componiendo por el automorfismo a obtenemos el primer punto (si $a = (a_1, a_2, a_3)$ entonces $L = a_3$). El segundo punto es un corolario inmediato. Para el tercero punto, basta de notar que todo elemento non trivial en $\mathrm{Ker}(q_\lambda)$ se escribiría

$$(x, y, z) + (y^2 + xz - \lambda).(f_1, f_2, f_3)$$

en particular sus componentes de mayor grado serían múltiples de $y^2 + xz$. □

Quisieramos ahora considerar σ como un morfismo de $H_{[t]}$ en $G_{[t]}$. Este no es inmediato, en efecto para definir la imagen de un elemento f_t de $H_{[t]}$ hay que empezar por decomponer f_t en el producto amalgamado $A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}$

$$f_t = f_n \circ \cdots \circ f_1$$

luego por definición $\sigma(f_t) = \sigma(f_1) \circ \cdots \circ \sigma(f_n)$. Aún cuando f_t tenga coeficientes polinómicos en t hemos visto que su decomposición pudiera necesitar automorfismos con parámetro racional (nota 7), así que no es a priori claro que $\sigma(f_t)$ tenga coeficientes polinómicos. De manera similar hay que comprobar que todo elemento de $G_{[t]}$ es la imagen por σ de un elemento de $H_{[t]}$. Todo eso es el objeto de la

Proposición 12 *El morfismo σ se restringe en un morfismo $H_{[t]} \to G_{[t]}$ exhaustivo y de núcleo $< -Id >$.*

Prueba. Sean $\varphi_t : (u, v) \to (f_t(u, v), g_t(u, v)) \in H_{[t]}$, y $(x_0, y_0, z_0) \in V_0$. Por construcción, para todo $t_0 \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\sigma(\varphi_{t_0})(x_0, y_0, z_0) = (f_{t_0}(u_0, v_0)^2, f_{t_0}(u_0, v_0)g_{t_0}(u_0, v_0), -g_{t_0}(u_0, v_0)^2))$$

Así $\sigma(\varphi_{t_0})$ define un automorfismo de V_0. Por el lema 11 este automorfismo se extiende de manera única a un elemento de G : pues $\sigma(\varphi_{t_0})$ está bien definido sobre todo $\mathbb{C}^3$. Este siendo válido para todo $t_0 \in \mathbb{C}$, resulta que $\sigma(\varphi_t)$ tiene todos sus coeficientes polinómicos en t. Mostramos ahora la suprayectividad. Sea $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in G_{[t]}$. Tenemos

$$p^*(\psi_1)p^*(\psi_3) + p^*(\psi_2)^2 = p^*(\psi_1\psi_3 + \psi_2^2) = p^*(y^2 + xz) = 0$$

entonces $-p^*(\psi_1)p^*(\psi_3)$ es un cuadrado en $\mathbb{C}[t][u,v]$. Ahora bien $\mathbb{C}[t][\psi_1, \psi_2, \psi_3] = \mathbb{C}[t][x,y,z]$ entonces aplicando p^* obtenemos $\mathbb{C}[t][p^*(\psi_1), p^*(\psi_2), p^*(\psi_3)] = \mathbb{C}[t][u^2, uv, v^2]$. En particular $p^*(\psi_1)$ y $-p^*(\psi_3)$ no tienen factor común y son entonces cuadrados :

$$p^*(\psi_1) = f_t(u,v)^2, \quad -p^*(\psi_3) = g_t(u,v)^2$$

Sustituyendo eventualmente f_t por $-f_t$ podemos suponer que

$$p^*(\psi_2) = f_t(u,v)g_t(u,v)$$

Entonces $\varphi : (u,v) \to (f_t(u,v), g_t(u,v))$ es un endomorfismo del álgebra $\mathbb{C}[t][u,v]$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t)[x,y,z] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}(t)[x,y,z] \\ p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ \mathbb{C}(t)[u,v] & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{C}(t)[u,v] \end{array}$$

De hecho es fácil ver que φ es un automorfismo : basta hacer el mismo razonamiento con ψ^{-1} para construir el inverso de φ (pues si $\psi = Id$ los únicos endomorfismos que hacen conmutar este diagrama son $\pm Id$). Así φ es un elemento de $H_{[t]}$ antecedente de ψ por σ, lo que termina la demostración. □

