

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PAUL SABATIER

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Stéphane LAMY

Titre de la Thèse :

Automorphismes polynomiaux du plan complexe : étude algébrique et dynamique

Soutenue le 12 janvier 2000 devant le jury composé de

M. Christophe BAVARD (rapporteur)

M. Etienne GHYS (rapporteur)

M. François BERTELOOT

M. Dominique CERVEAU

M. Jean-Jacques LOEB

M. Marcel NICOLAU

M. Emmanuel PAUL

Durant la préparation de cette thèse j'ai dépendu d'une manière ou d'une autre des universités de Brest, Rennes et Toulouse, ce qui bien sûr multiplie en proportion les occasions de remerciements...

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à Dominique Cerveau pour son enthousiasme, sa disponibilité, pour m'avoir à l'occasion offert le gîte et le couvert et pour m'avoir donné la possibilité d'entrer de plain-pied dans le vaste monde de la recherche mathématique.

J'ai une pensée amicale pour tous les participants du thé-gâteaux du jeudi après-midi à Rennes, et tout particulièrement pour le cercle plus restreint des habitués du Tournebride, avec qui mes discussions ont été aussi diverses qu'enrichissantes...

Ce travail a été mené en grande partie dans le laboratoire de l'université de Brest. Je remercie tous les membres du département pour leur accueil et en particulier l'inimitable Bruno Wirtz grâce à qui j'ai pu très vite me sentir « chez moi » à l'UBO.

Je remercie également chaleureusement les toulousains Emmanuel Paul et Jean-François Mattei qui m'ont accordé leur confiance et leur soutien lorsque voici maintenant plus de deux ans j'ai manifesté ma volonté d'aller goûter à la pluie bretonne, et qui ont ensuite toujours suivi avec intérêt et bienveillance mes travaux.

Les résultats exposés au début du troisième chapitre sont largement le fruit de discussions avec Frank Loray : je lui en suis très reconnaissant. Etienne Ghys, Marcel Nicolau et Jean-Jacques Loeb m'ont également à divers moments de l'élaboration de ce travail aidé par leurs remarques. Je les remercie, ainsi que Christophe Bavard et François Berteloot, d'avoir accepté de participer au Jury de cette thèse.

Merci enfin à Felipe Cano et à toutes les personnes grâce à qui les activités liées au réseau TMR « Singularités d'Équations Différentielles et Feuilletages » ont été un succès, activités dont j'ai largement profité et qui ont sans nul doute contribué à réduire mon inculture mathématique.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	9
1.1 Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$	9
1.2 La théorie de Bass-Serre	12
1.3 Le point de vue de la théorie du potentiel	19
2 Classification des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$	28
2.1 Étude des automorphismes de type élémentaire	29
2.2 Les automorphismes de type Hénon	36
2.3 Applications à des questions dynamiques	43
2.4 Compléments et exemples	46
3 Dynamique des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$	52
3.1 Propriété de densité locale	52
3.2 Non-densité globale des orbites	64
4 Familles paramétrées d'éléments de Aut	73
4.1 Motivations	73
4.2 Structure du groupe $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$	74
Bibliographie	83

Introduction

Les systèmes dynamiques holomorphes qui ont fait l'objet de l'étude la plus approfondie sont sans doute les applications rationnelles sur la sphère de Riemann. Cependant, si l'on s'intéresse plus spécifiquement à la dynamique d'applications inversibles, alors les automorphismes polynomiaux du plan complexe sont certainement parmi les premiers exemples intéressants.

En 1976 Hénon [20] étudie à l'aide de simulations numériques les automorphismes quadratiques réels

$$(x, y) \rightarrow (y + 1 + ax^2, bx) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}^*$$

et met en évidence pour certaines valeurs des paramètres a et b la présence « d'attracteurs étranges » révélateurs d'un comportement chaotique. Cette famille d'applications du plan réel dans lui-même a par la suite été beaucoup étudiée (voir par exemple [7]), mais il peut sembler en fait plus naturel de travailler sur le corps des complexes où des techniques d'analyse vont pouvoir s'appliquer. On peut de plus se proposer d'étudier des applications de degré quelconque ; on est ainsi amené à considérer (suivant la terminologie de [15]) des composées d'applications de Hénon généralisées

$$g = g_n \circ \dots \circ g_1 \text{ où } g_i = (y, P_i(y) - \delta_i x) \text{ avec } \delta_i \in \mathbb{C}^*, P_i \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré } \geq 2$$

Notons que les applications étudiées par Hénon se ramènent (heureusement !) à des applications de Hénon généralisées en conjuguant par $(x, y) \rightarrow (y, bx)$.

L'automorphisme g ci-dessus admet une dynamique intéressante ; on introduit les ensembles de Julia J^+ et J^- qui correspondent aux régions de \mathbb{C}^2 où la dynamique des itérés positifs (resp. négatifs) de g est « chaotique ». Reprenant une idée développée par Broliin dans le cadre des applications rationnelles, Hubbard et Oberste-Vorth [21] associent à g (resp. à g^{-1}) une fonction de Green G^+ (resp. G^-) ou « escape function » qui mesure la vitesse à laquelle un point $z \in \mathbb{C}^2$ part à l'infini par itération positive (resp. négative) de g :

$$G^\pm(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|g^{\pm n}(z)\|$$

Sibony introduit les courants de Green

$$\mu^+ = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G^+ \text{ et } \mu^- = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G^-$$

dont les supports sont respectivement J^+ et J^- ; ainsi que la mesure invariante obtenue comme le produit extérieur de ces deux courants :

$$\mu = \mu^+ \wedge \mu^-$$

Ce point de vue a été à l'origine de nombreux travaux, en particulier par Sibony-Fornaess et Bedford-Smillie (on trouvera de nombreuses références dans les travaux récents [6], [13] et [30]).

Cependant le fait de considérer des automorphismes introduit un ingrédient algébrique qui n'a pas d'analogue dans la théorie des fractions rationnelles : la loi de composition permet de mettre une structure de groupe sur l'ensemble $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . Depuis Jung on connaît un système de générateurs pour ce groupe : il s'agit des automorphismes affines et élémentaires, ces derniers étant de la forme

$$(x, y) \rightarrow (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[X]$$

Plus précisément $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'écrit comme le produit amalgamé des sous-groupes affine et élémentaire. Cette structure algébrique très forte a permis d'obtenir de nombreux résultats qui restent encore des questions ouvertes en dimension supérieure :

Tout d'abord on obtient des formes normales. Ainsi par conjugaison dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on peut toujours se ramener à un automorphisme élémentaire ou à une composée d'applications de Hénon généralisées. Cette réduction est le point de départ du travail de Friedland et Milnor [15], et montre que dans un certain sens l'étude dynamique effectuée par les auteurs cités ci-dessus est exhaustive.

Deuxièmement, Wright [33] a décrit les sous-groupes abéliens de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Il distingue 3 types de tels sous-groupes G

1. G est conjugué à un sous-groupe affine ou élémentaire ;
2. $G = \bigcup_i G_i$ où les G_i sont conjugués à des sous-groupes de $A \cap E$;
3. $G = F \times \langle g \rangle$ où g est de type Hénon et F est conjugué à un sous-groupe de $A \cap E$.

et produit des exemples explicites, en particulier dans le cas 2.

Troisièmement, les groupes à un paramètre, autrement dit les actions algébriques du groupe $(\mathbb{C}, +)$, ont été très précisément décrits par Bass et Meister [3] : à conjugaison près on montre qu'un groupe à un paramètre est toujours un sous-groupe du groupe élémentaire :

Théorème (Bass-Meister) : *Un flot polynômial sur \mathbb{C}^2 se ramène par conjugaison à l'une des 5 formes normales suivantes :*

1. $\varphi_t = (x, e^{bt}y)$
2. $\varphi_t = (x+t, e^{bt}y)$
3. $\varphi_t = (x, y+tP(x))$
4. $\varphi_t = (e^{at}x, e^{bt}y)$
5. $\varphi_t = (e^{at}x, e^{adt}(y+tx^d))$

où $a, b \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

La réciproque est presque vraie : mis à part les automorphismes résonnants du type

$$(x, y) \rightarrow (\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y)$$

où $\beta^r = 1$, $d \geq 1$ et $q \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tout automorphisme élémentaire se plonge dans un flot polynômial.

Plus généralement, les représentations de groupes algébriques dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ ne contiennent jamais d'automorphismes de type Hénon (voir [33] ou [22]). Signalons ici le lien avec le théorème de Noether qui est un analogue du théorème de Jung pour les automorphismes birationnels de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Théorème (Noether) : *Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ des automorphismes birationnels de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est engendré par le groupe $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ des automorphismes biréguliers et par l'application quadratique*

$$\sigma : (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

N.B : Il est sans doute plus visible que σ est quadratique lorsqu'on utilise les coordonnées homogènes :

$$\sigma : [x : y : t] \rightarrow [yt : xt : xy]$$

Wright [34], s'appuyant sur des résultats d'Iskovskikh, a reformulé ce théorème en terme de produit amalgamé :

Théorème (Wright) : *Soient*

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{PGL}(3, \mathbb{C}) \\ A_2 &= (\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})) \rtimes \langle (y, x) \rangle \\ A_3 &= \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C}[X]) \end{aligned}$$

chacun étant identifié à un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{CP}^2)$ (voir ci-dessous). Alors $\text{Bir}(\mathbb{CP}^2)$ est le produit amalgamé de A_1 , A_2 et A_3 suivant leurs intersections.

Précisons les identifications ci-dessus. Pour A_1 c'est clair ; le groupe A_2 contient les applications de la forme

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'} \right)$$

et le groupe A_3 celles de la forme

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'(x)y + b'(x)}{c'(x)y + d'(x)} \right)$$

D'autre part un théorème classique d'Enriques (voir [32]) affirme que les sous-groupes algébriques connexes maximaux de $\text{Bir}(\mathbb{CP}^2)$ correspondent à la composante connexe des groupes d'automorphismes biréguliers associés aux modèles minimaux \mathbb{CP}^2 , $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ et $F_n (n \geq 2)$. Ces groupes sont respectivement A_1 , A_2 et

$$G^{(n)} = \left\{ (x, y) \rightarrow \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{ty + f(x)}{(cx + d)^n} \right); ad - bc = 1, t \in \mathbb{C}^*, \deg(f) \leq n \right\}$$

qui est pour tout n un sous-groupe de A_3 . Enfin, la trace sur $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des groupes A_1, A_2 et A_3 consiste en les groupes affine et élémentaire (ou plus exactement, la trace de A_3 consiste en le groupe élémentaire conjugué par (y, x)).

Une de nos motivations était d'étudier des sous-groupes à l'opposé des exemples ci-dessus, i.e des sous-groupes contenant beaucoup d'automorphismes de type Hénon. Une première partie du travail a consisté à décrire précisément les groupes que nous voulions considérer comme « simples », et qui se sont avérés être d'une part les groupes résolubles, d'autre part les sous-groupes du groupe affine de \mathbb{C}^2 . Dans un deuxième temps nous nous sommes proposés d'étudier une propriété dynamique des sous-groupes généraux, à savoir l'existence éventuelle d'orbites denses. Enfin, tentant une incursion dans le monde de la dimension 3, nous nous sommes proposés de décrire le « groupe orthogonal non linéaire » de \mathbb{C}^3 . Nous présentons maintenant en détail le contenu de notre travail.

Dans un premier chapitre nous avons regroupé des résultats et définitions préliminaires. Nous commençons par énoncer le théorème de structure (théorème 1.1) qui décrit $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ comme un produit amalgamé, et suivant [15] nous en déduisons la dichotomie entre automorphismes de type élémentaire et de type Hénon. D'après la théorie de Bass-Serre, la structure de produit amalgamé permet de voir chaque automorphisme de \mathbb{C}^2 comme une isométrie d'un certain arbre. Nous rappelons cette construction ainsi que quelques faits élémentaires sur les isométries d'un arbre. On s'aperçoit que l'isométrie associée à un

automorphisme de type élémentaire admet un arbre fixé non vide ; a contrario dans le cas d'un automorphisme de type Hénon il existe une géodésique infinie dans l'arbre sur laquelle g induit une translation. Nous considérons ensuite un autre point de vue pour étudier $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$: celui de la théorie du potentiel. Nous rappelons les notions d'ensemble de Julia, de fonction et courant de Green attachés à une application de Hénon. Ces objets ont été introduits et étudiés par plusieurs auteurs (Hubbard-Oberste Vorth, Sibony-Fornaess, Bedford-Smillie), mais toujours dans le cadre d'un automorphisme ramené par conjugaison à une composée d'applications de Hénon généralisées. Nous proposons une extension naturelle de ces définitions qui deviennent ainsi valables pour tout automorphisme portant une dynamique « sauvage » (automorphisme « de type Hénon » dans notre terminologie, les automorphismes « de type élémentaire » étant précisément les automorphismes dont la dynamique est simple).

Le chapitre 2 est consacré dans un premier temps à la preuve d'un théorème de classification des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (nous appelons groupe de degré 1 un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ dont tous les éléments sont de type élémentaire) :

Théorème 2.1 *Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On a quatre cas distincts possibles :*

1. *G est un groupe de degré 1 conjugué à un sous-groupe du groupe élémentaire ou du groupe affine.*
2. *G est un groupe de degré 1 mais n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe élémentaire ou du groupe affine. Dans ce cas G est abélien.*
3. *G contient des éléments de type Hénon, et ceux-ci ont tous même géodésique. Alors G est résoluble et contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} d'indice fini.*
4. *G contient deux éléments de type Hénon avec des géodésiques différentes. Alors G contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

Ce résultat prolonge la classification de Wright des sous-groupes abéliens ; en particulier nous obtenons une description des sous-groupes résolubles et nous en déduisons une alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (corollaire 2.2). A noter que même si le théorème 2.1 est énoncé en profitant du fait que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ agit sur un arbre, il ne découle bien sûr pas automatiquement de la machinerie développée par Bass et Serre. En particulier le point clé que constitue la proposition 2.5 est très particulier au groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$: il s'agit d'une description des éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui fixent un sous-arbre non borné.

Ce sont des questions de nature dynamique qui initialement ont motivé notre étude des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Dans un deuxième temps nous appliquons donc ces résultats aux problèmes suivants :

1. *Sous quelles conditions deux automorphismes f et g de type Hénon ont-ils même ensemble de Julia ?*

Nous verrons (théorème 2.24) que cela revient à dire que f et g ont même géodésique associée ; nous sommes dans le cas 3 du théorème 2.1. On peut alors montrer qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $f^n = g^m$. Cependant f et g peuvent ne pas commuter (remarque 2.19.3).

2. Quels sont les automorphismes qui laissent invariant un bassin d'attraction ?

Nous considérons donc g de type Hénon, p un point fixe attractif de g et Σ le bassin correspondant. Le groupe $\text{Aut}[\Sigma]$ des automorphismes qui laissent globalement invariant Σ est encore décrit par le cas 3 du théorème. Nous montrons en effet (proposition 2.25) qu'il s'agit des automorphismes qui fixent p , et dont l'action sur l'arbre laisse invariante la géodésique associée à g .

3. Les groupes abéliens décrits par le cas 2 du théorème sont-ils linéarisables ?

Nous commençons par montrer que ces groupes sont toujours formellement linéarisables. Nous produisons ensuite d'une part un exemple où la linéarisante est strictement formelle, d'autre part un exemple où la linéarisante est un biholomorphisme de \mathbb{C}^2 .

De ces résultats il ressort un début de dictionnaire entre le vocabulaire « arbre de Bass-Serre » et le vocabulaire « courant de Green ». En effet un automorphisme g de type Hénon détermine deux bouts de l'arbre (les deux bouts de la géodésique associée), et g détermine également deux courants μ^+ et μ^- . Dire que $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ préserve le support de μ^+ (i.e J^+) c'est dire que f préserve un bout de l'arbre. Dire que f échange J^+ et J^- c'est dire que f agit par symétrie centrale sur $\text{Géo}(g)$. On remarque que les groupes abéliens qui apparaissent dans le cas 2 du théorème fixent un bout de l'arbre. Ainsi une manière de poursuivre ces analogies serait d'associer un courant à un tel groupe...

Dans le chapitre 3 nous nous intéressons à la dynamique des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, et plus précisément à l'existence éventuelle d'orbites denses, aussi bien d'un point de vue local que global. Tout d'abord, considérant un résultat bien connu en dimension 1, il semblait naturel d'espérer la densité locale des orbites sous une condition de généricité des parties linéaires. Suivant une démarche suggérée par Frank Loray c'est en effet ce que nous montrons dans le

Théorème 3.1 *Soient $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ deux difféomorphismes locaux à l'origine de \mathbb{C}^2 . On suppose que les parties linéaires de f et g engendrent un sous-groupe dense de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$. Alors le pseudo-groupe engendré par f et g est localement à orbites denses.*

Cependant le passage du cadre commutatif en dimension 1 (au niveau des parties linéaires : $\text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$) au cadre non commutatif en dimension 2 ($\text{GL}(2, \mathbb{C})$) modifie et complique la démonstration. Une première étape consiste d'ailleurs à montrer que l'hy-

pothèse de densité des parties linéaires est générique dans un certain sens (proposition 3.4), ce qui est loin d'être aussi immédiat qu'en dimension 1.

Considérons maintenant la question d'un point de vue global. La classification des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ nous permet de voir qu'il existe beaucoup de groupes où tous les automorphismes (sauf l'identité) sont de type Hénon. Pour un tel groupe (de type fini) nous montrons qu'il existe un ouvert adhérent à l'infini sur lequel les orbites sont discrètes :

Théorème 3.9 *Soit $G \subset \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ un groupe de type fini dont tous les éléments (sauf l'identité) sont de type Hénon. Alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ tel que*

1. *l'adhérence de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus U$ ne contient qu'un nombre fini de points de la droite à l'infini ;*
2. *pour tout $z \in U$, l'orbite de z par G est discrète.*

En particulier si un sous-groupe de type fini de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ admet une orbite dense globale alors il contient un automorphisme de type élémentaire non trivial. Les théorèmes 3.1 et 3.9 montrent que les comportements local et global d'un groupe $G \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ peuvent être radicalement différents : peuvent coexister des zones de densité, des zones à dynamique chaotique (ensembles de Julia) et des zones à orbites discrètes.

Au vu de ces résultats sur $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ se pose la question de leur généralisation en dimension supérieure. Le principal obstacle est l'absence d'un théorème de structure analogue au théorème 1.1 ; en fait sans même parler d'une structure de produit amalgamé il est déjà douteux que tous les éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^3]$ soient modérés, i.e décomposables en automorphismes affines et élémentaires. Nagata [27] a proposé un automorphisme polynômial de \mathbb{C}^3 qui est plongeable dans un groupe à un paramètre, qui préserve la forme quadratique $y^2 + xz$ et qui semble cependant être un candidat sérieux à être un exemple d'automorphisme non modéré. Ces remarques, ainsi qu'une question posée par Drensky et Yu [11], ont motivé l'étude du groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^3 qui préservent la forme $y^2 + xz$. Nous montrons dans le chapitre 4 que l'étude de ces automorphismes peut se ramener à l'étude de certaines familles à paramètre polynômial d'automorphismes de \mathbb{C}^2 . Ceci est intéressant car le théorème de Jung est valable indépendamment du corps de base ; en particulier il s'applique sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(t)$. Ainsi un automorphisme de l'algèbre des polynômes à deux variables à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}[t]$ se décompose en un produit d'automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(t)$. De cette manière nous obtenons une description précise du « groupe orthogonal non linéaire » sur \mathbb{C}^3 , et mettons en évidence une propriété de décomposition « en passant du polynômial au rationnel ». Ces résultats semblent suggérer qu'il est peut-être plus naturel de chercher un théorème de structure pour le groupe $\text{Bir}(\mathbb{C}P^3)$ des

automorphismes birationnels de $\mathbb{C}P^3$ plutôt que pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^3]$ (ce dernier pouvant bien sûr être vu comme un sous-groupe de $\text{Bir}(\mathbb{C}P^3)$). Autrement dit le bon théorème à généraliser serait celui de Noether-Wright et non pas celui de Jung...