3.3 El morfismo τ entre G y $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$

Acabamos de establecer una relación entre $H_{[t]}$ y $G_{[t]}$; ahora vamos a mostrar que $G_{[t]}$ y $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ son isomorfos. Así usando estos dos morfismos un elemento de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ se puede identificar con un automorfismo de $\mathbb{C}^2$ con parámetro polinómico. Consideremos el grupo $\mathrm{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x,y,z])$ de los automorfismos de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}(Q)[x,y,z]$ que preservan la forma Q. Por supuesto tenemos

$$\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3] = \mathrm{Aut}_Q(\mathbb{C}[x,y,z]) \subset \mathrm{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x,y,z])$$

Proposición 13 *Existe un isomorfismo*

$$G_{(t)} \xrightarrow{\tau} Aut_Q(\mathbb{C}(Q)[x,y,z])$$

que induce un isomorfismo entre los grupos $G_{[t]}$ y $Aut_Q[\mathbb{C}^3]$.

Prueba. Asociamos a cada $f_t \in G_{(t)}$ un elemento $\tau(f_t)$ en $\mathrm{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x,y,z])$ sustituyendo Q por el parámetro t :

$$\tau(f_t) : (x,y,z) \longrightarrow f_Q(x,y,z)$$

La aplicación τ así construida claramente es un morfismo de grupo. Ahora vamos a construir la aplicación recíproca de τ. Consideremos el morfismo de $\mathbb{C}(t)$-álgebras

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t)[x,y,z] & \overset{p_\lambda^*}{\to} & \mathbb{C}(t)[u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2] \\ x,y,z & \to & u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2 \end{array}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Como anteriormente, p_λ^* proviene de una parametrización de la superficie V_λ. Sin embargo p_λ^* todavía tiene sentido para todo $\lambda \in \mathbb{C}(t)$, en particular utilizaremos p_t^*. Además para todo $\lambda \in \mathbb{C}(t)$ podemos extender p_λ^* en un morfismo

$$\mathbb{C}(Q)[x,y,z] \overset{p_\lambda^*}{\to} \mathbb{C}(t)[u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2]$$

poniendo simplemente $p_\lambda^*(Q)=\lambda$. Para todo $\lambda \in k$ ($k=\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}(t)$), p_λ^* induce un isomorfismo

$$k[x,y,z]/(y^2+xz-\lambda) \cong k[u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2]$$

El grupo de los automorfismos del álgebra $k[x,y,z]/(y^2+xz-\lambda)$ se identifica canónicamente para $\lambda \in \mathbb{C}^*$ a G_λ y por tanto a G (lema 11). Se comprueba que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} & G_\lambda \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "s_1"] & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2]) \arrow[d, "s_2"] \\ G \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \\ & G_1 \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2]) \end{tikzcd}$$

La aplicación s_1 consiste simplemente en considerar un elemento de G_λ como un elemento de G_1. Más precisamente, por el lema 11 un elemento $f \in G_\lambda$ determina un único elemento de G (que aún notamos f), y s_1 consiste simplemente en restringir f a V_1. La aplicación s_2 es el isomorfismo que hace conmutar el diagrama, i.e s_2 es la aplicación que a

$$\varphi: u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2 \to \varphi_1(u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2),\varphi_2(u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2),\varphi_3(u^2-\frac{\lambda}{v^2},uv,-v^2)$$

asocia

$$s_2(\varphi): u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2 \to \varphi_1(u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2),\varphi_2(u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2),\varphi_3(u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2)$$

A priori φ no admite una escritura única, sino podemos determinar los φ_i de manera canónica pidiendo que la aplicación

$$x,y,z \to \varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z),\varphi_3(x,y,z)$$

sea un elemento de G. Así s_2 está bien definida (la definición de s_2 dada en la nota [6] es errada; agradezco a M. Gizatullin quien me señaló esta equivocación). Por supuesto tenemos un diagrama correspondiente para el cuerpo de base $\mathbb{C}(t)$. Así el grupo G (resp. $G_{(t)}$) se identifica con los automorfismos del álgebra $\mathbb{C}[u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2]$ (resp. $\mathbb{C}(t)[u^2-\frac{1}{v^2},uv,-v^2]$). Ahora sea

$\varphi \in \mathrm{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x,y,z])$. Asociamos a φ via p_t^* un automorfismo de $\mathbb{C}(t)[u^2-\frac{t}{v^2}, uv, -v^2]$. Como anteriormente nos reducimos al álgebra asociada a V_1 :

$$P(u,v) \in \mathbb{C}(t)[u^2-\frac{t}{v^2}, uv, -v^2] \longrightarrow \frac{1}{\alpha^2}P(\alpha u, \alpha v) \in \mathbb{C}(t)[u^2-\frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$$

donde $\alpha^4 = t$. Así a φ se asocia un automorfismo de $\mathbb{C}(t)[u^2-\frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$, i.e un elemento φ_t de $G_{(t)}$ por la discusión encima. Se comprueba que este define una recíproca a τ; de hecho para cada $\lambda \in \mathbb{C}^*$ fuera de un número finito de polos (y incluso para $\lambda = 0$ por continuidad), φ_λ es el único elemento en G que coincide con φ sobre V_λ. Por fin es claro que si $\varphi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, entonces φ_t es a coeficientes polinómicos. En efecto por construcción los polos en t de φ_t provienen de los polos en Q de φ. $\square$

4 Conclusiones

4.1 La pregunta de Drensky y Yu

Ahora podemos producir un contra ejemplo a la pregunta de Drensky y Yu. En la tercera parte hemos construido dos morfismos :

$$H_{[t]} \xrightarrow{\sigma} G_{[t]} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$$

Notamos que O(3,$\mathbb{C}$) es en la imagen de $A_{H,[t]}$ por $\tau \circ \sigma$, de hecho O(3,$\mathbb{C}$) es exactamente la imagen de A_H. Por otra parte los automorfismos de tipo Nagata $\exp(\delta(Q,z).D)$ provienen de los elementales de la forma $(u - v\delta(t,-v^2), v) \in E_{H,[t]}$. Ahora vamos a exhibir un elemento de $H_{[t]}$ que no está en el grupo engendrado por $A_{H,[t]}$ y $E_{H,[t]}$, aplicando el morfismo exhaustivo $\tau \circ \sigma$ obtenemos así un contra ejemplo a la pregunta de Drensky y Yu. Volvemos a considerar el ejemplo N_t de la nota 7. Podemos construir una familla con indices en $\mathbb{N}^*$ de ejemplos similares poniendo

$$N_{i,t} = (u - \frac{v^i}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^i}{t}, v)$$

Tenemos $N_t = N_{2,t}$. Además para i impar $N_{i,t}$ es en $H_{[t]}$. Comprobamos por ejemplo que $N_{3,t}$ tiene coeficientes polinómicos :

$$N_{3,t}(u,v) = (u - 3v^2(ut+v^3) - 3vt(ut+v^3)^2 - t^2(ut+v^3)^3, v + t(ut+v^3))$$

Si $N_{3,t}$ admite otra decomposición ésta es de la forma :

$$N_{3,t} : (u,v) \longrightarrow (u - \frac{v^3}{t}, v) \circ s \circ s^{-1} \circ (u, v+t^2u) \circ s' \circ s'^{-1} \circ (u + \frac{v^3}{t}, v)$$

donde $s, s' \in A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$. Si $s = (\alpha u + \beta v, \gamma v)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}(t)$ y $\alpha\gamma = \pm 1$, entonces

$$(u - \frac{v^3}{t}, v) \circ s = (\alpha u + \beta v - \frac{\gamma^3 v^3}{t}, \gamma v)$$

que todavía tiene coeficientes no polinómicos.

4.2 Descripción de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ y $\mathrm{Aut}_{\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$

En la sección 3 hemos construido dos morfismos

$$\begin{aligned} \sigma : H_{[t]} &\rightarrow G_{[t]} \\ \tau : G_{[t]} &\rightarrow \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3] \end{aligned}$$