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

Le principal objet d'étude de cette thèse est le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan complexe. Un tel automorphisme consiste en la donnée d'une application bijective :

$$f : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)) \in \mathbb{C}^2$$

où $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$. A noter qu'en supposant f polynomiale bijective (et même seulement injective) on récupère automatiquement f^{-1} polynomiale (voir [1]) ; il n'en serait pas de même si nous travaillions par exemple sur le corps des réels. Par la suite nous commettrons presque systématiquement les abus d'écriture suivant : nous écrirons $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ pour désigner un élément $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (au lieu de $f : (x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$), et nous noterons $(f_1(x, y), f_2(x, y)) \circ (g_1(x, y), g_2(x, y))$ la composée de deux automorphismes. Comme d'habitude f^n désignera l'itéré $n^{\text{ième}}$ de l'automorphisme f .

Suivant les notations de [15] nous introduisons deux sous-groupes naturels de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$:

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) \rightarrow (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, P \in \mathbb{C}[X]\} \\ A &= \{(x, y) \rightarrow (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2); a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

Nous dirons que E est le groupe des automorphismes *élémentaires* (aussi appelés parfois « triangulaires » ou « de Jonquières ») ; ce sont exactement les automorphismes qui préservent le feuilletage « horizontal » $dy = 0$. Bien sûr A est le groupe des automorphismes *affines*, et nous noterons $S = A \cap E$ le groupe des automorphismes affines triangulaires, autrement dit :

$$S = \{(x, y) \rightarrow (a_1x + b_1y + c_1, b_2y + c_2); a_1, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 \neq 0\}$$

Nous énonçons maintenant un théorème de structure pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui sera fondamental pour la suite. A priori ce résultat est très particulier à la dimension 2 ; il est dû initialement à Jung (1942) et a été démontré depuis de diverses manières (voir [26] pour une preuve moderne et de nombreuses références).

Théorème 1.1 (Jung) *Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est le produit amalgamé des sous-groupes E et A suivant leur intersection S .*

Précisons la notion de produit amalgamé. Considérons G un groupe et $G_1, G_2 \subset G$ deux sous-groupes. Le produit amalgamé de G_1 et G_2 (suivant leur intersection) est le groupe noté $G_1 *_{\cap} G_2$ défini par générateurs et relations de la manière suivante : on prend comme générateurs l'union disjointe de G_1 et de G_2 , et comme relations d'une part les xyz^{-1} où $x, y, z \in G_i$ et $z = xy$ dans G_i , d'autre part les xy^{-1} où x et y sont un même élément de $G_1 \cap G_2$ vu respectivement comme un élément de G_1 ou de G_2 . Les groupes G_1 et G_2 s'identifient naturellement à des sous-groupes de $G_1 *_{\cap} G_2$. On dit que G est le *produit amalgamé* de G_1 et G_2 si les inclusions $G_i \subset G$ induisent un isomorphisme $G_1 *_{\cap} G_2 \cong G$. Ce produit est dit *trivial* si l'un des G_i est le groupe G tout entier.

Revenons au groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Une manière de paraphraser le théorème 1.1 est de dire que tout automorphisme $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ non inclu dans S s'écrit comme une composition :

$$\varphi = a_1 \circ e_1 \circ \cdots \circ a_n \circ e_n$$

où $a_i \in A \setminus E$, $e_i \in E \setminus A$ (éventuellement l'écriture commence par e_1 et/ou finit par a_n). De plus cette écriture est unique modulo les relations naturelles suivantes :

$$\begin{aligned} a_i \circ e_i &= (a_i \circ s) \circ (s^{-1} \circ e_i) \\ e_{i-1} \circ a_i &= (e_{i-1} \circ s') \circ (s'^{-1} \circ a_i) \end{aligned}$$

où $s, s' \in S$.

D'un point de vue dynamique, les automorphismes affines et élémentaires ont un comportement relativement simple. En fait sauf dans certain cas résonnants un automorphisme élémentaire se ramène par conjugaison à une application affine. De manière générale l'ensemble des point fixes d'un automorphisme élémentaire f est vide, réduit à un point ou égal à une courbe. Cependant il existe des éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui admettent une dynamique « sauvage ». Nous appellerons automorphisme de Hénon généralisé un automorphisme de la forme :

$$(x, y) \rightarrow (y, P(y) - \delta x) \quad , \delta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré } \geq 2$$

le signe $-$ étant choisi de manière à avoir un déterminant jacobien égal à δ . Le théorème 1.1 affirme en particulier que chacun de ces automorphismes se décompose dans le produit

amalgamé $A *_{\cap} E$, et en effet :

$$(y, P(y) - \delta x) = \underbrace{(y, x)}_{\in A \setminus E} \circ \underbrace{(-\delta x + P(y), y)}_{\in E \setminus A}$$

Le résultat suivant, établi dans [15], est une conséquence directe du théorème de structure.

Proposition 1.2 *Soit $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On a l'alternative :*

1. f est conjugué à un élément de E ;
2. f est conjugué à une composée d'applications de Hénon généralisée i.e

$$f = \varphi \circ g_m \circ \cdots \circ g_1 \circ \varphi^{-1}$$

où $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, $g_i = (y, P_i(y) - \delta_i x)$ avec $\delta_i \in \mathbb{C}^*$, et $P_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2 .

Nous dirons respectivement que f est de *type élémentaire* ou de *type Hénon*, et nous noterons \mathcal{H} le semi-groupe des composées d'applications de Hénon généralisées. Remarquons que les automorphismes affines sont de type élémentaire (c'est la triangulation des matrices).

On peut reformuler cette proposition en introduisant la notion de degré dynamique. Définissons tout d'abord le *degré algébrique* $d^\circ f$ d'un automorphisme $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ comme le maximum des degrés de f_1 et f_2 . Ce degré n'étant pas un invariant dynamique, il est commode de poser (cf. [10], et également [15] rem. 4-3) :

$$d(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (d^\circ f^n)^{1/n}$$

Ceci définit bien un entier invariant par conjugaison, c'est le *degré dynamique* de f . On remarque que pour un élément de \mathcal{H} les degrés algébrique et dynamique coïncident ; plus précisément si $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ où les g_i sont des applications de Hénon généralisées un calcul simple montre qu'on a (cf. [15]) :

$$d(g) = \prod_i d^\circ g_i \geq 2$$

A contrario pour un automorphisme $f \in E$ on remarque que $d^\circ f = d^\circ f^n$ d'où $d(f) = 1$. On en déduit les équivalences :

$$d(g) = 1 \Leftrightarrow g \text{ est conjugué à un élément de } E$$

$$d(g) \geq 2 \Leftrightarrow g \text{ est conjugué à un élément de } \mathcal{H}$$

1.2 La théorie de Bass-Serre

D'une manière générale, à tout groupe G qui s'écrit comme le produit amalgamé de deux de ses sous-groupes on peut associer un arbre sur lequel G agit par isométries. En fait, il y a équivalence entre

1. G est un produit amalgamé (non trivial) de deux de ses sous-groupes.
2. G agit sur un arbre (simplicial) avec comme domaine fondamental une arête.

Ceci est l'exemple basique de la théorie de Bass-Serre [29] qui décrit la structure des groupes agissant sur un arbre. Nous allons ici décrire l'arbre associé à la structure de produit amalgamé $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_\cap E$.

1.2.1 Construction de l'arbre

Par *graphe* on entend un CW-complexe de dimension au plus 1 (c'est donc plutôt la réalisation d'un graphe, voir [29] pp 22–23). Ainsi pour construire un graphe Γ il suffit de se donner un ensemble X indiquant les sommets, un ensemble Y indiquant les arêtes et une application de recollement $R : y \in Y \rightarrow (R_0(y), R_1(y)) \in X \times X$. On pose alors

$$\Gamma = (X \sqcup Y \times [0, 1]) / \sim \quad \text{où} \quad \begin{cases} (y, 0) \sim x & \text{si } R_0(y) = x \\ (y, 1) \sim x & \text{si } R_1(y) = x \end{cases}$$

Un *arbre* est un graphe connexe simplement connexe. A noter que nous ne faisons aucune hypothèse de finitude : d'un sommet peut partir un nombre infini (éventuellement non dénombrable) d'arêtes.

On construit un arbre \mathcal{T} associé à $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de la manière suivante. On définit l'ensemble des sommets comme l'union disjointe des classes à gauche $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] / A$ et des classes à gauche $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] / E$. Ainsi un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ détermine deux sommets notés respectivement φA et φE . Bien sûr on a $\varphi_1 A = \varphi_2 A$ si et seulement si $\varphi_1^{-1} \varphi_2 \in A$ (même chose avec E). On prend l'ensemble des arêtes égal à l'ensemble des classes à gauche $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] / S$, et par définition l'arête φS relie les sommets φA et φE . En reprenant le langage de la définition d'un graphe ci-dessus, l'application de recollement est $R : \varphi S \rightarrow (\varphi A, \varphi E)$. Autrement dit, deux sommets $\varphi_1 A$ et $\varphi_2 E$ sont reliés par une arête $\varphi_3 S$ si et seulement si $\varphi_3 S \subset \varphi_1 A$ et $\varphi_3 S \subset \varphi_2 E$ (et donc dans ce cas $\varphi_1^{-1} \varphi_3 \in A$ et $\varphi_2^{-1} \varphi_3 \in E$). On a ainsi défini un graphe \mathcal{T} ; reste à vérifier que ce graphe est un arbre. La connexité se montre en écrivant $\varphi A = (a_1 \circ e_1 \circ \dots \circ a_n \circ e_n) A$ et en remarquant que les arêtes $a_1 S$, $(a_1 \circ e_1) S$, ..., $(a_1 \circ e_1 \circ \dots \circ a_n \circ e_n) S$ forment un chemin reliant $Id A$ à φA (même chose avec φE). D'autre part dire que \mathcal{T} ne contient pas de cycle revient à dire que le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ n'admet pas de relation de la forme $a_1 \circ e_1 \circ \dots \circ a_n \circ e_n = Id$ autre que les relations triviales lorsque les a_i et e_j sont dans S , et c'est précisément la définition d'un produit amalgamé (pour le détail de ces arguments voir [29]; la figure 1.1 peut éventuellement

suffire à se convaincre). Soulignons que par construction les sommets de \mathcal{T} sont répartis en deux classes suivant s'ils s'écrivent φA ou φE ; on dira respectivement qu'un sommet est *de type A* ou *de type E*.

Il existe une métrique naturelle sur l'ensemble des sommets de \mathcal{T} : si p, q sont deux sommets, $\text{dist}(p, q) \in \mathbb{N}$ est le nombre d'arêtes du chemin sans aller-retour reliant p à q . Cette métrique se prolonge à \mathcal{T} tout entier en décidant que chaque arête est isométrique à l'intervalle $[0, 1]$. Etant donné un sous-arbre \mathcal{T}' de \mathcal{T} nous définissons le *diamètre* de \mathcal{T}' comme la borne

$$\sup_{p, q \in \mathcal{T}'} \text{dist}(p, q)$$

qui est donc incluse dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

L'intérêt de l'arbre \mathcal{T} est bien sûr qu'il existe une action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur \mathcal{T} ; c'est simplement la translation à gauche : $g(hE) = (g \circ h)E$ (idem avec les sommets de type A). Plus précisément, la translation à gauche induit une isométrie sur les sommets de \mathcal{T} , et cette isométrie se prolonge de manière unique en une isométrie de \mathcal{T} . Nous verrons dès la section 2.1 que la translation à gauche induit une représentation fidèle de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ dans les isométries de \mathcal{T} , ce qui nous conduira par la suite à confondre un élément f de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec son action sur \mathcal{T} .

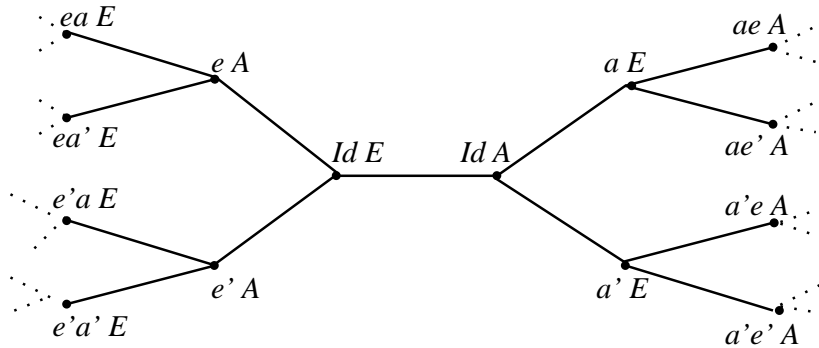


FIGURE 1.1 – Quelques sommets de l'arbre \mathcal{T} ($a, a' \in A \setminus E; e, e' \in E \setminus A$)

1.2.2 Quelques fait généraux sur les isométries d'un arbre

Soit X un arbre (muni de la métrique naturelle). Une isométrie de X est dite *simpliciale* si elle envoie sommet sur sommet, et *sans inversion* si toute arête fixée globalement est en fait fixée point par point. Le groupe des isométries simpliciales sans inversion de X sera noté $\text{Isom}(X)$. On associe à $f \in \text{Isom}(X)$ une fonction longueur :

$$p \in X \rightarrow \text{dist}(p, f(p)) \in \mathbb{R}^+$$

Proposition 1.3 1. Avec les hypothèses ci-dessus il existe un point dans X qui réalise la borne inférieure

$$l = \inf_p \text{dist}(p, f(p))$$

2. Si $l > 0$ l'ensemble des points qui réalisent cette borne l forme une géodésique infinie (i.e un sous-arbre isométrique à la droite réelle) sur laquelle f agit par translation de longueur l .
3. Si $l = 0$ l'ensemble des points fixés par f forme un sous-arbre de X .

Preuve. Pour les points 2 et 3 nous renvoyons à [29]. Pour montrer le point 1 (qui semble être admis implicitement dans [29], mais voir [17]), considérons q un point de X , c_1, c_2 les chemins reliant respectivement q à $f(q)$ et $f(q)$ à $f^2(q)$, et $c_3 = c_1 \cap c_2$. On distingue 3 cas (cf. fig. 1.2) :

- a. Si $c_3 = f(q)$ alors les itérés de c_1 par f forment une géodésique infinie dont tous les points (et en particulier q) réalisent l .
- b. Si la longueur de c_3 est strictement inférieure à la moitié de la longueur de c_1 , on pose q' égal à l'extrémité de c_3 différente de $f(q)$. Alors q' réalise la borne l d'après le point 1.
- c. Si la longueur de c_3 est supérieure ou égale à la moitié de la longueur de c_1 , alors il est facile de voir que le milieu q' de c_1 est fixé par f (et donc $l = 0$ est réalisé). \square

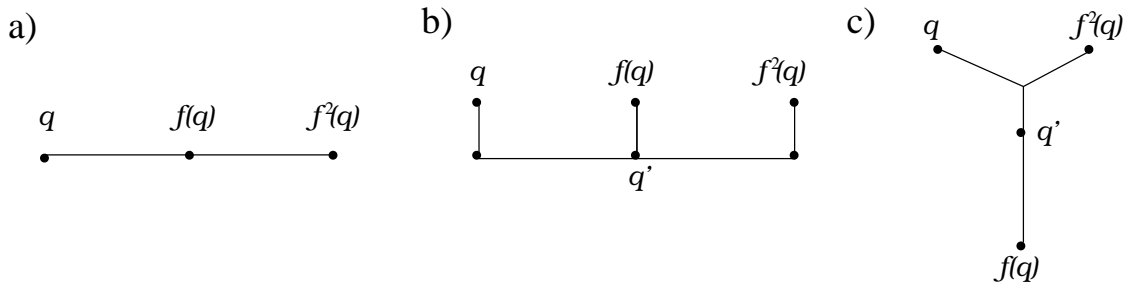


FIGURE 1.2 – Les 3 cas de la proposition 1.3

A noter que la preuve implique que dans tous les cas, si q est un point quelconque de X , le milieu du chemin reliant q à $f(q)$ réalise la borne l . Par analogie avec le langage de la géométrie hyperbolique, on dira respectivement que f est une isométrie *hyperbolique* ou *elliptique* suivant que l'on est dans les cas 2 ou 3 de la proposition. Nous noterons $\text{Fix}(f)$ le sous-arbre fixé par f , et dans le cas hyperbolique (i.e quand $\text{Fix}(f) = \emptyset$) nous noterons respectivement $\text{Géo}(f)$ et $\text{lg}(f)$ la géodésique infinie associée à f et la longueur de la translation induite par f sur cette géodésique. Remarquons qu'il n'existe pas d'analogue des isométries paraboliques (i.e qui n'admettent qu'un seul point fixe à l'infini).

Nous énonçons maintenant 3 lemmes en vue de montrer une proposition sur les groupes d'isométries dont tous les éléments sont elliptiques.

Lemme 1.4 *Soit $G \subset \text{Isom}(X)$ un sous-groupe dont tous les éléments sont elliptiques, et soient $f, g \in G$. Alors $\text{Fix}(g) \cap \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.*

Preuve. L'idée est de considérer $p \in \text{Fix}(g \circ f)$, et q le milieu du chemin reliant p à $f(p)$. Alors $q \in \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$ (cf. [29], pp 89). \square

Lemme 1.5 *Soient X un arbre, et X_1, \dots, X_n des sous-arbres deux à deux non disjoints. Alors $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$.*

Preuve. cf. [29], pp 91. \square

Lemme 1.6 *Soient X un arbre, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-arbres de X , tel que :*

1. $X_i \cap X_j \neq \emptyset \quad \forall i, j \in I$;
2. *Il existe Y un sous-arbre borné de X , tel que $\forall i \in I, X_i \subset Y$.*

Alors $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur le diamètre n de Y . Si $n = 0$ (i.e si Y est réduit à un seul sommet), alors pour tout i on a $X_i = Y$ et donc $\bigcap_i X_i = Y$. Si $n \geq 1$, alors ou bien il existe un sommet terminal de Y (i.e un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête) contenu dans tous les X_i , ce qui termine la démonstration, ou bien il n'en existe pas et on continue le raisonnement avec $Y' := Y \setminus \{ \text{sommets et arêtes terminales de } Y \}$, $X'_i := X_i \cap Y'$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer la

Proposition 1.7 *Soit $G \subset \text{Isom}(X)$ un sous-groupe dont tous les éléments sont elliptiques. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. G est de type fini ;
2. G contient un élément f dont l'ensemble des points fixes $\text{Fix}(f)$ est borné.

Alors G fixe au moins un sommet de X .

Preuve. Dans le cas où G est de type fini, notons $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ et $X_i = \text{Fix}(g_i)$. Le lemme 1.4 dit alors que les X_i sont deux à deux non disjoints, et donc par le lemme 1.5 leur intersection globale contient au moins un sommet p . Ce sommet p est bien fixé par G .

Plaçons-nous maintenant dans le cas 2, i.e il existe $f \in G$ avec $\text{Fix}(f)$ borné. Pour chaque $g \in G$ on note maintenant $X_g = \text{Fix}(g) \cap \text{Fix}(f)$ (non vide par le lemme 1.4). Si $g_1, g_2 \in G$, le lemme 1.5 assure $\text{Fix}(g_1) \cap \text{Fix}(g_2) \cap \text{Fix}(f)$ non vide, en particulier $X_{g_1} \cap X_{g_2} \neq \emptyset$. On est alors exactement dans les conditions du lemme 1.6 puisque chaque élément de la famille $(X_g)_{g \in G}$ est contenu dans l'arbre borné $\text{Fix}(f)$. Ainsi G est encore inclu dans le stabilisateur d'un sommet p (où $p \in \bigcap_g X_g$). \square

Nous dirons qu'un sous-groupe $G \subset \text{Isom}(X)$ est *elliptique* s'il fixe un sommet de X , et *parabolique* si tous ses éléments sont elliptiques mais qu'ils n'admettent pas de point fixe commun.

1.2.3 Action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur l'arbre

Revenons au cas du groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Par construction le stabilisateur du sommet IdE (resp. IdA) est le groupe E (resp. A). En effet :

$$f(IdE) = IdE \iff fE = IdE \iff f \in E$$

Ceci implique immédiatement que pour tout $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, gEg^{-1} est le stabilisateur du sommet gE (idem avec le sommet gA et l'arête gS).

Terminologie : Pour un élément f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ il est ainsi équivalent de dire que f est de type élémentaire, que $d(f) = 1$ et que f est elliptique (en toute rigueur on devrait dire : l'isométrie induite par f est elliptique). A noter que dans ce cas $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, où $\text{Fix}(f)$ est l'arbre fixé par l'isométrie induite par f (et non pas l'ensemble des points fixes de f dans \mathbb{C}^2 !). De même sont équivalents : f est de type Hénon, $d(f) \geq 2$ et f est hyperbolique. Dans la suite on emploiera les trois terminologies.

Enfin, on dira qu'un sous-groupe G de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est *de degré 1* si tous ses éléments sont de type élémentaire. Cela revient à dire que G est elliptique ou parabolique vu comme groupe d'isométries de \mathcal{T} .

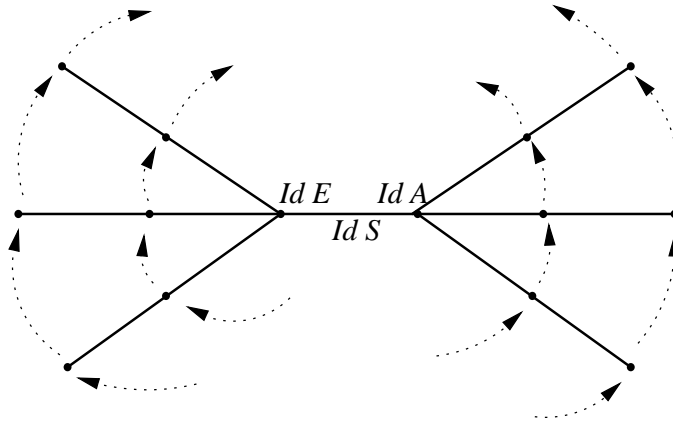


FIGURE 1.3 – Action d’un automorphisme f avec $\text{Fix}(f) = \{IdS\}$

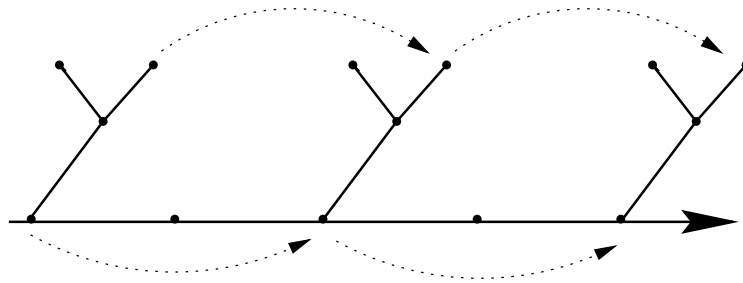


FIGURE 1.4 – Action d’un automorphisme f avec $\text{Fix}(f) = \emptyset$ et $\text{lg}(f) = 2$

La remarque suivante regroupe quelques propriétés immédiates :

- Remarque 1.8**
1. Pour tout g de type Hénon $\text{lg}(g)$ est pair, car un sommet de type E (resp. de type A) est toujours envoyé par g sur un sommet de type E (resp. de type A).
 2. Si $d(g) \geq 2$, et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\text{Géo}(g^n) = \text{Géo}(g)$ et $\text{lg}(g^n) = |n| \cdot \text{lg}(g)$.
 3. Si $d(f) = 1$ et $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, alors $\text{Fix}(\varphi f \varphi^{-1}) = \varphi \cdot \text{Fix}(f)$.
 4. De même, si $d(g) \geq 2$, $\text{Géo}(\varphi g \varphi^{-1}) = \varphi \cdot \text{Géo}(g)$.

1.2.4 Ecritures normales

Nous avons vu que chaque f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] \setminus S$ admet une décomposition de la forme $f = a_n \circ e_n \circ \dots \circ a_1 \circ e_1$ où $a_i \in A \setminus S$, $e_i \in E \setminus S$ (éventuellement f commence par un e_i ou

finit par un a_i), et cette écriture est unique à ceci près qu'on peut faire des changements du type $(a_i \circ s^{-1}) \circ (s \circ e_i)$ au lieu de $a_i \circ e_i$ (où $s \in S$). En particulier la *taille* de f que l'on notera $t(f)$, i.e le nombre de e_i et de a_i nécessaires pour écrire f , est bien définie (nous poserons $t(f) = 0$ pour tout $f \in S$). Nous dirons que f est *cycliquement réduit* si f est de taille minimale dans sa classe de conjugaison. On voit qu'un inconvénient de la notion de produit amalgamé est que l'on n'a pas immédiatement une écriture unique pour chaque élément de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (comme dans le cas d'un produit libre). Cependant nous allons voir que si on se donne $(a_i)_{i \in I}$ et $(e_j)_{j \in J}$ des systèmes de représentants des classes à gauche A/S et E/S , on récupère une écriture unique pour chaque éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, ainsi que pour chaque sommet et arête de \mathcal{T} .

Etant donné de tels systèmes, considérons l'ensemble M des mots obtenus en juxtaposant alternativement un nombre fini de a_i et de e_j :

$$M = \{a_{i_0} e_{j_1} \dots e_{j_n} a_{i_n}; \text{ où les } a_{i_k}, e_{j_k} \text{ sont non triviaux sauf éventuellement } a_{i_0} \text{ et } a_{i_n}\}$$

On a alors une bijection ([S], pp 9) :

$$\begin{aligned} M \times S &\rightarrow \text{Aut}[\mathbb{C}^2] \\ (a_{i_0} e_{j_1} \dots a_{i_n}, s) &\rightarrow a_{i_0} \circ e_{j_1} \circ \dots \circ a_{i_n} \circ s \end{aligned}$$

D'où les bijections :

$M \rightarrow$ arêtes de \mathcal{T} ;

$M^e \rightarrow$ sommets de type φA de \mathcal{T} ;

$M^a \rightarrow$ sommets de type φE de \mathcal{T} .

où M^e (resp. M^a) désigne l'ensemble des mots dans M dont le dernier élément (non trivial) est un e_j (resp. un a_i).

Tout ceci sera utile en pratique si on peut expliciter des systèmes de représentants (a_i) et (e_j) suffisamment simples. Suivant Wright [33], nous définissons pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et pour tout $P \in Y^2\mathbb{C}[Y] \setminus \{0\}$ (i.e P est un polynôme non nul avec $P(0) = P'(0) = 0$) :

$$a(\lambda) = (\lambda x + y, x)$$

$$e(P) = (x + P(y), y)$$

Alors les $(a(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{C}}$ (resp. les $(e(P))_{P \in Y^2\mathbb{C}[Y] \setminus \{0\}}$) forment un système de représentants des classes à gauche non triviales A/S (resp. E/S). Ainsi un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'écrit de manière unique comme une composition de $a(\lambda)$ et de $e(P)$ (corrigée par un automorphisme $s \in S$ composé à droite) : on dira que c'est l'*écriture normale* de φ . De même on parlera d'écriture normale pour les sommets et arêtes de \mathcal{T} .

Exemple : Considérons l'application de Hénon $g = (y, y^2 + \delta x)$. On a $t(g) = 2$; son écriture normale est

$$g = a(0) \circ e(y^2) \circ (\delta x, y)$$

L'automorphisme g correspond à une arête gS et à deux sommets gE, gA qui admettent respectivement comme écriture normale $a(0)e(y^2)S, a(0)E, a(0)e(y^2)A$.

- Remarque 1.9** 1. Etant donné g de type Hénon, il est équivalent de dire que g est cycliquement réduit et que $\text{Géo}(g)$ contient l'arête IdS . En effet il est clair que $\text{dist}(IdE, gE) = \text{dist}(IdA, gA)$ si et seulement si $IdS \subset \text{Géo}(g)$, et dans ce cas cette distance est égale à la taille de g . Or g est cycliquement réduit si et seulement si $t(g) = \text{lg}(g)$.
2. Tous les $a(\lambda)$ et $e(P)$ fixent l'origine dans \mathbb{C}^2 , on en déduit que $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ fixe 0 si et seulement s'il s'écrit $f = a(\lambda_0) \circ e(P_1) \circ \dots \circ a(\lambda_n) \circ s$ avec $s(0) = 0$, i.e $s = (a_1x + b_1y, b_2y)$.

1.3 Le point de vue de la théorie du potentiel

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats concernant la dynamique des automorphismes de type Hénon ; pour plus de détails on consultera [5, 13, 30].

Considérons donc $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon ; on a vu (prop. 1.2) que l'on pouvait écrire $f = \varphi g \varphi^{-1}$ où $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et g est une composée d'applications de Hénon généralisées. On définit :

$$\begin{aligned} K_f^\pm &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que la suite } \{f^{\pm n}(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée}\} \\ J_f^\pm &= \partial K_f^\pm \text{ où } \partial \text{ est le bord topologique} \end{aligned}$$

Nous dirons que J_f^+ est l'ensemble de Julia (positif) associé à f ; l'ensemble K_f^+ est parfois appelé ensemble de Julia « plein ». On peut montrer que J_f^+ est exactement l'ensemble des points au voisinage desquels la famille $\{f^n\}_{n>0}$ des itérés de f n'est pas normale ; on retrouve ainsi la définition classique de l'ensemble de Julia dans le cadre des fonctions rationnelles. L'idée est maintenant d'associer à f un courant dont le support soit exactement l'ensemble de Julia. Commençons par décrire les constructions classiques pour l'automorphisme $g \in \mathcal{H}$. Tout d'abord on introduit la fonction de Green

$$G_g^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|g^n\|$$

où $\log^+(x) = \max(0, \log(x))$. C'est une application de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{R}^+ continue plurisous-harmonique et qui vérifie les propriétés :

1. $K_g^+ = \{z \in \mathbb{C}^2; G_g^+(z) = 0\}$
2. $G_g^+ \circ g = d(g).G_g^+$
3. G_g^+ est pluriharmonique sur $U_g^+ = \mathbb{C}^2 \setminus K_g^+$

On définit alors le *courant de Green* positif fermé de type (1,1) :

$$\mu_g^+ = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G_g^+ = \frac{i}{\pi} \sum \frac{\partial^2 G_g^+}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

où les dérivées dans le membre de droite sont prises au sens des distributions (i.e définies par dualité : $\langle \partial \bar{\partial} G_g^+, \psi \rangle := \langle G_g^+, \partial \bar{\partial} \psi \rangle$). Le support de μ_g^+ s'avère être exactement l'ensemble de Julia J_g^+ .

Pour tout courant T positif fermé de type (1,1) sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ on définit la masse

$$\|T\| = \langle T, \omega \rangle = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} T \wedge \omega$$

où ω est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Nous pouvons regarder μ_g^+ comme un courant sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, c'est même la « bonne manière » de le définir. Considérons $\tilde{g} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'homogénéisé de g et posons :

$$\begin{aligned} G_{\tilde{g}}^+ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(\tilde{g})^n} \log \|\tilde{g}^n\| \\ \overline{\mu}_g^+ &= \Pi_* \left(\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G_{\tilde{g}}^+ \right) \end{aligned}$$

où Π est la projection de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Alors $\overline{\mu}_g^+$ est simplement le prolongement trivial de μ_g^+ à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Par abus d'écriture nous noterons $\|\mu_g^+\|$ au lieu de $\|\overline{\mu}_g^+\|$. La normalisation par $\frac{1}{\pi}$ dans la définition de μ_g^+ a été choisie de manière à avoir $\|\mu_g^+\| = 1$.

Notons que nous n'avons défini pour l'instant les fonction et courant de Green que pour un automorphisme $g \in \mathcal{H}$. La démarche habituelle pour étudier la dynamique d'un automorphisme de type Hénon f est la suivante. On conjugue f pour se ramener à un automorphisme $g \in \mathcal{H}$, on associe à g des objets d'analyse complexe (fonction et courant de Green) qui rendent compte de la dynamique de g , et bien sûr la dynamique de g est équivalente à la dynamique de l'automorphisme f de départ. Nos motivations sont cependant légèrement différentes puisque nous nous proposons d'étudier la dynamique d'un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, ou de comparer entre elles les dynamiques de deux automorphismes de type Hénon. Comme il n'est en général pas possible de conjuguer simultanément plusieurs automorphismes à des éléments de \mathcal{H} , il est naturel de vouloir associer une

fonction de Green à n'importe quel automorphisme de type Hénon. Cependant lorsqu'on cherche à étendre ces définitions on est confronté à quelques difficultés ; en effet les notions de fonction et de courant de Green ne sont pertinentes que pour une application birationnelle de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dont le point d'indétermination et celui de sa réciproque sont différents (cf. [10] ou [30]). Cette propriété est vraie pour le prolongement à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ d'une application $g \in \mathcal{H}$, mais ne persiste pas en général pour le prolongement d'un conjugué $\varphi g \varphi^{-1}$. Nous dirons que $h \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon est *régulier* si les prolongements à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de h et h^{-1} admettent des points d'indétermination distincts. Ainsi les éléments de \mathcal{H} apparaissent comme une sous-classe des automorphismes réguliers. Plus précisément :

Lemme 1.10 *Soit $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. f est régulier ;
2. $f = aga^{-1}$ avec $a \in A$, $g \in \mathcal{H}$;
3. f est de degré algébrique minimal dans sa classe de conjugaison.

Preuve. Ecrivons $f = \varphi g \varphi^{-1}$ avec $g \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et φ de taille minimale. Si φ n'est pas affine, alors φ contracte la droite à l'infini sur un point p , lequel est à la fois point d'indétermination de f et de f^{-1} . Ceci montre l'équivalence (1) \Leftrightarrow (2).

L'équivalence (2) \Leftrightarrow (3) découle immédiatement des faits suivants (cf. [15]) : d'une part tout élément de \mathcal{H} est de degré minimal dans sa classe de conjugaison ; d'autre part si la décomposition de f dans le produit amalgamé est

$$f = a_n \circ e_n \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1$$

(a_n et e_1 sont éventuellement l'identité) alors $d^\circ f = \prod_i d^\circ e_i$. \square

Au final il semble naturel de poser pour $f = \varphi g \varphi^{-1}$:

$$G_f^+ := c \cdot G_g^+ \circ \varphi^{-1}$$

$$\mu_f^+ := c \cdot \varphi^{-1*} \mu_g^+ = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G_f^+$$

où $c \in \mathbb{R}^+$ est uniquement déterminé par la normalisation $\|\mu_f^+\| = 1$. On sait que si T est un $(1, 1)$ courant positif fermé sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, et h un automorphisme birationnel de degré d , alors $\|h^*T\| = d\|T\|$. Cependant remarquons que le pull-back utilisé pour définir μ_f^+ est effectué sur \mathbb{C}^2 , ainsi on ne connaît pas immédiatement la masse de $\varphi^{-1*} \mu_g^+$ et donc la valeur de c . La proposition suivante précise les valeurs que peut prendre cette constante c .

Proposition 1.11 *Soit f de type Hénon, f s'écrit*

$$f = \varphi g \varphi^{-1} \text{ avec } g \in \mathcal{H}, \varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$$

On suppose que $g \circ \varphi^{-1}$ ne contracte pas la droite à l'infini en $[1 : 0 : 0]$. Alors, en notant c l'unique réel positif tel que $\|c\varphi^{-1} \mu_g^+\| = 1$, on a*

$$\frac{1}{d^\circ \varphi} \leq c \leq d^\circ \varphi$$

De plus

$$\begin{aligned} c = d^\circ \varphi &\Rightarrow f \text{ est régulier} \\ c = \frac{1}{d^\circ \varphi} &\Leftrightarrow \varphi^{-1} \text{ et } g \text{ ont des points d'indétermination distincts} \end{aligned}$$

Preuve. Considérons le courant $\overline{\varphi^{-1*} \mu_g^+}$. C'est un courant de masse $d^\circ \varphi$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ qui s'écrit :

$$\overline{\varphi^{-1*} \mu_g^+} = r[t = 0] + \varphi^{-1*} \mu_g^+$$

où $[t = 0]$ est le courant d'intégration (de masse 1) sur la droite à l'infini, et $r \geq 0$. Si $m = \|\varphi^{-1*} \mu_g^+\|$, on a $c = 1/m$ et $r + m = d^\circ \varphi$. Le calcul de c se ramène donc au calcul de r .

Comme précédemment \tilde{g} et $\widetilde{\varphi^{-1}}$ sont les applications homogènes sur \mathbb{C}^3 induites par g et φ^{-1} . Les trois composantes de $\tilde{g} \circ \widetilde{\varphi^{-1}}$ admettent une puissance de t comme facteur commun, à savoir

$$t^{d^\circ g \cdot d^\circ(\varphi^{-1}) - d^\circ(g \circ \varphi^{-1})} = t^{d^\circ g \cdot d^\circ \varphi - d^\circ(g \circ \varphi^{-1})}$$

Remarquons que $d^\circ(g^n \circ \varphi^{-1}) = d^\circ(g^{n-1}).d^\circ(g \circ \varphi^{-1})$ car $g \circ \varphi^{-1}$ ne contracte pas la droite à l'infini sur le point d'indétermination $[1 : 0 : 0]$ de g^{n-1} (cf. [13]). Ainsi les composantes de $\widetilde{g^n \circ \varphi^{-1}}$ admettent comme facteur commun t à la puissance

$$\begin{aligned} & d^\circ(\varphi^{-1})d^\circ g^n - d^\circ(g^n \circ \varphi^{-1}) \\ &= d^\circ \varphi d^\circ g^n - (d^\circ g)^{n-1}.d^\circ(g \circ \varphi^{-1}) \\ &= (d^\circ g)^{n-1}(d^\circ \varphi d^\circ g - d^\circ(g \circ \varphi^{-1})) \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{1}{d(g)^n} \log \|\widetilde{g^n \circ \varphi^{-1}}\| = \frac{d^\circ g . d^\circ \varphi - d^\circ(g \circ \varphi^{-1})}{d^\circ g} \log |t| + \frac{1}{d(g)^n} \log \|\widetilde{(g^n \circ \varphi^{-1})}\|$$

En passant à la limite et en appliquant l'opérateur $\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial}$ nous obtenons :

$$\overline{\varphi^{-1}}^* \overline{\mu_g^+} = \left(d^\circ \varphi - \frac{d^\circ(g \circ \varphi^{-1})}{d^\circ g} \right) [t = 0] + \varphi^{-1*} \mu_g^+$$

i.e $r = d^\circ \varphi - \frac{d^\circ(g \circ \varphi^{-1})}{d^\circ g}$ Remarquons que

$$d^\circ(g \circ \varphi^{-1}).d^\circ \varphi \geq d^\circ g \Rightarrow -\frac{d^\circ(g \circ \varphi^{-1})}{d^\circ g} \leq -\frac{1}{d^\circ \varphi}$$

d'où $0 \leq r \leq d^\circ \varphi - \frac{1}{d^\circ \varphi}$

Supposons $c = d^\circ \varphi$, i.e $r = d^\circ \varphi - \frac{1}{d^\circ \varphi}$. On a donc

$$d^\circ(g \circ \varphi^{-1}) = \frac{d^\circ g}{d^\circ \varphi}$$

Par suite

$$\begin{aligned} d^\circ(\varphi g \varphi^{-1}) &\leq d^\circ \varphi . d^\circ(g \circ \varphi^{-1}) \\ &\leq d^\circ \varphi \frac{d^\circ g}{d^\circ \varphi} \\ &\leq d^\circ g \end{aligned}$$

et donc

$$d^\circ(\varphi g \varphi^{-1}) = d^\circ g$$

car g est de degré minimal dans sa classe de conjugaison. Ainsi $\varphi g \varphi^{-1}$ est également de degré minimal, autrement dit $\varphi g \varphi^{-1}$ est régulier (lemme 1.10).