La expresión de $\rho = \tau \circ \sigma$ es más simple en el contexto $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Comprobamos que para todo $f = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \in A_{H,(t)}$ tenemos

$$\rho(f) : M \rightarrow \begin{pmatrix} a(y^2+xz) & b(y^2+xz) \\ c(y^2+xz) & d(y^2+xz) \end{pmatrix} \circ M \circ \begin{pmatrix} a(y^2+xz) & b(y^2+xz) \\ c(y^2+xz) & d(y^2+xz) \end{pmatrix}^{-1}$$

y para todo $f : (u,v) \rightarrow (u + vP(-v^2,t), v) \in E_{H,(t)}$

$$\rho(f) : M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & P(z,y^2+xz) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ M \circ \begin{pmatrix} 1 & -P(z,y^2+xz) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así el automorfismo N de Nagata no es nada más que la conjugación por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & y^2+xz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
De manera similar la identificación $\mathbb{C}^4 \simeq \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ permite expresar facilmente la estructura de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$. Hemos visto que el estudio de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ se reduce al estudio de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$. Volviendo a considerar la construcción de τ y σ, podemos ver facilmente que ésta se puede hacer con un parámetro polinómico :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : H_{[t_1,t_2]} &\rightarrow G_{[t_1,t_2]} \\ \tilde{\tau} : G_{[t_1,t_2]} &\rightarrow \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t_2]} \end{aligned}$$

tal que $\tilde{\tau}$ sea un isomorfismo y $\tilde{\sigma}$ exhaustiva y de núcleo $< -Id >$. Con la proposición 5 obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4] \simeq H_{[t_1,t_2]}/ < -Id >$$

Este isomorfismo se expresa de la manera siguiente. Tenemos $H_{[t_1,t_2]} \subset < A_{H,(t_1,t_2)}, E_{H,(t_1,t_2)} >$. Para todo $f(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} a(t_1,t_2) & b(t_1,t_2) \\ c(t_1,t_2) & d(t_1,t_2) \end{pmatrix} \in A_{H,(t_1,t_2)}$ ponemos

$$\psi(f) : M \rightarrow f\left(\frac{dis(M)}{4}, \frac{tr(M)}{2}\right) \circ M \circ f\left(\frac{dis(M)}{4}, \frac{tr(M)}{2}\right)^{-1}$$

y para todo $f : (u,v) \rightarrow (u + vP(-v^2,t_1,t_2), v) \in E_{H,(t_1,t_2)}$

$$\psi(f) : M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & P\left(z, \frac{dis(M)}{4}, \frac{tr(M)}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ M \circ \begin{pmatrix} 1 & -P\left(z, \frac{dis(M)}{4}, \frac{tr(M)}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así hemos definido ψ sobre $H_{(t_1,t_2)}$, y el isomorfismo más arriba indicado es simplemente la restricción de ψ a $H_{[t_1,t_2]}$.

Agradecimientos. Agradezco vivamente a Dominique Cerveau quien me propuso este problema, así como a Cédric Tarquini quien largamente me ayudó a resolverlo.

References

[1] J. Alev. A note on Nagata's automorphism. In A. van den Essen, editor, *Automorphisms of affine spaces (Curaçao).*, pages 215–221. Kluwer Acad. Publish., 1995.

[2] V. Drensky and J.-T. Yu. Exponential automorphisms of polynomial algebras. *Com. in Algebra*, 26:2977–2985, 1998.

[3] A. Van den Essen. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms. *Proc. Am. Math. Soc.*, 116:861–871, 1992.

[4] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Erg. Th. and Dyn. Sys.*, 9:67–99, 1989.

[5] M.H. Gizatullin and V.I. Danilov. Automorphisms of affine surfaces II. *Isz. Akad. Nauk. SSSR*, 41:51–98, 1977.

[6] S. Lamy. Les automorphismes polynômiaux de $\mathbb{C}^3$ préservant une forme quadratique. *CRAS*, 328:883–886, 1999.

[7] L.G. Makar-Limanov. On group of automorphisms of class of surfaces. *Israel J. Math.*, 69:250–256, 1990.

[8] J.H. McKay and S.S. Wang. An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables. *J. Pure and Appl. Algebra*, 52:91–102, 1988.

[9] M. Nagata. *On the automorphism group of* $k[X, Y]$., volume 5 of *Kyoto univ. Lectures in Math.* Kinukuniya, 1972.

[10] J.-P. Serre. *Arbres, Amalgames,* SL_2., volume 46 of *Astérisque*. SMF, 1977.

Stéphane Lamy
Centre de Recerca Matemática
Universitat Autónoma de Barcelona
08193 Bellaterra (Barcelona)
E.Mail : lamy@crm.es