Supposons maintenant $c = \frac{1}{d^\circ \varphi}$, i.e $r = 0$. Donc $d^\circ g \cdot d^\circ \varphi^{-1} = d^\circ (g \circ \varphi^{-1})$ et g, φ^{-1} ont des points d'indétermination disjoints. La réciproque est claire. \square

Remarque 1.12 L'hypothèse sur $g \circ \varphi^{-1}$ faite dans la proposition ci-dessus n'est pas contraignante. En effet pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand l'automorphisme $g^{n+1} \circ \varphi^{-1}$ envoie la droite à l'infini en $[0 : 1 : 0]$. En remplaçant φ par φg^{-n} on ne change pas f et on se retrouve dans les conditions d'application de la proposition.

Remarque 1.13 De manière générale si μ^+ est un courant sur \mathbb{C}^2 , $h \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, \bar{h} son prolongement birationnel et $\bar{\mu}^+$ le prolongement trivial de μ^+ à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, alors

$$\bar{h}^* \bar{\mu}^+ = r[t = 0] + h^* \mu^+$$

et $r = 0$ si et seulement si le point d'indétermination de h n'est pas dans le support de μ^+ . Ainsi c'est l'implication

$$c = d^\circ \varphi \Rightarrow f \text{ est régulier}$$

qui est intéressante dans la proposition 1.11.

Pour fixer les idées nous donnons maintenant une représentation de la dynamique d'un automorphisme $g \in \mathcal{H}$ qu'il sera utile d'avoir en tête (cf. fig. 1.5). Considérons le prolongement birationnel \bar{g} de g à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. L'application \bar{g} contracte la droite à l'infini sur le point fixe super-attractant $[0 : 1 : 0]$, sauf le point $[1 : 0 : 0]$ qui est un point d'indétermination. Quand on considère g^{-1} , les rôles des points $[1 : 0 : 0]$ et $[0 : 1 : 0]$ sont échangés. L'ensemble de Julia J_g^+ est un fermé de \mathbb{C}^2 qui vient adhérer à l'infini en un seul point : le point d'indétermination de \bar{g} .

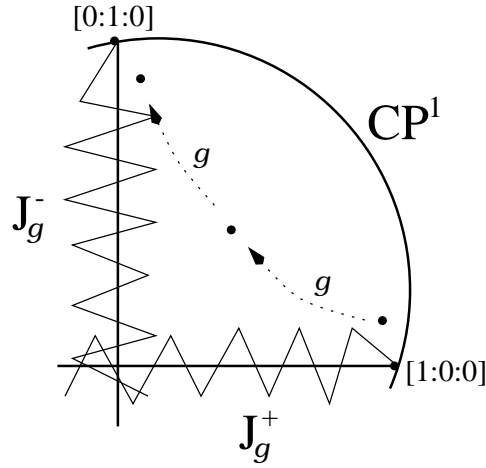
Exemple 1.14 Si $f \in \mathcal{H}$ nous avons la relation suivante sur \mathbb{C}^2 :

$$f^{-1*} \mu_f^+ = \frac{1}{d(f)} \mu_f^+$$

Considérons maintenant \bar{f}^{-1} le prolongement de f^{-1} à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et effectuons le pull-back de μ_f^+ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, nous obtenons

$$\bar{f}^{-1*} \mu_f^+ = \frac{1}{d(f)} \mu_f^+ + \left(d(f) - \frac{1}{d(f)} \right) [t = 0]$$

D'après la proposition 1.11, ce phénomène de déplacement de la masse vers la droite à l'infini se produit ici car le support de μ_f^+ , i.e J_f^+ , contient $[1 : 0 : 0]$ qui est point d'indétermination pour f .


 FIGURE 1.5 – Dynamique d'un automorphisme $g \in \mathcal{H}$

En considérant les itérés négatifs il est possible de définir pour g régulier

$$G_g^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|g^{-n}\|$$

et pour $f = \varphi g \varphi^{-1}$

$$G_f^- := c \cdot G_g^- \circ \varphi^{-1} \text{ et } \mu_f^- = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G_f^-$$

où c est choisi pour avoir $\|\mu_f^-\| = 1$. Le courant μ_f^- admet J_f^- comme support. Cependant nous allons voir que ces notations peuvent être remplacées par $G_{f^{-1}}^+$, $\mu_{f^{-1}}^+$, $J_{f^{-1}}^+$... Ce sont ces dernières que nous utiliserons. En fait on a les propriétés agréables suivantes :

Proposition 1.15 1. Si $g \in \mathcal{H}$ et $f = aga^{-1}$ avec $a \in A$, alors

$$G_f^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(f)^n} \log^+ \|f^n\|$$

2. Si f est de type Hénon et $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, alors

$$G_{\varphi f \varphi^{-1}}^+ = c \cdot G_f^+ \circ \varphi^{-1} \text{ avec } c > 0$$

3. Si f est de type Hénon alors $G_f^- = G_{f^{-1}}^+$

4. Si f est de type Hénon alors G_f^+ vérifie la relation

$$G_f^+ \circ f = d(f) G_f^+$$

et donc au niveau des courants on a

$$f^* \mu_f^+ = d(f) \mu_f^+$$

Ainsi d'après le point 1 les deux définitions possibles pour la fonction de Green d'un automorphisme régulier coïncident.

Preuve. 1- Par définition

$$\begin{aligned} G_f^+ &= G_g^+ \circ a^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|g^n \circ a^{-1}\| \end{aligned}$$

Pour $|z| > R$ avec R assez grand il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\alpha \|z\| < \|a(z)\| < \beta \|z\|$$

Par suite

$$G_f^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|a g^n a^{-1}\|$$

ce qui est le résultat annoncé, car par définition $d(f) = d(g)$.

2- Ecrivons $f = \psi g \psi^{-1}$ avec $g \in \mathcal{H}$. Alors

$$G_{\psi f \psi^{-1}}^+ = G_{\psi g \psi^{-1}}^+ = c'. G_g^+ \circ \psi^{-1} \circ \psi = c. G_f^+ \circ \psi^{-1}$$

3- D'après le point 1 l'affirmation est claire pour g régulier. En écrivant $f = \psi g \psi^{-1}$ avec g régulier on obtient :

$$G_f^- = c. G_g^- \circ \psi^{-1} = c. G_{g^{-1}}^+ \circ \psi^{-1} = G_{f^{-1}}^+$$

4- Nous avons vu que cette relation est satisfaite pour un élément de \mathcal{H} . Ecrivons $f = \phi g \phi^{-1}$ avec $g \in \mathcal{H}$, on a :

$$G_f^+ \circ f = c. G_g^+ \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ g \circ \phi^{-1} = d(g) G_f^+$$

ce qu'on voulait (car $d(f) = d(g)$) \square

A un automorphisme f de type Hénon on associe la *mesure invariante*

$$\mu_f = \mu_f^+ \wedge \mu_{f^{-1}}^+$$

dont le support est contenu dans $J_f = J_f^+ \cap J_f^-$. Cette mesure vérifie l'équation fonctionnelle

$$f^* \mu_f = \mu_f$$

En général si T_1 et T_2 sont deux courants de type (1,1) positifs fermés sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ayant leur produit extérieur bien défini (cf. [14]) alors on a un théorème de Bézout (c'est effectivement le théorème de Bézout quand T_1 et T_2 sont des courants d'intégration sur des courbes algébriques) :

$$\|T_1 \wedge T_2\| = \|T_1\| \cdot \|T_2\|$$

Ainsi si l'on considère le produit extérieur des courants $\overline{\mu_f^+}$ et $\overline{\mu_{f^{-1}}^+}$ prolongements triviaux de μ_f^+ et $\mu_{f^{-1}}^+$ à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, on obtient une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$:

$$\overline{\mu_f} = \overline{\mu_f^+} \wedge \overline{\mu_{f^{-1}}^+}$$

Lorsque f est régulier $\overline{\mu_f}$ n'est rien d'autre que le prolongement trivial de μ_f à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, mais nous verrons (lemme 2.23) que ce n'est pas le cas en général.

Signalons enfin le résultat remarquable suivant (cf. [30]) :

Théorème 1.16 (Sibony) *Soit $g \in \mathcal{H}$ et soit T un courant positif fermé de type (1,1) dans $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ de masse 1 et de support contenu dans $\overline{K_g^+}$. Alors $T = \mu_g^+$.*

D'où l'on déduit immédiatement le

Corollaire 1.17 *Soient f, g de type Hénon. Alors*

$$J_f^+ = J_g^+ \Leftrightarrow \mu_f^+ = \mu_g^+$$

Chapitre 2

Classification des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

Nous énonçons maintenant l'un de nos principaux théorèmes, dont la preuve fera l'objet des deux prochaines sections :

Théorème 2.1 *Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On a quatre cas distincts possibles :*

1. *G est un groupe de degré 1 conjugué à un sous-groupe de E ou de A .*
2. *G est un groupe de degré 1 mais n'est pas conjugué à un sous-groupe de E ou de A . Dans ce cas G est abélien.*
3. *G contient des éléments de type Hénon, et ceux-ci ont tous même géodésique. Alors G est résoluble et contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} d'indice fini.*
4. *G contient deux éléments de type Hénon avec des géodésiques différentes. Alors G contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

On en déduit immédiatement le

Corollaire 2.2 *Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ vérifie l'alternative de Tits, i.e si G est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ alors on a deux possibilités :*

1. *G contient un groupe résoluble d'indice fini ;*
2. *G contient un groupe libre non abélien.*

Preuve du corollaire. Dans les cas 2, 3 et 4 du théorème le résultat est clair. Reste le cas 1 où l'on se ramène à un sous-groupe de E ou de A . Les groupes dérivés de E se calculent facilement :

$$E^{(1)} = [E, E] = \{(x + P(y), y + \gamma)\}$$

$$E^{(2)} = \{(x + P(y), y)\}$$

$$E^{(3)} = \{Id\}$$

Ainsi E est résoluble ; d'autre part A peut évidemment être vu comme un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$ grâce au morphisme de groupe injectif suivant :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow GL_3(\mathbb{C}) \\ (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) &\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut à l'aide de l'alternative de Tits dans le cadre des groupes linéaires, voir par exemple [19] pour une présentation de ce théorème difficile. \square

A noter qu'il existe des groupes opérant fidèlement sur un arbre mais ne vérifiant pas l'alternative de Tits. On trouvera dans [31] l'exemple d'un tel groupe : il s'agit d'un groupe infini, de type fini, dont tous les éléments sont d'ordre fini (je remercie E. Ghys pour cet exemple). Précisons cependant que le corollaire 2.2 découle presque immédiatement de la théorie générale de Bass-Serre étant donné que nous considérons un produit amalgamé dont l'un des facteurs est résoluble et l'autre linéaire. L'intérêt du théorème 2.1 réside dans la description précise que l'on obtient dans les cas 2 et 3. Dans le cas 2 le groupe G est d'ailleurs non seulement abélien mais en fait d'une forme très particulière (voir [33] et la proposition 2.10). Le cas 3 est quant à lui décrit par la proposition 2.20.

En terme d'action sur l'arbre le cas 1 correspond aux groupes elliptiques, le cas 2 aux groupes paraboliques ; on pourrait appeler les groupes du cas 3 « hyperboliques » puisqu'ils fixent exactement deux bouts de l'arbre, correspondant aux deux bouts de la géodésique associée. Quant au cas 4 il regroupe tous les autres sous-groupes que l'on pourrait qualifier de généraux, et dont nous étudierons la dynamique au chapitre 3.

Les deux sections suivantes sont consacrées à la preuve du théorème ; cependant nous obtenons au passage quelques résultats qui ont un intérêt propre. Nous appliquons ensuite les résultats de cette étude à des problèmes de nature dynamique. Enfin nous concluons ce chapitre en étudiant explicitement quelques exemples.

2.1 Étude des automorphismes de type élémentaire

Nous allons dans un premier temps étudier les automorphismes de degré 1, et en particulier caractériser les automorphismes f avec un arbre $\text{Fix}(f)$ non borné. De tels automorphismes vont apparaître ou bien lorsque nous prendrons le commutateur de deux

automorphismes de type Hénon qui ont même géodésique (cas 3 du théorème), ou bien quand nous considèrerons des automorphismes qui fixent un bout de l'arbre (ce sera la situation dans le cas 2). Dans un deuxième temps nous étudierons les sous-groupes de degré 1, ce qui correspond aux cas 1 et 2 du théorème 2.1.

Notons qu'il n'est pas tout à fait évident a priori qu'il existe bien des automorphismes (autre que l'identité) qui fixent un sous-arbre non borné de \mathcal{T} . Le lemme suivant est en quelque sorte une « machine à produire des exemples » de tels automorphismes .

Lemme 2.3 Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, avec $d(f) = 1$ et $d(g) \geq 2$. Supposons que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$.

Preuve. Soit p un sommet dans $\text{Fix}(f)$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$f(g^n(p)) = g^n(f(p)) = g^n(p)$$

i.e $g^n(p) \in \text{Fix}(f)$. Ainsi pour tout n l'arbre $\text{Fix}(f)$ contient le chemin reliant $g^{n-1}(p)$ à $g^n(p)$, et chacun de ces chemins contient $\lg(g)$ arêtes de $\text{Géo}(g)$. Le résultat est alors clair (fig. 2.1). \square

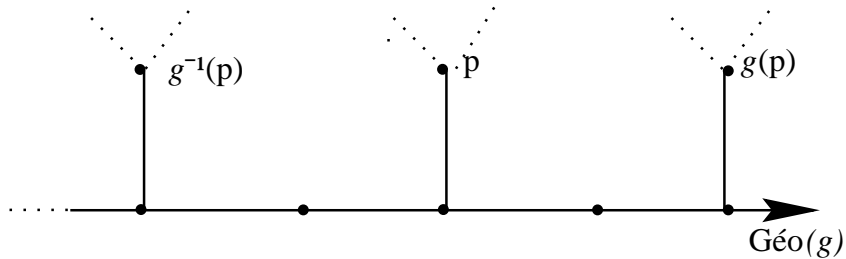


FIGURE 2.1 – $\text{Fix}(f)$ contient les $g^n(p) \Rightarrow \text{Fix}(f)$ contient $\text{Géo}(g)$

Remarquons maintenant que pour certains automorphismes très simples le lemme ci-dessus est efficace :

Exemple 2.4 Si $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre, alors il est facile de construire des exemples de g avec $d(g) \geq 2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Le lemme 2.3 s'applique donc : $\text{Fix}(f)$ est un sous-arbre de \mathcal{T} de diamètre infini, car il contient $\text{Géo}(g)$.

- Si $\alpha = \beta$ et $\alpha^n = 1$, il suffit de prendre $g = (y, y^{n+1} + x)$.
- Si $\alpha \neq \beta$ alors il existe $p, q \geq 2$ tels que $\alpha^p = \beta, \beta^q = \alpha$. Posons $g_1 = (y, y^p + x)$, $g_2 = (y, y^q + x)$, alors $g = g_1 \circ g_2$ convient.

Le sens de la proposition suivante est de montrer que les exemples 2.4 sont les seuls (à conjugaison près). C'est là un résultat crucial pour la preuve du théorème 2.1, et il est à noter que ce résultat ne découle pas directement de la théorie de Bass-Serre mais est au contraire très particulier au groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. En fait on s'aperçoit que si $\text{Fix}(f)$ est borné alors $\text{Fix}(f)$ est petit (de diamètre au plus 6), ce qui autorise une preuve calculatoire :

Proposition 2.5 *Soit f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré 1. Alors $\text{Fix}(f)$ est décrit par le tableau page 32 ; en particulier $\text{Fix}(f)$ est de diamètre infini si et seulement si f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre.*

Preuve. Puisque $d(f) = 1$, en conjuguant on se ramène à $f \in E$. A conjugaison dans E près f est alors d'un des quatre types suivant (cf. [15]) :

1. $(\alpha x, \beta y)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$;
2. $(x + 1, \beta y)$ ou $(\beta x, y + 1)$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$;
3. $(\beta^d x + \beta^d y^d, \beta y)$ avec $d \geq 1, \beta \in \mathbb{C}^*$;
4. $(\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y)$ avec $d \geq 1, q$ non constant de plus haut coefficient +1, β racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité.

Nous étudions maintenant chacun des cas, en suivant plus ou moins un ordre croissant de complexité pour $\text{Fix}(f)$ (qui est également l'ordre des lignes du tableau).

Dans le cas 4, et dans le cas 3 avec $d \geq 2$, même en conjugant dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on ne peut pas baisser le degré de f (lemme 6-7 de [15]). En particulier f n'est pas conjugué à un élément de S , donc $\text{Fix}(f)$ est réduit à un seul sommet (de type E).

Dans tous les cas restant on a $f \in S$, donc $\text{Fix}(f)$ contient l'arête IdS . Rappelons que $\text{Fix}(f)$ est un arbre, donc si f fixe une autre arête il fixe également tout le chemin reliant cette arête à IdS . L'idée est maintenant, en utilisant les écritures normales, de donner les équations que doit vérifier f pour fixer une arête voisine de IdS . Par exemple on a :

$$f \text{ fixe l'arête } a(\lambda)S \Leftrightarrow f \in a(\lambda)Sa(\lambda)^{-1} \Leftrightarrow a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) \in S$$

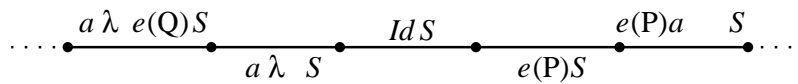


FIGURE 2.2 – Écritures normales des arêtes voisines de IdS

(i)	Sous-cas (ii)		$f(x,y)$ (iii)	(iv)	(v)	$\text{Fix}(f)$ (vi)
(3)	$\begin{cases} (4) \\ (3) \text{ et } d \geq 2 \end{cases}$		$(\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y)$	0	0	
et	(3) et (4) $d = 1$	β non racine	$(\beta x + \beta y, \beta y)$	1	1	
		β racine	$(\beta x + \beta y, \beta y)$	∞	2	
(2)	β non racine de l'unité		$(x + 1, \beta y)$	2	2	
	β racine de l'unité $\neq 1$		$(x + 1, \beta y)$	∞	4	
	$\beta = 1$		$(x + 1, y)$	∞	6	
(1)	$\forall n \geq 2$ $\alpha^n \neq \beta$ et $\beta^n \neq \alpha$	$\alpha \neq \beta$	$(\alpha x, \beta y)$	2	2	
		$\alpha = \beta$	$(\alpha x, \alpha y)$	∞	2	
	$\forall n \geq 2$ $\alpha^n \neq \beta$; $\exists m \geq 2$ $\beta^m = \alpha$	β non racine	$(\beta^m x, \beta y)$	∞	4	
		β racine	$(\beta^m x, \beta y)$	∞	4	
	α et β racines primitives de l'unité du même ordre	$\alpha \neq \beta$	$(\alpha x, \beta y)$	∞	∞	
		$\alpha = \beta$	$(\alpha x, \alpha y)$	∞	∞	

(i) Type de Friedland-Milnor (voir texte de la preuve) ; (ii) Voir texte de la preuve ;
 (iii) Ecriture de f après conjugaison ; (iv) Nombre d'arêtes de $\text{Fix}(f)$;
 (v) Diamètre de $\text{Fix}(f)$; (vi) Tentative de dessin ! Les E et les A signalent le type des sommets.

TABLE 2.1 –

Plaçons-nous dans le cas 3 avec $d = 1$, i.e $f = (\beta x + \beta y, \beta y)$. On calcule :

$$\begin{aligned} a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) &= (y, x - \lambda y) \circ (\beta x + \beta y, \beta y) \circ (\lambda x + y, x) \\ &= (\beta x, \beta y + \beta x) \\ e(P)^{-1}fe(P) &= (x - P(y), y) \circ (\beta x + \beta y, \beta y) \circ (x + P(y), y) \\ &= (\beta x + \beta y + \beta P(y) - P(\beta y), \beta y) \end{aligned}$$

On voit que f ne fixe aucune arête de la forme $a(\lambda)S$, car $(\beta x, \beta y + \beta x) \notin S$. D'autre part f ne peut fixer une arête $e(P)S$ que si $P(\beta y) = \beta P(y)$. Dans ce cas β est une racine de l'unité, et on remarque que $e(P)^{-1}fe(P) = f$. Ainsi par le calcul précédent $a(\lambda)^{-1}e(P)^{-1}fe(P)a(\lambda) \notin S$, ce qui revient à dire que f ne fixe pas d'arête de la forme $e(P)a(\lambda)S$. Finalement $\text{Fix}(f)$ ne contient que l'arête IdS si β n'est pas une racine de l'unité, et contient IdS plus des arêtes de la forme $e(P)S$ si β est racine. Ainsi $\text{Fix}(f)$ est au plus de diamètre égal à deux.

Passons au cas 2, i.e $f = (x + 1, \beta y)$ (le cas $f = (\beta x, y + 1)$ se déduit par conjugaison par (y, x)). On a :

$$a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, \lambda(1 - \beta)x + y + 1)$$

Donc f fixe $a(\lambda)S$ si $\lambda = 0$ ou si $\beta = 1$ et dans les deux cas on a $a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, y + 1)$. En conjuguant par $e(Q)^{-1}$ on obtient :

$$e(Q)^{-1} \circ (\beta x, y + 1) \circ e(Q) = (\beta x + \beta Q(y) - Q(y + 1), y + 1)$$

Cet automorphisme ne peut être dans S que si $\beta = 1$ et $Q(y) = ay^2$, et on a alors $e(Q)^{-1} \circ (x, y + 1) \circ e(Q) = (x - 2ay - a, y + 1)$. Une troisième conjugaison donne :

$$a(\mu)^{-1} \circ (x - 2ay - a, y + 1) \circ a(\mu) = (x + 1, y - 2ax - a - \mu)$$

et cet automorphisme ne peut être dans S , pour tout choix de μ . Ainsi f ne fixe aucune arête de la forme $a(\lambda)e(Q)a(\mu)S$. Regardons maintenant les arêtes $e(P)S$:

$$e(P)^{-1}fe(P) = (x + 1 + P(y) - P(\beta y), \beta y)$$

On voit que f fixe $e(P)S$ dès que $P(y) = P(\beta y)$ et on a alors $e(P)^{-1}fe(P) = f$; on est ainsi ramené aux calculs précédents. On conclut là-encore que $\text{Fix}(f)$ est de diamètre fini. C'est dans le cas $\beta = 1$ que ce diamètre est maximum ; les calculs ci-dessus montrent que dans ce cas $\text{Fix}(f)$ contient des arêtes de la forme $a(\lambda)e(Q)S, a(\lambda)S, IdS, e(P)S, e(P)a(\mu)S$ et $e(P)a(\mu)e(Q)S$: on voit que $\text{Fix}(f)$ est de diamètre 6.

Etudions enfin le cas 1, i.e $f = (\alpha x, \beta y)$. Comme précédemment on calcule :

$$a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, \lambda(\alpha - \beta)x + \alpha y)$$

$$e(P)^{-1}fe(P) = (\alpha x + \alpha P(y) - P(\beta y), \beta y)$$

Donc f fixe $a(\lambda)S$ si $\alpha = \beta$ ou si $\lambda = 0$, dans les deux cas on a $a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, \alpha y)$. D'autre part f fixe $e(P)S$ si $P(\beta y) = \alpha P(y)$, ce qui implique $\alpha = \beta^n$, où n est le degré de P . De plus on remarque qu'alors $e(P)^{-1}fe(P) = f$.

Donc $e(Q)^{-1}a(\lambda)^{-1}fa(\lambda)e(Q) \in S$ implique $\beta = \alpha^m$ où $m = \text{degré de } Q$. Il est clair enfin que l'existence de $n, m \geq 2$ tels que $\alpha^m = \beta$ et $\alpha = \beta^n$ implique que α et β sont des racines de l'unité du même ordre. On est ainsi dans le cadre des exemples 2.4, et nous avons vu que ceux-ci possèdent un arbre fixé non borné. \square

Remarque 2.6 Les calculs de la preuve ci-dessus (dans le cas 1) permettent de préciser le cas où $\text{Fix}(f)$ est non borné : soit $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre, et soit $\varphi S = a(\lambda_1)e(P_1) \cdots a(\lambda_n)e(P_n)S$ une arête. On distingue deux cas :

1. $\alpha = \beta$: $\varphi S \in \text{Fix}(f)$ si et seulement si les P_j vérifient $P_j(\alpha x) = \alpha P_j(x)$, ce qui revient à dire que f commute avec chaque $e(P_j)$. Les λ_i peuvent quant à eux être choisis de manière arbitraire.
2. $\alpha \neq \beta$: $\varphi S \in \text{Fix}(f)$ si et seulement si les λ_i sont tous nuls et les P_j vérifient $P_{2k+1}(\alpha y) = \beta P_{2k+1}(y)$ et $P_{2k}(\beta y) = \alpha P_{2k}(y)$, ce qui revient à dire que $e(P_{2k+1})$ (resp. $e(P_{2k})$) commute avec $(\beta x, \alpha y)$ (resp. $(\alpha x, \beta y)$).

On a bien sûr des résultats analogues quand l'écriture de φ commence par un $e(P)$ ou finit par un $a(\lambda)$. Dans le second cas on voit que $\varphi f \varphi^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ ou $(\beta x, \alpha y)$ selon la parité du nombre de $a(0)$ contenu dans l'écriture de φ .

Remarque 2.7 Il est maintenant clair que l'action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur l'arbre \mathcal{T} est fidèle. En effet soit $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui agit sur l'arbre comme l'identité. D'après la proposition 2.5 f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre, et par la remarque précédente une telle rotation ne fixe tout l'arbre que si elle est égale à l'identité. A noter que pour certain produit amalgamé l'action induite n'est pas fidèle, par exemple dans $SL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ la matrice $-Id$ agit comme l'identité sur l'arbre associé.

Corollaire 2.8 Soit $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre, et soit g de degré ≥ 2 . On suppose $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$. Alors il existe $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ tel que

1. $\varphi g \varphi^{-1}$ soit cycliquement réduit ;
2. $\varphi f \varphi^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ ou $(\beta x, \alpha y)$.

Preuve. Soit ψS une arête contenue dans $\text{Géo}(g)$. Alors en conjuguant par ψ^{-1} on obtient les propriétés annoncées. En effet $\text{Géo}(\psi^{-1}g\psi) = \psi^{-1}.\text{Géo}(g)$ donc $IdS \in \text{Géo}(\psi^{-1}g\psi)$. La remarque 1.9 assure alors que $\psi^{-1}g\psi$ est cycliquement réduit. De plus

$\psi^{-1}f\psi$ est encore diagonal par la remarque 2.6. \square

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.9 *Soient $f_1, f_2 \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, avec $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2)$ non borné. Alors f_1 et f_2 commutent ; de plus ils admettent chacun un unique point fixe qui leur est commun.*

Preuve. En conjuguant on peut supposer que f_1 et f_2 sont dans E (puisque'ils fixent tous deux un sommet de type E , et même, en fait, une infinité de tels sommets). Alors le commutateur $h := f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}$ est de la forme $(x + P(y), y + \gamma)$; de plus $\text{Fix}(h)$ est non borné donc h est d'ordre fini par la proposition 2.5. On en déduit que $h = Id$.

Les automorphismes f_1 et f_2 ayant par hypothèse des arbres fixés associés non bornés, ils sont chacun conjugués à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre. En particulier ils ont un unique point fixe dans \mathbb{C}^2 , et comme ils commutent leurs points fixes coïncident. \square

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les sous-groupes de degré 1 de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On pourrait avoir envie de dire qu'un tel groupe G doit être conjugué à un sous-groupe de A ou E ; i.e son action sur l'arbre doit admettre un point fixe. La proposition 1.7 assure que c'est en effet le cas si G est de type fini ou si G contient un élément f avec $\text{Fix}(f)$ borné. Cependant c'est faux en général, et Wright dans [33] donne des exemples explicites de tels sous-groupes (sur un corps de base de caractéristique quelconque). Nous rappellerons ces constructions en fin de chapitre en vue d'étudier leur dynamique. Nous nous contentons pour l'instant d'énoncer une proposition qui caractérise de tels sous-groupes, que nous appellerons *groupes de Wright* :

Proposition 2.10 *Soit G un sous-groupe de degré 1 qui n'est pas conjugué à un sous-groupe de A ou de E . Alors :*

1. G est abélien ;
2. G est égal à l'union d'une famille croissante de groupes H_i , $i \in \mathbb{N}$, où chaque H_i est conjugué à un groupe cyclique fini engendré par une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre.
3. Chaque élément de G admet un seul point fixe (en tant qu'automorphisme de \mathbb{C}^2) et ce point fixe est le même pour tous les éléments de G .
4. L'action de G fixe un bout de l'arbre \mathcal{T} .

Preuve. Comme G n'est pas conjugué à un sous-groupe de A ou de E , il ne fixe aucun sommet. Par la proposition 1.7 on en déduit que chaque élément de G admet un arbre fixe non borné, i.e est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre. De plus, si $f, g \in G$ alors $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$ est non borné, en effet sinon on pourrait appliquer le lemme 1.6 avec $Y = \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$, $X_{g_i} = \text{Fix}(g_i) \cap Y$, ce qui contredirait le fait que G n'est inclus dans le stabilisateur d'aucun sommet. Par le lemme 2.9, on obtient les points 1 et 3.

Montrons maintenant le point 2. Toujours d'après la proposition 1.7 le groupe G n'est pas de type fini. De plus remarquons que si $f, g \in G$ sont de même ordre alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n = g$. En effet sinon on peut supposer (en conjugant) $f, g \in E$ et on pourrait trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^m \circ g = (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \neq Id$$

avec $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$. Mais ceci est impossible car α et β doivent être des racines du même ordre (donc $\alpha = \beta = 1$) et $f^m \circ g$ doit être d'ordre fini. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que n_i soit l'ordre d'un élément de G . Définissons H_i comme le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre inférieur ou égal à n_i . Ce groupe H_i est fini et contient un élément f_i (non nécessairement unique) d'ordre maximal. Reste à voir que f_i engendre H_i . Soit $g \in G$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f_i^n et g soient de même ordre. Par le raisonnement ci-dessus il existe donc $n' \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^{n'} = g$.

Il est clair enfin que $\text{Fix}(f_{i+1}) \subset \text{Fix}(f_i)$, de plus $\bigcap_i \text{Fix}(f_i)$ est vide, ce qui donne le point 4 (cf [29, pp 92–93]). \square

2.2 Les automorphismes de type Hénon

Etant donné $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 , nous cherchons maintenant à caractériser les automorphismes f qui commutent avec g , ou au contraire les f tels que f et g ne soient liés par aucune relation. Pour préciser la position relative de deux géodésiques (associées à des automorphismes) nous utiliserons la

Proposition 2.11 Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec $d(g) \geq 2$ et $d(f) = 1$. On suppose $\text{Géo}(g) \cap \text{Fix}(f)$ non borné. Quitte à conjuguer on peut supposer $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre (prop. 2.5), et alors :

1. Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha^n = \beta$, $\beta^n = \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et $\text{lg}(g) = 2 \pmod{4}$, alors $g \circ f \circ g^{-1} = (\beta x, \alpha y) = f^n$ (et donc f et g^2 commutent) ;
2. Dans tous les autres cas f et g commutent.

En particulier $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$.

Preuve. Rappelons que $\text{Fix}(gfg^{-1}) = g.\text{Fix}(f)$ donc

$$\text{Géo}(g) \cap \text{Fix}(f) \text{ non borné} \Rightarrow \text{Fix}(gfg^{-1}) \cap \text{Fix}(f) \text{ non borné}$$

donc gfg^{-1} fixe 0 par le lemme 2.9, et donc g fixe 0 également.

On peut ainsi écrire $g = m \circ s$, où $m = a(\lambda_n) \circ e(P_n) \circ \dots \circ a(\lambda_1) \circ e(P_1)$ et $s = (a_1x + b_1y, b_2y)$ (plus précisément on peut supposer m de cette forme quitte à conjuguer). Quitte à conjuguer à nouveau, les arêtes mS et $msa(\lambda_n)S$ sont dans $\text{Fix}(f)$, et on a $msa(\lambda_n)S = ma(\mu_n)S$ où μ_n est tel que $a(\mu_n)^{-1}sa(\lambda_n) \in S$.

Si $\alpha = \beta$ alors f commute avec s (immédiat) et avec m (rem. 2.6), donc avec g .

Si $\alpha \neq \beta$ alors dans l'écriture ci-dessus on a $\mu_n = \lambda_n = 0$ (rem. 2.6), d'où $s = (a_1x, b_2y)$. Ainsi f commute encore avec s . De plus, encore par la remarque 2.6, on a $g \circ (\alpha x, \beta y) \circ g^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ (resp. $(\beta x, \alpha y)$) quand $\text{lg}(g) = 0 \pmod{4}$ (resp. $2 \pmod{4}$). Enfin, dans le deuxième cas, on vérifie qu'il existe n tel que $\alpha^n = \beta$ et $\beta^n = \alpha$. \square

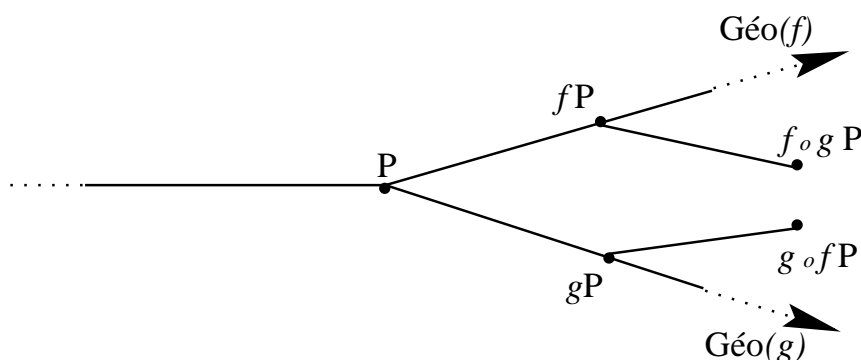
Corollaire 2.12 Soient f et g deux automorphismes de type Hénon. Alors ou bien $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$, ou bien $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ est borné (éventuellement vide).

Preuve. Supposons que $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ soit non borné. Alors quitte à prendre des puissances de f et g (ce qui ne change pas les géodésiques), on peut supposer que $\text{lg}(f) = \text{lg}(g)$, $\text{lg}(f) = 0 \pmod{4}$ et que f et g induisent la même orientation sur $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$. L'automorphisme fg^{-1} fixe alors un nombre infini de sommets de $\text{Géo}(g)$, en particulier il est de degré 1. Donc la proposition 2.11 affirme que g et fg^{-1} commutent, et on a

$$g(fg^{-1})f^{-1} = (fg^{-1})gf^{-1} = \text{Id}$$

i.e f et g commutent et en regardant l'action sur l'arbre on voit facilement que $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ (fig 2.3). \square

Si on se donne $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 avec $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$, on déduit de la proposition 2.5 qu'il existe une relation entre f et g . En effet $fgf^{-1}g^{-1}$ fixe $\text{Géo}(g)$, donc il existe n tel que $(fgf^{-1}g^{-1})^n = \text{Id}$. On étudie maintenant le cas $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$:


 FIGURE 2.3 – $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$ et $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ non borné $\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 2.13 Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 , avec $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$. On suppose $\text{lg}(f) > N$ et $\text{lg}(g) > N$ où N est le diamètre de $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$. Alors f et g engendrent un groupe libre ; de plus tous les éléments (sauf l'identité) de $\langle f, g \rangle$ sont de degré ≥ 2 .

Preuve. Il faut vérifier que pour tout h défini par

$$h = f^{n_p} \circ g^{m_p} \circ \dots \circ f^{n_1} \circ g^{m_1}$$

avec les n_i et les m_i dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $d(h) \geq 2$ (et donc en particulier $h \neq \text{Id}$). Pour cela, il suffit de vérifier que h ne fixe aucun sommet de \mathcal{T} .

Soit donc Q un sommet de \mathcal{T} . On introduit les notations suivantes : on pose $\text{dist}_f(Q)$ la distance de Q à $\text{Géo}(f)$, et \mathcal{T}_f (resp. \mathcal{T}_g) le sous-arbre de \mathcal{T} constitué des sommets P vérifiant $\text{dist}_f(P) \leq \text{dist}_g(P)$ (resp. $\text{dist}_f(P) \geq \text{dist}_g(P)$). Le résultat s'obtient alors par récurrence sur p , à l'aide des deux assertions suivantes. On prend $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et on pose $Q' = (f^n \circ g^m)Q$.

1. Si $Q \in \mathcal{T}_f$, alors $Q' \in \mathcal{T}_f$ et $\text{dist}_f(Q') > \text{dist}_f(Q)$:

L'hypothèse $\text{lg}(g) > N$ implique $g^m(Q) \in \mathcal{T}_g$ avec en plus une inégalité stricte :

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) < \text{dist}_f(g^m(Q))$$

l'hypothèse $\text{lg}(f) > N$ assure alors $Q' = f^n \circ g^m(Q) \in \mathcal{T}_f$. De plus on a

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) = \text{dist}_g(Q) \geq \text{dist}_f(Q)$$

(l'égalité est claire, l'inégalité vient de $Q \in \mathcal{T}_f$), donc

$$\text{dist}_f(g^m(Q)) > \text{dist}_f(Q) \Rightarrow \text{dist}_f(f^n \circ g^m(Q)) > \text{dist}_f(f^n(Q)) = \text{dist}_f(Q)$$

2. Si $Q \in \mathcal{T}_g$ et $Q' \in \mathcal{T}_g$, alors $\text{dist}_g(Q') < \text{dist}_g(Q)$:
 Il est clair que $g^m(Q) \notin \mathcal{T}_g$ (car sinon $f^n \circ g^m(Q) \in \mathcal{T}_f$), autrement dit

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) > \text{dist}_f(g^m(Q))$$

et le résultat se déduit grâce aux relations

$$\text{dist}_g(Q) = \text{dist}_g(g^m(Q))$$

$$\text{dist}_f(g^m(Q)) = \text{dist}_f(f^n \circ g^m(Q)) \geq \text{dist}_g(f^n \circ g^m(Q)) \quad \square$$

Remarque 2.14 La preuve ci-dessus est essentiellement un « ping-pong », technique classique dans ce genre de problème (voir [19]). Nous avons cependant donné le détail des arguments car ce résultat sera crucial dans la section 2.3, où nous utiliserons le fait que $d(fgf^{-1}g^{-1}) \geq 2$. On peut démontrer un résultat analogue pour un groupe engendré par plus de deux générateurs (cf. [24]). Ainsi si f_1, \dots, f_p sont des automorphismes de type Hénon avec des géodésiques 2 à 2 distinctes, il existe des entiers n_i tel que le groupe $\langle f_1^{n_1}, \dots, f_2^{n_2} \rangle$ ne contiennent que des automorphismes de type Hénon (à part l'identité).

On obtient immédiatement les deux corollaires :

Corollaire 2.15 Soient f, g de type Hénon. Si $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$, alors $\langle g, f \rangle$ contient un groupe libre non abélien.

Preuve. En notant N le diamètre de $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$, il suffit de prendre n tel que $\text{lg}(f^n) > N$ et $\text{lg}(g^n) > N$. On a alors $\langle f^n, g^n \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. \square

Corollaire 2.16 Soient f, g de type Hénon. Si $g \circ f = f \circ g$, alors $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$.

Nous allons maintenant calculer le centralisateur d'un automorphisme g de type Hénon, que nous noterons

$$\text{Cent}(g) = \{f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2] ; f \circ g = g \circ f\}$$

Ceci est indépendant de la preuve du théorème 2.1.

Lemme 2.17 Soit $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 . Posons

$$H = \{f \in \text{Cent}(g); d(f) = 1\}$$

Alors H est conjugué à un groupe engendré par une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre.

Preuve. Remarquons que pour chaque $f \in H$ l'arbre $\text{Fix}(f)$ est non borné car il contient $\text{Géo}(g)$ (lemme 2.3); donc f est d'ordre fini par la proposition 2.5. De plus l'ordre de f est borné par le degré (dynamique) de g . En effet f induit une permutation sur l'ensemble des points fixes (dans \mathbb{C}^2) de g , qui est de cardinal égal au degré de g en comptant les multiplicités (voir [15]). Soit $f_0 \in H$ d'ordre maximal parmi les éléments de H . Nous reprenons maintenant les arguments de la preuve de la proposition 2.10. Si $h \in H$ alors l'ordre de f_0 est un multiple de l'ordre de h , de plus si h_1 et h_2 sont deux éléments de H de même ordre, alors il existe n et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_1^n = h_2$ et $h_2^m = h_1$. Finalement $H = \langle f_0 \rangle$ ce qui est le résultat attendu. \square

Proposition 2.18 *Soit $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 . Alors $\text{Cent}(g)$ est engendré par deux éléments h et f satisfaisant :*

1. $d(h) \geq 2$ et $\text{Géo}(g) = \text{Géo}(h)$;
2. f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines primitives de l'unité du même ordre;
3. $f \circ h = h \circ f^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. L'automorphisme f est donné par le lemme 2.17, et parmi les automorphismes de degré ≥ 2 de $\text{Cent}(g)$ (qui ont tous même géodésique, cor. 2.16) on choisit h qui minimise $\text{lg}(h)$. Soit $\varphi \in \text{Cent}(g)$ de degré ≥ 2 , alors $\text{lg}(h)$ divise $\text{lg}(\varphi)$ (faire une division euclidienne), donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi \circ h^q$ soit de degré 1, i.e $\varphi \circ h^q \in \langle f \rangle$ et donc on a bien $\varphi \in \langle h, f \rangle$.

L'entier n est donné par la proposition 2.11, et est donc égal à 1 ou à $(p+1)/2$ où p est l'ordre de f . \square

Remarque 2.19 1. Cette situation contraste avec le cas des automorphismes de degré 1 qui ont tous un centralisateur non dénombrable. En fait tout automorphisme élémentaire est plongeable dans un groupe à un paramètre de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (cf. Introduction), sauf les automorphismes résonnants de la forme

$$(x, y) \rightarrow (\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y)$$

Mais ces derniers commutent avec tout automorphisme $(x + ay^d, y)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

2. L'entier n de la proposition est la plupart du temps égal à 1, i.e le groupe $\text{Cent}(g)$ est souvent isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ou même à \mathbb{Z}).
3. Attention, la réciproque du corollaire 2.16 est cependant fautive à cause des cas où $n \neq 1$. Par exemple, si on note $g = (y, y^2 + x)$ et $f = (jx, j^2 y)$ où j est une racine

cubique de l'unité, alors g et $g \circ f$ sont deux automorphismes de type Hénon qui ont même géodésique mais qui ne commutent pas car :

$$f \circ g = g \circ f^2$$

Pour terminer la preuve du théorème 2.1 il reste à préciser le cas 3, i.e le cas des groupes dont tous les éléments de type Hénon admettent la même géodésique. Ces groupes sont décrits par la

Proposition 2.20 *Soit Γ une géodésique infinie, telle que $\Gamma = \text{Géo}(g)$ pour un certain $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Alors il existe un unique sous-groupe G de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ maximal pour la propriété : « tous les éléments de type Hénon de G admettent Γ comme géodésique ». De plus G est résoluble, et contient un sous groupe isomorphe à \mathbb{Z} d'indice fini.*

Preuve. Si G existe il contient déjà toutes les puissances de g . Montrons d'abord que tout ϕ candidat à être dans G doit laisser Γ globalement invariante. En effet supposons $\phi(\Gamma) \neq \Gamma$, alors on aurait $d(\phi \circ g \circ \phi^{-1}) \geq 2$ avec $\text{Géo}(\phi \circ g \circ \phi^{-1}) = \phi\Gamma \neq \Gamma$, ce qui est contraire à la propriété exigée de G .

On est ainsi conduit à poser G égal au groupe des automorphismes qui laissent Γ globalement invariante. Il reste à montrer que G vérifie les propriétés annoncées. Distingons dans G trois classes d'automorphismes en fonction de la manière dont ils agissent sur Γ :

1. L'ensemble T_Γ des automorphismes qui agissent sur Γ par translation.
2. Le groupe F_Γ des automorphismes qui fixent Γ point par point.
3. L'ensemble S_Γ des automorphismes qui agissent sur Γ par symétrie autour d'un sommet.

D'après la proposition 2.11 on a $F_\Gamma \subset \text{Cent}(g^2)$, ainsi d'après le lemme 2.17 F_Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Choisissons $h \in T_\Gamma$ qui minimise $\text{lg}(h)$, $f \in F_\Gamma$ qui engendre F_Γ et $\varphi \in S_\Gamma$ quelconque ($\varphi = \text{Id}$ si $S_\Gamma = \emptyset$). Alors $G = \langle h, f, \varphi \rangle$. En effet si $\phi \in T_\Gamma$, on a $\text{lg}(h)$ qui divise $\text{lg}(\phi)$, d'où $\phi = h^n \circ f^q$. D'autre part si $\phi \in S_\Gamma$, ou bien ϕ et φ ont même centre, et $\phi \circ \varphi \in \langle f \rangle$, ou bien ϕ et φ n'ont pas même centre, et $\phi \circ \varphi \in T_\Gamma$. Dans les deux cas $\phi \in \langle h, f, \varphi \rangle$.

Montrons maintenant que G est résoluble. On a :

$$[T_\Gamma, F_\Gamma] \subset F_\Gamma$$

$$[T_\Gamma, S_\Gamma] \subset T_\Gamma$$

$$[F_\Gamma, S_\Gamma] \subset F_\Gamma$$

où $[T_\Gamma, F_\Gamma]$ note l'ensemble des commutateurs de la forme $h_0 f_0 h_0^{-1} f_0^{-1}$ avec $h_0 \in T_\Gamma$ et $f_0 \in F_\Gamma$.

Donc $G^{(1)} = [G, G] \subset \langle T_\Gamma, F_\Gamma \rangle$, et $G^{(2)} \subset F_\Gamma$ est abélien.

Enfin G quotienté par le groupe fini $\langle f, \varphi \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Z} (le générateur étant la classe de h dans $G / \langle f, \varphi \rangle$). \square

Corollaire 2.21 *Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f^n g^n f^{-n} g^{-n}$ est de type élémentaire ;
3. Il existe $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $f^n = g^m$.

Preuve. (1) \Rightarrow (2) est clair car $f^n g^n f^{-n} g^{-n}$ fixe $\text{Géo}(f)$.

(3) \Rightarrow (1) est également immédiat en appliquant le point 2 de la remarque 1.8.

(2) \Rightarrow (1) découle de la proposition 2.13 appliquée à f^n et g^n avec n assez grand.

Reste à montrer (1) \Rightarrow (3). Supposons donc $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g) = \Gamma$, et considérons le groupe G des automorphismes qui fixent globalement Γ . Ce groupe contient $\langle f, g \rangle$, et d'après la preuve de la proposition 2.20 $G = \langle h, e, \varphi \rangle$ avec

- h est de type Hénon et $\text{Géo}(h) = \Gamma$
- e est un automorphisme d'ordre r fixant Γ
- $\varphi = Id$ ou agit par symétrie autour d'un sommet sur Γ

et on peut écrire (cf. preuve de la prop. 2.20) :

$$\begin{aligned} f &= h^{n_1} \circ e^{p_1} \\ g &= h^{n_2} \circ e^{p_2} \end{aligned}$$

Quitte à prendre les carrés on peut supposer que n_1 et n_2 sont pairs, ainsi e commute avec h^{n_1} et h^{n_2} (prop. 2.11). Finalement en prenant $n = rn_2$ et $m = rn_1$, où r est choisi de manière à avoir $e^{rp_1} = e^{rp_2} = Id$, on obtient

$$f^n = g^m = h^{rn_1 n_2} \quad \square$$

Remarque 2.22 Si G est un groupe dont tous les éléments de degré ≥ 2 ont même géodésique Γ , et s'il existe $\varphi \in G$ qui agit par symétrie sur Γ , alors tous les éléments de G ont un déterminant jacobien de module 1.

En effet suivant la preuve de la proposition ci-dessus $G = \langle h, f, \varphi \rangle$ avec $\text{Géo}(h) = \Gamma$, $\Gamma \subset \text{Fix}(f)$. On remarque que $|D\varphi| = 1$, en effet $\varphi^2 \in \langle f \rangle$ et $|Df| = 1$. Mais on peut aussi écrire $G = \langle f, \varphi, \varphi \circ h \rangle$, et $\varphi \circ h$ agit par symétrie sur Γ . Ainsi ces trois générateurs ont un déterminant jacobien de module 1.

Synthèse de la preuve du théorème 2.1 :

Les groupes de Wright, ou groupes paraboliques, sont étudiés dans la proposition 2.10.

La proposition 2.20 décrit le cas 3.

Le cas 4 correspond au corollaire 2.15.

Au passage nous avons également montré deux résultats annexes intéressants :

1. description des $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec $\text{Fix}(f)$ non borné (prop. 2.5) ;
2. description du centralisateur d'un automorphisme de type Hénon (prop. 2.18).

2.3 Applications à des questions dynamiques

Nous commençons par caractériser les automorphismes réguliers à l'aide de la mesure invariante. Si λ est une mesure sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ alors on définit la masse de λ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et sur \mathbb{C}^2 respectivement :

$$\|\lambda\| = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \lambda \text{ et } \|\lambda\|_{\mathbb{C}^2} = \int_{\mathbb{C}^2} \lambda$$

On s'aperçoit que si $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ n'est pas régulier alors la mesure $\overline{\mu}_f$ charge la droite à l'infini :

Lemme 2.23 *Soit f de type Hénon. Alors f est régulier si et seulement si $\|\mu_f\|_{\mathbb{C}^2} = \|\mu_f\| = 1$, autrement dit si et seulement si $\overline{\mu}_f$ est le prolongement trivial de μ_f .*

Preuve. Si f est régulier, $\overline{J_f^+} \cap \overline{J_{f^{-1}}^+}$ est un compact de \mathbb{C}^2 . Comme le support de $\overline{\mu}_f$ est contenu dans $\overline{J_f^+} \cap \overline{J_{f^{-1}}^+}$, $\overline{\mu}_f$ ne met pas de masse sur la droite à l'infini.

Réciproquement, supposons f non régulier. Alors $f = \varphi g \varphi^{-1}$, avec g normalisé et φ^{-1} qui contracte la droite à l'infini en un point p (p est l'unique point d'indétermination du prolongement birationnel de φ). On peut supposer (quitte à considérer f^{-1} au lieu de f) que ce point d'indétermination de φ est distinct de celui de g^{-1} . Ainsi d'après la proposition 1.11 (qui s'applique quitte à changer φ en φg^{-n} , cf. rem. 1.12)

$$\left. \begin{aligned} \mu_f^+ &= c \varphi^{-1*} \mu_g^+ \\ \mu_{f^{-1}}^+ &= \frac{1}{d^\circ \varphi} \varphi^{-1*} \mu_{g^{-1}}^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_f = \frac{c}{d^\circ \varphi} \varphi^{-1*} \mu_g$$

avec $c < d^\circ \varphi$ car f n'est pas régulier. La mesure $\overline{\mu}_f$ est de masse 1 sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, coïncide avec μ_f sur \mathbb{C}^2 , et d'autre part

$$\|\varphi^{-1*} \mu_g\|_{\mathbb{C}^2} = \|\mu_g\|_{\mathbb{C}^2} = 1$$

car φ est un biholomorphisme de \mathbb{C}^2 . Donc

$$\|\mu_f\|_{\mathbb{C}^2} = \left\| \frac{c}{d^\circ \varphi} \varphi^{-1*} \mu_g \right\|_{\mathbb{C}^2} = \frac{c}{d^\circ \varphi}$$

Ainsi $\overline{\mu}_f$ place une masse de Dirac de poids $1 - c/d^\circ \varphi$ en p . \square

Nous pouvons maintenant caractériser les automorphismes qui ont même ensemble de Julia, ou même mesure invariante.

Théorème 2.24 *Soient f, g de type Hénon. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $J_f^+ = J_g^+$ ou $J_{g^{-1}}^+$;
2. $G_f^+ = G_g^+$ ou $G_{g^{-1}}^+$;
3. $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$;
4. $\mu_f = \mu_g$;
5. il existe $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $f^n = g^m$.

L'équivalence (3) \Leftrightarrow (5) a déjà été vue (corollaire 2.21) ; nous ne nous occuperons donc pas du point (5) dans la preuve. Il nous a cependant paru intéressant de souligner l'équivalence (1) \Leftrightarrow (5), qui est analogue à un résultat sur les symétries des ensembles de Julia de polynômes à une variable (cf. [4]).

Preuve. Les implications (3) \Rightarrow (1), (2) et (4) sont claires car d'après le corollaire 2.21 si $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ alors il existe n et m tels que $f^n = g^m$.

De même (2) \Rightarrow (1) est claire car

$$J_f^+ = \partial K_f^+ \text{ et } K_f^+ = \{z; G_f^+(z) = 0\}$$

Montrons que (1) \Rightarrow (3). Tout d'abord si $J_f^+ = J_g^+$ alors $\mu^+ := \mu_f^+ = \mu_g^+$ (cor. 1.17). Notons $h = fgf^{-1}g^{-1}$ et supposons $d(h) \geq 2$. Quitte à conjuguer on peut supposer h régulier (i.e h et h^{-1} ont des points d'indétermination disjoints). Les relations

$$f^* \mu^+ = d(f) \cdot \mu^+$$

$$g^* \mu^+ = d(g) \cdot \mu^+$$

impliquent

$$h^* \mu^+ = \mu^+ \text{ et } h^{-1*} \mu^+ = \mu^+$$

Remarquons que J_f^+ adhère au point d'indétermination de h^{-1} , car sinon (remarque 1.13) on aurait

$$\|h^* \mu^+\| = d(h)$$

De même J_f^+ doit adhérer au point d'indétermination de h , d'où une contradiction car J_f^+ n'adhère qu'en un seul point à l'infini (le point d'indétermination de f). Ainsi h est de

type élémentaire ; de même le commutateur de f^n et g^n est de type élémentaire pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on conclut grâce au corollaire 2.21.

Enfin montrons (4) \Rightarrow (2). D'après le lemme 2.23 on peut supposer f et g réguliers en même temps. Dans ce cas d'après [5] μ_f est la mesure d'équilibre de J_f et son potentiel est la fonction $\max(G_f^+, G_{f^{-1}}^+)$. Ainsi si $\mu_f = \mu_g$ alors leur deux potentiels sont égaux :

$$\max(G_f^+, G_{f^{-1}}^+) = \max(G_g^+, G_{g^{-1}}^+)$$

d'où, quitte à changer g en g^{-1} , G_f^+ et G_g^+ coïncident sur un ouvert. En utilisant le fait que ces fonctions de Green sont continues et de plus pluriharmoniques en dehors de leurs zéros on en déduit par prolongement analytique que $G_f^+ = G_g^+$ sur $U_f^+ \cup U_g^+$, et donc sur \mathbb{C}^2 . \square

Considérons maintenant $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 , et supposons que g possède un point périodique contractant p . Quitte à prendre une puissance et à conjuguer par une translation on se ramène à $p = 0$ point fixe contractant. Notons Σ le bassin d'attraction de 0 : c'est un domaine de Fatou-Bieberbach, i.e un domaine distinct de \mathbb{C}^2 et biholomorphe à \mathbb{C}^2 . On cherche à calculer le groupe $\text{Aut}[\Sigma]$ des $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui laissent Σ invariant (i.e $f\Sigma = \Sigma$). La proposition suivante précise un résultat de [9] :

Proposition 2.25 *Avec les notations ci-dessus, $\text{Aut}[\Sigma]$ est constitué des automorphismes qui fixent 0 (dans \mathbb{C}^2) et qui laissent $\text{Géo}(g)$ globalement invariante. De plus, $\text{Aut}[\Sigma]$ ne contient pas d'automorphisme qui agisse par symétrie sur $\text{Géo}(g)$. Finalement $\text{Aut}[\Sigma]$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. Soit $f \in \text{Aut}[\Sigma]$, alors f laisse invariant le bord topologique de Σ qui n'est rien d'autre que J_g^+ (voir [5]). Ainsi fgf^{-1} et g ont même ensemble de Julia et donc même géodésique par le théorème 2.24. On en déduit que f laisse globalement invariante $\text{Géo}(g)$. Remarquons que f ne peut pas agir par symétrie sur $\text{Géo}(g)$; sinon, d'après la remarque 2.22 g aurait un déterminant jacobien de module 1 ce qui interdirait l'existence d'un point fixe contractant.

Montrons maintenant que f fixe 0. Si $d(f) = 1$ alors f commute avec g^2 (prop. 2.11). Si $d(f) \geq 2$ alors d'après le corollaire 2.21 il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = g^m$. Dans les deux cas il existe donc $m > 0$ tel que f commute avec g^m . Soit maintenant $w \in \Sigma$. On a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(f(w)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{km}(f(w)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(g^{km}(w)) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Réciproquement supposons que $f(0) = 0$, et que f laisse $\text{Géo}(g)$ globalement invariante. Le théorème 2.24 assure que f laisse invariant $J_g^+ = \partial K_g^+$; donc f agit sur les composantes connexes de l'intérieur de K_g^+ . Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la composante connexe de K_g^+ contenant 0 est fixée par f , autrement dit Σ est fixé par f .

Le groupe des automorphismes qui fixent globalement $\text{Géo}(g)$ et qui préservent l'orientation de $\text{Géo}(g)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ (voir preuve de la prop. 2.20). Le groupe $\text{Aut}[\Sigma]$ étant un sous-groupe de ce groupe est donc bien un produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (en fait il est facile de voir que $n = 1$ ou p). \square

Remarque 2.26 Si g admet plusieurs points fixes contractants, alors la proposition implique qu'au plus un seul des bassins associés peut avoir un stabilisateur non isomorphe à \mathbb{Z} . En effet, supposons que g admet deux points fixes contractants p_1 et p_2 de bassin respectif Σ_1 et Σ_2 . Si f_1 et f_2 sont des automorphismes périodiques contenus respectivement dans $\text{Aut}[\Sigma_1]$ et $\text{Aut}[\Sigma_2]$, alors ils fixent chacun point par point $\text{Géo}(g)$. Le lemme 2.9 dit alors que f_1 et f_2 ont même point fixe, donc $p_1 = p_2$.

2.4 Compléments et exemples

2.4.1 Les groupes de Wright

Soit $H \subset \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ un groupe de Wright. Suivant la proposition 2.10 nous pouvons décrire H . Tout d'abord chaque élément de H est conjugué à une rotation d'ordre fini $(\alpha x, \beta y)$, donc quitte à conjuguer on peut supposer que H contient une telle rotation. Le groupe H fixe un bout, il existe donc une demi-géodésique infinie formée des arêtes

$$IdS = \varphi_0 S, \varphi_1 S, \dots, \varphi_n S, \dots$$

et caractérisée par la propriété suivante : pour tout $h \in H$, il existe $k = k(h) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i \geq k$, h fixe l'arête $\varphi_i S$.

Ainsi en posant

$$H_i = \text{Stab}(\varphi_i S) \cap H$$

on obtient une suite croissante de sous-groupe tels que

$$H = \bigcup_i H_i$$

On peut de plus supposer que la suite (H_i) est strictement croissante quitte à prendre une sous-suite.

Réciproquement la donnée d'un groupe de Wright (à conjugaison près) revient à la donnée

- d'une demi-géodésique infinie Γ contenant des arêtes

$$\varphi_0 S = IdS, \varphi_1 S, \dots, \varphi_n S, \dots$$

N.B : ici $(\varphi_i S)_{i \in \mathbb{N}}$ est seulement une sous-suite de la suite des arêtes de Γ .

- d’une suite (α_i, β_i) de couples de racines de l’unité du même ordre ;
- d’une suite d’entier $p_i \geq 2$.

telles que

- pour tout $i \geq 1$ on ait

$$(\alpha_i x, \beta_i y)^{p_i} = (\alpha_{i-1} x, \beta_{i-1} y)$$

- pour tout $i \geq j$

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} \text{ commute avec } \varphi_j(\alpha_j x, \beta_j y) \varphi_j^{-1}$$

- pour tout $i \geq 1$

$$\varphi_i(\alpha_i x, \beta_i y) \varphi_i^{-1} \text{ ne fixe pas } \varphi_{i-1} S$$

Alors en posant

$$H_i = \varphi_i \langle (\alpha_i x, \beta_i y) \rangle \varphi_i^{-1}$$

on produit une suite de sous-groupes qui est strictement croissante et dont l’union est non linéarisable dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$: le groupe

$$H = \bigcup_i H_i$$

est un groupe de Wright.

Exemple 2.27 Posons $H_0 = \langle (-x, -y) \rangle$ et pour tout $k \geq 1$:

$$\alpha_k = \beta_k = e^{2i\pi/2^{k+1}}$$

$$g_k = (y, c_k y^{2^{k+1}} + x)$$

$$\varphi_i = g_1^2 \circ g_2^2 \circ \cdots \circ g_i^2$$

où $c_k \in \mathbb{C}^*$. Alors $H = \bigcup_{i \geq 0} H_i$ est un groupe de Wright, où

$$H_i = \varphi_i \langle (\alpha_i x, \beta_i y) \rangle \varphi_i^{-1}$$

Proposition 2.28 *Un groupe de Wright H est toujours formellement linéarisable.*

Preuve. Reprenons les notations ci-dessus. Montrons tout d’abord que nous pouvons prendre les φ_i tangents à l’identité. Si pour tout i on a $\alpha_i = \beta_i$ alors $D\varphi_i(0)$ et $(\alpha_i x, \beta_i y)$ commutent ; on peut donc remplacer φ_i par $\varphi_i \circ D\varphi_i(0)^{-1}$ sans changer le groupe H . D’autre part si $\alpha_i \neq \beta_i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$ alors pour tout $j \geq i$ on a également $\alpha_j \neq \beta_j$. D’après la remarque 2.6 l’écriture normale de φ_j ne contient que des $a(\lambda)$ avec $\lambda = 0$, donc $D\varphi_j(0) = (y, x)$ ou Id . Ainsi on peut supposer quitte à conjuguer H par (y, x) qu’une infinité de φ_i sont tangents à l’identité. En prenant une sous-suite nous pouvons donc

encore nous ramener au cas où tous les φ_i sont tangents à l'identité. Posons maintenant $f_i = \varphi_{i-1}^{-1} \varphi_i$. Alors

$$\varphi_i = f_1 \circ \cdots \circ f_i$$

Par construction f_i est tangent à l'identité et commute avec $(\alpha_i x, \beta_i y)$ qui est d'ordre fini (disons d'ordre n_i). Donc tous les monômes (non linéaires) de f_i sont de degré supérieur à n_i . Ainsi, composer à droite par f_i n'affecte que les monômes de degré supérieur à n_i ; de plus la suite n_i est strictement croissante. La limite $\varphi = \lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi_i$ est donc une série formelle qui linéarise H :

$$\varphi^{-1} H \varphi \subset \{(\alpha x, \beta y); |\alpha|, |\beta| = 1\} \quad \square$$

Proposition 2.29 *La conjugante formelle d'un groupe de Wright peut être divergente, ou à contrario globalement convergente.*

Preuve. Reprenons l'exemple 2.27. Notons

$$\varphi = \lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} g_1^2 \circ \cdots \circ g_i^2$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_n = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |y| > |x| \text{ et } \|(x, y)\| > 1/n\}$$

Quitte à prendre c_k de module assez grand, on peut supposer que

$$\forall z \in V_n, g_n(z) \in V_n \text{ et } \|g_n(z)\| > 2\|z\|$$

Ainsi si $z \in V_n$ et $i > n$ on a

$$\|\varphi_i(z)\| > 4^i \|z\|$$

donc φ est divergente sur tout voisinage de l'origine.

Construisons maintenant, à partir du même exemple, une linéarisante convergente. Notons

$$W_n = \varphi_{n-1}^{-1}(B(0, n)) \cup B(0, n)$$

et choisissons les c_k de module suffisamment petits pour que

$$\forall z \in W_k, \|g_k^{\pm 2}(z) - z\| < 2^{-k}$$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^2$ la suite $(\varphi_i^{-1}(z))_{i>0}$ est de Cauchy, et il est facile de voir que la suite $(\varphi_i^{-1})_{i>0}$ converge uniformément sur tout compact vers une limite ψ . Cette application ψ est injective comme limite d'automorphismes de déterminant jacobien égal à un. Pour montrer que ψ est surjective, il suffit de montrer que l'image inverse d'un borné est un

borné. En effet ψ sera alors une application propre donc fermée, de plus ψ est ouverte car holomorphe de déterminant jacobien 1, donc $\psi(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2$. Considérons donc la boule fermée $B(0, k)$. Pour $n > k$ on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(B(0, k)) &= g_1^2 \circ \cdots \circ g_{k-1}^2 \circ g_k^2 \circ \cdots \circ g_n^2(B(0, k)) \\ &\subset \varphi_{k-1}(B(0, k+1))\end{aligned}$$

Ainsi $\psi^{-1}(B(0, k)) \subset \varphi_{k-1}(B(0, k+1))$, ce qui termine la démonstration (je remercie Bruno Scardua qui m'a aidé à mettre au clair ces arguments). \square

Remarque 2.30 Dans la deuxième partie de la preuve nous avons en fait produit un exemple de groupe de Wright linéarisable dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ des automorphismes biholomorphes de \mathbb{C}^2 . Bien sûr on peut de manière similaire produire des exemples intermédiaires de linéarisante localement mais non globalement convergente.

2.4.2 Représentations de groupes dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

Il est facile de voir que certains groupes ne peuvent être représentés fidèlement dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ que comme des sous-groupes de degré 1. Par exemple considérons une représentation fidèle ρ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On remarque que le stabilisateur dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ d'une matrice M est toujours non dénombrable, ainsi suivant la remarque 2.19 on montre que $\rho(\text{SL}(2, \mathbb{C}))$ est à conjugaison près un sous-groupe du groupe affine A (ce ne peut pas être un groupe de Wright ou un sous-groupe de E car ceux-ci sont respectivement abélien et résoluble). Ce raisonnement reste valable pour tout groupe G dont les éléments ont un stabilisateur trop gros pour être isomorphe au stabilisateur d'un automorphisme de type Hénon.

Certains groupes linéaires plus petits peuvent cependant admettre des représentations « non triviale ». Considérons par exemple le groupe

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

Posons

$$\begin{aligned}f &= (iy, ix) \\ g &= (\alpha x + y^3, \alpha y)\end{aligned}$$

où $\alpha = e^{2i\pi/6}$. Alors on a

$$f^2 = g^3 = (-x, -y)$$

Ainsi $\langle f, g \rangle \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, et

$$f \circ g = (i\alpha y, i\alpha x + iy^3)$$

est de type Hénon.

J. Hubbard m'a fait remarquer qu'une application de Hénon généralisée de déterminant jacobien égal à 1 est conjuguée à son inverse :

$$(y, P(y) - x)^{-1} = (y, x) \circ (y, P(y) - x) \circ (y, x) = (P(x) - y, x)$$

Si l'on regarde le groupe engendré par les deux involutions (y, x) et $(-x + P(y), y)$ on obtient le groupe diédral infini, et dire que (y, x) conjugue $g = (y, P(y) - x)$ à son inverse c'est dire que (y, x) échange J_g^+ et $J_{g^{-1}}^+$, ou encore que (y, x) agit par symétrie sur $\text{Géo}(g)$ (cf. thm 2.24). Nous allons maintenant étudier en détails les représentations de groupes diédraux.

Nous nous proposons de décrire les sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ engendrés par deux involutions. Considérons donc $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec $f^2 = g^2 = \text{Id}$. On remarque que les seules relations qui peuvent subvenir sont du type $(f \circ g)^n = \text{Id}$ (On élimine les cas triviaux où f ou g sont ou bien l'identité ou bien égaux entre eux).

Premier cas : $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$.

Alors $d(f \circ g) \geq 2$ (reprendre l'argument utilisé dans la preuve du lemme 1.4), en particulier $f \circ g$ est non périodique. Ainsi $\langle f, g \rangle$ est le groupe diédral infini, on est dans le cas 3 du théorème 2.1. Donnons un exemple explicite : soient

$$f = (y, x) \in A \setminus E$$

$$g = (-x + y^3, -y) \in E \setminus A$$

Alors f et g sont bien deux involutions avec $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$; en effet f fixe le sommet $\text{Id}A$, g fixe le sommet $\text{Id}E$ mais ni f ni g ne fixe l'arête $\text{Id}S$.

Deuxième cas : $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$.

Dans ce cas le groupe $\langle f, g \rangle$ fixe un sommet de l'arbre \mathcal{T} , autrement dit $\langle f, g \rangle$ est conjugué à un sous-groupe de E ou de A . Supposons donc tout d'abord $f, g \in E$. Un calcul immédiat montre alors que f et g sont chacun de l'une des trois formes suivantes :

1. $(-x + Q(y), y)$;
2. $(x + Q_I(y), -y + c)$;
3. $(-x + Q_P(y), -y + c)$.

où $c \in \mathbb{C}$, $Q, Q_I, Q_P \in \mathbb{C}[Y]$, avec Q_I (resp. Q_P) n'ayant que des puissances impaires (resp. paires). Donc $(f \circ g)^2$ est de la forme $(x + R(y), y + c)$ qui est ou bien non périodique, ou bien l'identité.

Si $(f \circ g)^2 = Id$, $\langle f, g \rangle$ est le groupe de Klein et à conjugaison près il est facile de voir que

$$\langle f, g \rangle = \{Id, (-x, -y), (-x + Q_I(y), y), (x - Q_I(y), -y)\}$$

où $Q_I(y)$ n'a que des puissances impaires.

Si $(f \circ g)^2$ est non périodique, alors $\langle f, g \rangle$ est encore une fois le groupe diédral infini, réalisé cette fois comme un sous-groupe du groupe élémentaire.

D'autre part, si $f, g \in A$, alors ou bien ils n'ont pas de points fixes communs dans \mathbb{C}^2 (on réalise le groupe diédral infini), ou bien on peut supposer $f, g \in GL(2, \mathbb{C})$. Dans ce dernier cas on peut réaliser des groupes diédraux d'ordre arbitraire.

Chapitre 3

Dynamique des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

3.1 Propriété de densité locale

Nous nous proposons ici de démontrer le

Théorème 3.1 *Soient $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ deux difféomorphismes locaux à l'origine de \mathbb{C}^2 . On suppose que les parties linéaires de f et g engendrent un sous-groupe dense de $GL(2, \mathbb{C})$. Alors le pseudo-groupe engendré par f et g est localement à orbites denses.*

Précisons l'énoncé du théorème (suivant [8]). Considérons un voisinage V de l'origine tel que les difféomorphismes locaux f, g, f^{-1} et g^{-1} soient définis sur V . Une chaîne d'origine z dans V est une suite finie de points $\{z_0 = z, z_1, \dots, z_n\}$ telle que

1. $z_i \in V$ pour tout $0 \leq i < n$;
2. $z_{i+1} = h(z_i)$ où h est l'un des f, g, f^{-1} ou g^{-1} .

L'ensemble des points appartenant à une chaîne d'origine z dans V est la pseudo-orbite de z dans V sous l'action du pseudo-groupe $\langle f, g \rangle$. S'il existe V tel que pour tout $z \neq 0$ dans V l'adhérence de cette pseudo-orbite soit un voisinage de l'origine, nous dirons que $\langle f, g \rangle$ est localement à orbites denses. Cette définition n'est pas la seule envisageable ; initialement elle a été choisie car elle est adaptée au cas de pseudo-groupes provenant d'holonomie de feuilletage. C'est également une définition qui se prête bien à des simulations numériques.

Cette section est consacrée à une discussion de ce théorème. Nous montrons tout d'abord que l'hypothèse sur les parties linéaires est raisonnable : c'est une condition générique si f et g sont suffisamment proches de l'identité. Nous expliquons ensuite pourquoi la preuve du résultat analogue en dimension 1 (voir [8]) ne se laisse pas généraliser simplement. Enfin nous montrons le théorème, la démarche étant de faire apparaître un flot dans l'adhérence du pseudo-groupe considéré. Je remercie vivement Frank Loray à qui je dois cette idée.

3.1.1 Un résultat sur les sous-groupes de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$

Il est bien connu qu'il existe des couples de matrices (A, B) tel que le groupe engendré par A et B soit discret dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ (groupes kleinien !). Commençons par donner un exemple d'un tel couple. Posons

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $|\lambda| \neq 1$. Il existe deux cônes V_A^+ et V_A^- (que l'on peut prendre d'autant plus étroit que $|\lambda|$ est grand) autour des axes des abscisses et des ordonnées respectivement, tels qu'on ait

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, A^n(U_A) \cap U_A = \emptyset \text{ où } U_A = \mathbb{C}^2 \setminus (\overline{V_A^+ \cup V_A^-})$$

Soit $B = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$ où P est choisi de manière à ce que B n'admette pas les axes de coordonnées comme direction propre. Il existe V_B^+, V_B^- et U_B avec des propriétés analogues ; de plus quitte à prendre $|\lambda|$ et $|\mu|$ suffisamment grands on peut supposer que les cônes $V_A^+, V_A^-, V_B^+, V_B^-$ sont deux à deux disjoints (cf. fig. 3.1). Soit $z \in U_A \cap U_B$. Pour toute matrice M non triviale dans $\langle A, B \rangle$, on a $M(z) \notin U_A \cap U_B$. Ainsi z est un point isolé dans l'orbite (non périodique) de z par $\langle A, B \rangle$, donc $\langle A, B \rangle$ est discret.

Nous avons ainsi mis en évidence un couple (A, B) vérifiant une propriété exactement opposée à l'hypothèse que nous faisons dans l'énoncé du théorème ; de plus cette propriété est stable par perturbation. En effet perturber A et B revient à bouger un peu les directions propres et les valeurs propres, i.e à perturber légèrement les cônes définis ci-dessus et le raisonnement s'applique toujours (le fait que A et B soient initialement dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ est sans importance). Cependant la propriété de densité exigée dans le théorème devient générique pour des couples de matrices (A, B) proches de l'identité : c'est ce que nous nous proposons maintenant de montrer (remarquons que dans le raisonnement ci-dessus $|\lambda|$ et $|\mu|$ ne peuvent être pris proche de 1 car sinon $U_A \cap U_B$ devient vide). Le lemme suivant montre déjà que $\langle A, B \rangle$ sera génériquement non discret :

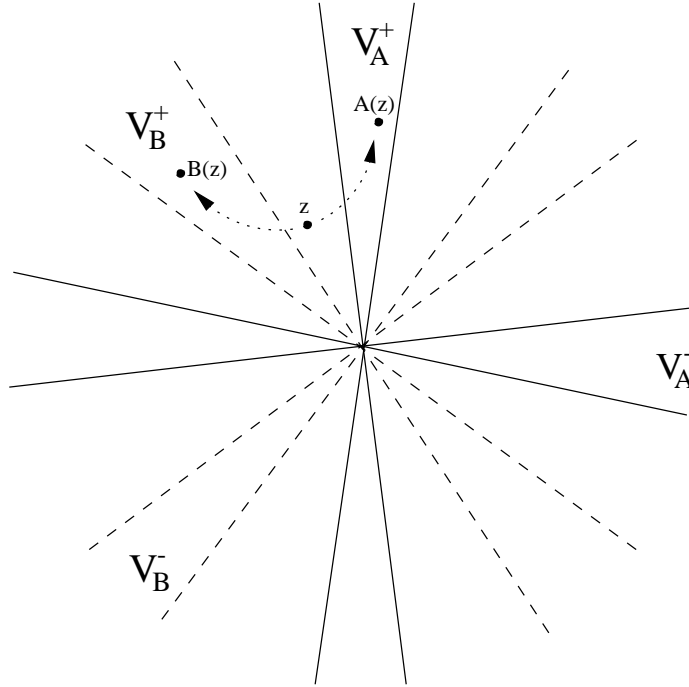
Lemme 3.2 (Zassenhaus) *Il existe un voisinage W de l'identité dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ tel que pour tout $A, B \in W$ on ait : $\langle A, B \rangle$ discret implique $\langle A, B \rangle$ nilpotent.*

On trouvera une discussion (et une généralisation) de ce lemme dans [16]. Tel que nous l'énonçons la preuve en est élémentaire et repose sur la remarque suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A, B \in W$ on ait

$$\|ABA^{-1}B^{-1} - Id\| < \alpha \|A - Id\| \cdot \|B - Id\|$$

Nous aurons besoin d'une version plus précise de ce lemme. Nous commençons par définir des applications φ_n de $\text{GL}(2, \mathbb{C}) \times \text{GL}(2, \mathbb{C})$ dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ en posant

$$\varphi_1(A, B) = ABA^{-1}B^{-1}$$


 FIGURE 3.1 – Le groupe $\langle A, B \rangle$ est discret

$$\varphi_n(A, B) = \varphi_1(A, \varphi_{n-1}(A, B)) \text{ pour tout } n \geq 2$$

Nous noterons

$$\mathcal{W} = \left\{ (A, B) \in W \times W; \|A - Id\| < \frac{1}{2\alpha}, \|B - Id\| < \frac{1}{2\alpha} \right\}$$

Remarquons que $(A, B) \in \mathcal{W}$ implique $\|\varphi_n(A, B) - Id\| < 2^{-n-1}\alpha^{-1}$.

A chaque matrice $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ nous associons W_A l'ensemble des matrices B dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ dont les deux valeurs propres sont non réelles et de modules distincts, et telles que B et ABA^{-1} n'aient pas de direction propre commune. Posons

$$\mathcal{W}'_n = \{(A, B) \in \mathcal{W}; \varphi_n(A, B) \subset W_A\} \text{ pour tout } n \geq 1$$

Alors chaque \mathcal{W}'_n est un ouvert dense dans \mathcal{W} . Enfin notons

$$\mathcal{W}' = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{W}'_n$$

C'est un ensemble de mesure pleine dans \mathcal{W} .

Lemme 3.3 Avec les notations ci-dessus, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{W}'$ et pour tout voisinage U de l'identité dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, il existe $C, D \in U$ tel que

1. C et D appartiennent au groupe $\langle A, B \rangle$;
2. C (resp. D) ait ses valeurs propres non réelles et de modules distincts ;
3. C et D n'aient pas de directions propres communes.

Preuve. Posons

$$C = \varphi_n(A, B) \text{ et } D = ACA^{-1}$$

En prenant n assez grand C et D appartiennent à U , de plus par construction de \mathcal{W}' ces deux matrices vérifient les propriétés annoncées. \square

Remarquons que si $(A, B) \in \mathcal{W}'$ alors le groupe $\langle A, B \rangle$ est non nilpotent, ainsi le lemme ci-dessus peut être vu comme un complément du lemme de Zassenhaus.

Proposition 3.4 Il existe un sous-ensemble $\mathcal{W}'' \subset \mathcal{W}$ de mesure pleine tel que pour tout $(A, B) \in \mathcal{W}''$ le groupe engendré par A et B soit dense dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$.

Preuve. Posons \mathcal{W}'' égal à l'ensemble des couples $(A, B) \in \mathcal{W}'$ tels que le groupe multiplicatif engendré par $\det(A)$ et $\det(B)$ soit dense dans \mathbb{C}^* . Ceci définit bien un ensemble de mesure pleine dans \mathcal{W}' .

Maintenant soit $(A, B) \in \mathcal{W}''$. Considérons l'adhérence dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ du groupe $\langle A, B \rangle$, d'après le théorème de Cartan c'est un sous-groupe de Lie (a priori réel !) de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$, de dimension non nulle par le lemme de Zassenhaus. Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de $\overline{\langle A, B \rangle}$, \mathfrak{g} est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel non trivial. Soit U un voisinage de l'identité dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ tel que

$$\exp \mathfrak{g} \cap U = \overline{\langle A, B \rangle} \cap U$$

Soient $C, D \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ les matrices données par le lemme 3.3 relativement à U . Il existe $M, N \in \mathfrak{g}$ vérifiant

$$\exp M = C \text{ et } \exp N = D$$

Les valeurs propres de C étant distinctes, C est diagonalisable. Quitte à conjuguer pour diagonaliser C on peut supposer :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

avec $\beta\gamma \neq 0$ car C et D n'ont pas de direction propre commune. Posons

$$P_1 = [M, N], \quad P_2 = [M, [M, N]], \quad P_n = \underbrace{[M, [M, \dots [M, N]]]}_{n \text{ fois}}$$

Calculons ces crochets :

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & (2a)^n \beta \\ (-2a)^n \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que a n'est pas réel, car C a ses valeurs propres non réelles ; et a n'est pas non plus imaginaire pur, car les valeurs propres de C ne sont pas de module 1 (elles sont de modules distincts). On en déduit que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ forme une base de l'espace vectoriel réel de dimension 4 :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} ; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

En remarquant que

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \right]$$

nous concluons que l'algèbre engendrée par M et N est $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Ainsi au niveau des groupes on a $\overline{\langle C, D \rangle} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Maintenant soit $T \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$. Alors grâce à l'hypothèse de généricité sur les déterminants il existe un élément $T_1 \in \langle A, B \rangle$ tel que $T_1^{-1}T$ soit arbitrairement proche d'une matrice $T' \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. D'après ce qui précède il existe un élément $T_2 \in \langle C, D \rangle$ proche de T' . Ainsi on produit des matrices $T_1 T_2 \in \langle A, B \rangle$ aussi proches que l'on veut de T . \square

Remarque 3.5 1. Nous avons montré au passage que $\overline{\langle C, D \rangle} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Ainsi

$$\overline{\langle A, B \rangle \cap \text{SL}(2, \mathbb{C})} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

2. Nos motivations nous ont conduit à nous cantonner à la dimension 2. Cependant le résultat de la proposition précédente semble se généraliser sans difficulté en dimension quelconque. Comme précédemment on produit dans l'algèbre de Lie de $\langle A, B \rangle$ deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, N = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Les crochets P_n sont de la formes

$$P_n = ((a_i - a_j)^n b_{ij})_{i, j}$$

et si les $(a_i - a_j)$ vérifie une condition générique on obtient encore une base de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$...

3.1.2 Rappel : la méthode en dimension 1

L'analogie du théorème 3.1 en dimension 1 est démontré dans [8]. Rappelons brièvement le plan de la preuve, afin de mettre en évidence la difficulté qui survient en dimension supérieure. Considérons donc $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

$$f(z) = \lambda z + z^2(\dots)$$

$$g(z) = \mu z + z^2(\dots)$$

avec $|\lambda|, |\mu| < 1$. Quitte à conjuguer on peut supposer f linéaire, et on procède comme suit :

1. La suite $\mu^{-n}g^n$ converge uniformément (vers la linéarisante ϕ de g).
2. Si λ et μ sont génériques, l'ensemble des points $\{\lambda^{-n}\mu^m; n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{C} .
3. En écrivant $f^{-n} \circ g^m(x) = \lambda^{-n}\mu^m\mu^{-m}g^m(x)$ et en faisant tendre $\lambda^{-n}\mu^m$ vers $\frac{y}{\phi(x)}$ on montre que y est dans l'adhérence de l'orbite de x par $\langle f, g \rangle$.

Le point 1 peut se généraliser en dimension supérieure à condition d'ajouter une hypothèse (cf. [28]). Si $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ et si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de $Dg(0)$, alors en supposant $|\lambda_1|^2 < |\lambda_2|^2$ et $|\lambda_2|^2 < |\lambda_1|^2$ on a bien $Dg(0)^{-n}g^n$ qui converge vers la linéarisante de g .

C'est le point 2 qui ne se généralise pas. En dimension 2 même si deux matrices $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ engendrent un groupe dense il faudra en général utiliser des mots de longueur très grande pour s'approcher d'une matrice donnée (et non pas seulement de longueur 2 comme dans le cas commutatif de la dimension 1). A vrai dire pour recopier la preuve de la dimension 1 il nous suffirait que l'ensemble des points $\{A^{-n}B^m(z); n, m \in \mathbb{N}\}$ soit dense, mais même cette propriété plus faible n'est pas vraie comme le montre la

Proposition 3.6 *Soient $A_1, \dots, A_n \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ des matrices hyperboliques (i.e leurs deux valeurs propres sont de module différent) et deux à deux sans directions propres communes. Considérons l'ensemble E_N des matrices qui s'écrivent comme une composition de longueur N :*

$$E_N = \{A_{i_1}^{p_1} \circ \dots \circ A_{i_N}^{p_N}; p_j \in \mathbb{Z}, i_j \neq i_{j+1}\}, N \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $z \in \mathbb{C}^2$, $E_N(z) = \{M(z); M \in E_N\}$ n'est pas dense dans \mathbb{C}^2 .

Preuve. Supposons $n = N = 2$, le cas général étant similaire. Nous allons en fait montrer qu'il n'y a pas densité pour l'action sur la droite à l'infini (notée $\mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^1$). Pour $i = 1, 2$, notons w_i^+ et w_i^- les points attractif et répulsif de A_i sur $\mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^1$, et soit V_i un petit voisinage

(dans \mathbb{CP}_∞^1) de $w_i^+ \cup w_i^-$. Soit $z \in \mathbb{CP}_\infty^1$ quelconque. Si $p \in \mathbb{Z}$ avec $|p|$ assez grand on a $A_2^p(z) \in V_2$ et $A_1^p(V_2) \subset V_1$. Ainsi tous les éléments de $\{A_1^{p_1} \circ A_2^{p_2}(z); p_i \in \mathbb{Z}\}$ sauf un nombre fini sont contenus dans V_1 . En raisonnant de même pour les mots commençant par A_2 on obtient le résultat annoncé. \square

3.1.3 Preuve du théorème

L'idée principale pour montrer le théorème 3.1 est de construire dans l'adhérence du pseudo-groupe engendré par f et g un flot conjugué au flot linéaire $(x, y) \rightarrow (x + ty, y)$. La preuve est élémentaire mais un peu technique, nous l'avons décomposée en 4 étapes.

Première étape : réduction du problème

Nous allons travailler avec deux difféomorphismes f_0 et g_0 contenus dans le pseudo-groupe $\langle f, g \rangle$. Par hypothèse de densité, les parties linéaires de f_0 et g_0 peuvent être choisies arbitrairement proches de deux matrices données. Nous pouvons supposer que $Df_0(0)$ est une matrice contractante. Les conditions de résonance à éviter pour pouvoir appliquer le théorème de linéarisation de Poincaré sont alors de la forme

$$\lambda_1^n = \lambda_2 \text{ et } \lambda_2^n = \lambda_1$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de $Df_0(0)$. Par densité on peut supposer que $Df_0(0)$ est non résonnante. Ainsi quitte à conjuguer d'abord par un difféomorphisme local (pour linéariser) puis par une application linéaire (pour diagonaliser), nous pouvons supposer que f_0 est linéaire diagonal. Cependant, f_0 étant obtenu en conjugant par un difféomorphisme local, son domaine de définition n'est pas \mathbb{C}^2 tout entier mais seulement un voisinage de l'origine. D'autre part par la remarque 3.5 nous pouvons prendre $Dg_0(0) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Plus précisément nous supposons :

1. $f_0 = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < r$ et $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1| < \delta$ (et donc $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1| < \delta$, $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1 + \delta$).
2. $Dg_0(0) = B_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ avec $|c| < \varepsilon$, $|a - 1| < \varepsilon$, $|d - 1| < \varepsilon$ et $\rho \leq |b| \leq (1 + \delta)\rho$.

Nous faisons de plus les hypothèses suivantes :

$$r < 1/500, \varepsilon < 1/2, \delta < 1/4 \text{ et } \rho(1 + \delta) < 1/2$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$$

Nous allons construire par récurrence une suite d'éléments $g_i \in \langle f_0, g_0 \rangle$ qui converge uniformément sur un voisinage de l'origine vers une application linéaire de la forme

$$(x, y) \longrightarrow (x + \beta y, y)$$

Pour cela posons $g'_i = A^{-1}g_i A g_i^{-1}$ et $g_{i+1} = A^{-n_i} g'_i A^{n_i}$. Les deux étapes suivantes sont consacrées à montrer que pour un bon choix des entiers n_i cette suite convient.

Deuxième étape : contrôle des parties linéaires

Calculons le commutateur de A^{-1} et B_0 :

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := A^{-1} B_0 A B_0^{-1} = \begin{pmatrix} ad - bc \frac{\lambda_2}{\lambda_1} & ab \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \\ cd \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) & ad - bc \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

En utilisant $\delta < 1/4$ et $ad = 1 + bc$ on vérifie facilement que les coefficients de cette matrice satisfont aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |c'| &= \left| cd \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \right| \leq \varepsilon(1 + \varepsilon)\delta \leq \varepsilon/2 \\ |a' - 1| &= \left| bc \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right| \leq (1 + \delta)\rho\varepsilon\delta \leq \varepsilon/2 \\ |d' - 1| &= \left| bc \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right| \leq (1 + \delta)\rho\varepsilon\delta \leq \varepsilon/2 \\ |b'| &= \left| ab \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \right| \leq (1 + \varepsilon)(1 + \delta)\rho\delta < \rho \end{aligned}$$

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a' & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n b' \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n c' & d' \end{pmatrix}$$

Nous venons de voir que $|b'| < \rho$, donc il existe un entier $n_0 > 0$ tel que

$$\rho \leq \left| \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n_0} b' \right| \leq \rho(1 + \delta)$$

Nous avons au départ un difféomorphisme local g_0 de partie linéaire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ avec $|c| < \varepsilon$, $|d - 1| < \varepsilon$, $|a - 1| < \varepsilon$ et $\rho \leq |b| \leq \rho(1 + \delta)$. Après les deux opérations (commutateur puis conjugaison) nous obtenons une matrice $Dg_1(0) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ vérifiant les mêmes propriétés mais avec $\varepsilon/2$:

$$|c_1| < \frac{\varepsilon}{2}, |d_1 - 1| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_1 - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \rho \leq |b_1| \leq \rho(1 + \delta)$$

Ainsi en itérant ce processus (et quitte à prendre une sous-suite), on voit que les parties linéaires $Dg_i(0)$ convergent vers une matrice $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\rho \leq |\beta| \leq \rho(1 + \delta)$. Reste à vérifier que les parties non linéaires s'annulent à la limite, et que les domaines de définition des g_i ne s'évanouissent pas.

Troisième étape : contrôle des parties non linéaires

Soient h un difféomorphisme local de $(\mathbb{C}^2, 0)$, α et M deux réels positifs. Nous dirons que h vérifie la propriété $P(\alpha, M)$ si :

1. h et h^{-1} sont définis sur $B(0, \alpha)$;
2. Pour tout $z \in B(0, \alpha)$ on a :

$$\begin{aligned} \|h(z) - Dh(0)(z)\| &\leq M\|z\|^{3/2} \\ \|h^{-1}(z) - Dh^{-1}(0)(z)\| &\leq M\|z\|^{3/2} \end{aligned}$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^2$

$$\|Dh^{\pm 1}(0)(z)\| \leq 2\|z\|$$

Lemme 3.7 *Supposons que h vérifie $P(\alpha, M)$ avec $\alpha < 1$, $M < 1$, et que les domaines de définition de A et A^{-1} contiennent $B(0, \alpha)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{-n}(A^{-1}hAh^{-1})A^n$ vérifie $P(\alpha, M/2)$.*

Supposons tout d'abord le lemme démontré. Remarquons que d'après la formule de Taylor à l'ordre 2 tout $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ vérifie les points 1 et 2 de $P(\alpha, M)$ pour certains α assez petit et M assez grand. En fait comme on n'exige qu'un exposant $3/2$ on peut quitte à diminuer α prendre M aussi petit qu'on veut. En particulier on peut supposer que g_0 vérifie les hypothèses du lemme pour certain α et M (g_0 vérifie bien le point 3 de $P(\alpha, M)$ car on a choisi ε , δ et ρ suffisamment petits). En appliquant i fois le lemme on trouve que g_i vérifie $P(\alpha, 2^{-i}M)$. Ainsi la suite (g_i) converge uniformément sur $B(0, \alpha)$ vers une limite qui vérifie $P(\alpha, 0)$, i.e qui est linéaire.

Preuve du lemme : Il suffit de faire la preuve pour $n = 1$, en effet comme A est contractante une conjugaison par A agrandit le domaine de définition et diminue la partie non linéaire.

Tout d'abord on vérifie facilement que $A^{-1}(A^{-1}hAh^{-1})A$ et son inverse sont définis sur $B(0, \alpha)$, en utilisant les inégalités suivantes valables pour $z \in B(0, \alpha)$:

$$\|A(z)\| \leq |\lambda_2|\alpha$$

$$\begin{aligned}\|A^{-1}(z)\| &\leq \frac{1}{|\lambda_1|}\alpha \\ \|h^{\pm 1}(z)\| &\leq 3\alpha\end{aligned}$$

La troisième inégalité découle immédiatement des points 2 et 3 de $P(\alpha, M)$.

Remarquons au passage que si $z \in B(0, \alpha)$ alors la pseudo-orbite relativement à $\langle A, h \rangle$ de z dans $B(0, \alpha)$ contient $A^{-1}(A^{-1}hAh^{-1})A(z)$.

Passons au contrôle de la partie non linéaire. On écrit :

$$h^{-1}(z) = B(z) + \varphi(z)$$

$$A^{-1}hA(z) = C(z) + \psi(z)$$

où B et C sont les parties linéaires de h^{-1} et $A^{-1}hA$ respectivement. Comme A est contractante on a encore $\|\psi(z)\| \leq M\|z\|^{3/2}$ pour $z \in B(0, \alpha)$. On a

$$A^{-1}hAh^{-1} = \underbrace{C \circ B}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{C \circ \varphi + \psi(B + \varphi)}_{\text{partie non linéaire}}$$

et d'après le point 3 de $P(\alpha, M)$ pour h^{-1} :

$$\begin{aligned}\|C \circ \varphi(z) + \psi((B + \varphi)(z))\| &\leq \|C\| \cdot M \cdot \|z\|^{3/2} + M \cdot \|(B + \varphi)(z)\|^{3/2} \\ &\leq (\|C\| \cdot M + M(M + 2)^{3/2}) \|z\|^{3/2} \\ &\leq 8M \|z\|^{3/2}\end{aligned}$$

On obtient, en notant $k = A^{-1}(A^{-1}hAh^{-1})A$

$$\begin{aligned}\|k(z) - Dk(0)(z)\| &= \|A^{-1}(C \circ \varphi + \psi \circ (B + \varphi))A(z)\| \\ &\leq 8M \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} |\lambda_2|^{1/2} \|z\|^{3/2} \\ &\leq 8M(1 + \delta) r^{1/2} \|z\|^{3/2}\end{aligned}$$

Or

$$r < 1/500 \Rightarrow 8(1 + \delta)r^{1/2} < 1/2$$

ainsi nous obtenons le résultat attendu. La majoration pour l'inverse se montre de manière analogue. \square

Quatrième étape : conclusion

Le difféomorphisme local $f_0 = A$ étant fixé on peut effectuer le raisonnement ci-dessus en partant avec une matrice B_0 telle que le réel ρ associé soit arbitrairement petit. Remarquons en effet que dans la deuxième étape l'hypothèse $\delta < 1/4$ assure que l'entier n_0 choisi est supérieur à 2. Ainsi en remplaçant g_0 par $h_0 = A^{-1}(A^{-1}g_0A g_0^{-1})A$ on diminue ρ et d'après le lemme 3.7 h_0 vérifie $P(\alpha, M)$ en même temps que g_0 .

On obtient ainsi dans l'adhérence de $\langle A, g_0 \rangle$ des applications linéaires $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\beta|$ arbitrairement petit. Remarquons que cette matrice étant obtenue comme limite de difféomorphismes locaux, elle n'est pas définie sur \mathbb{C}^2 tout entier mais seulement sur $B(0, \alpha)$. Considérons maintenant une suite $\begin{pmatrix} 1 & \beta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de telles matrices avec $|\beta_i| \rightarrow 0$; quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $\arg(\beta_i)$ converge modulo 2π vers un angle θ_0 . Notons que si $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\langle A, g_0 \rangle}$ est définie sur $B(0, \alpha)$ alors il existe $R > 0$ tel que les difféomorphismes locaux linéaires $\begin{pmatrix} 1 & n\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \overline{\langle A, g_0 \rangle}$ obtenues par composition soient définies sur $B(0, \alpha/2)$ pour $|n\beta| < R$. Ainsi on obtient par passage à la limite toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & re^{i\theta_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $0 \leq r \leq R$. En conjuguant par A et en supposant $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ non réel, on obtient deux flots réels engendrant toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec β complexe quelconque dans un voisinage de l'origine. Nous avons ainsi un flot local complexe

$$\varphi_t : (x, y) \rightarrow (x + ty, y)$$

dans l'adhérence de $\langle f, g \rangle$ défini pour $(x, y) \in B(0, \alpha/2)$ et $|t| \leq R$.

Choisissons maintenant un difféomorphisme $h \in \langle f, g \rangle$ dont la partie linéaire n'admet pas l'axe des abscisses comme direction propre. Alors h envoie localement le feuilletage horizontal $dy = 0$ sur un feuilletage transverse, et il existe un polydisque $U = \{(x, y); -\varepsilon < x < \varepsilon, -\varepsilon < y < \varepsilon\}$ tel que chaque disque $\{y = \text{constante}\}$ soit envoyé sur un disque qui intersecte transversalement l'axe des x (fig. 3.2).

Alors pour $z \in U$, et quitte à prendre ε assez petit, l'ensemble des points

$$V = \{\varphi_t \circ h \circ \varphi_s(z); |s|, |t| < R\}$$

est un voisinage de l'origine (fig. 3.3). Ainsi pour tout $w \in V$ et pour tout $z \in U$, il existe $h_1, h_2 \in \langle f, g \rangle$ tels que $h_1 \circ h \circ h_2(z)$ soit bien défini et arbitrairement proche de w : c'est la propriété de densité locale des orbites (en toute rigueur il faut vérifier qu'on a densité

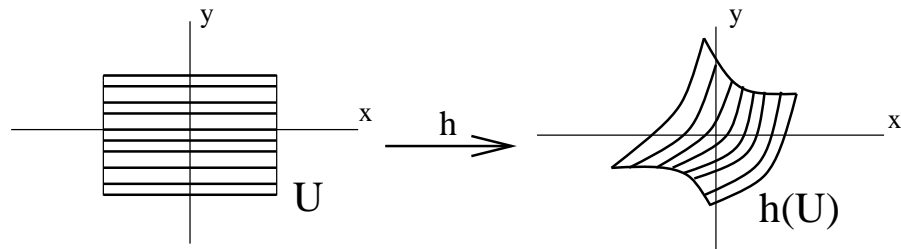


FIGURE 3.2 – Action de h sur le feuilletage horizontal.

locale au sens de la définition donnée en début de chapitre ; ceci se fait grâce à la remarque dans la preuve du lemme 3.7). \square

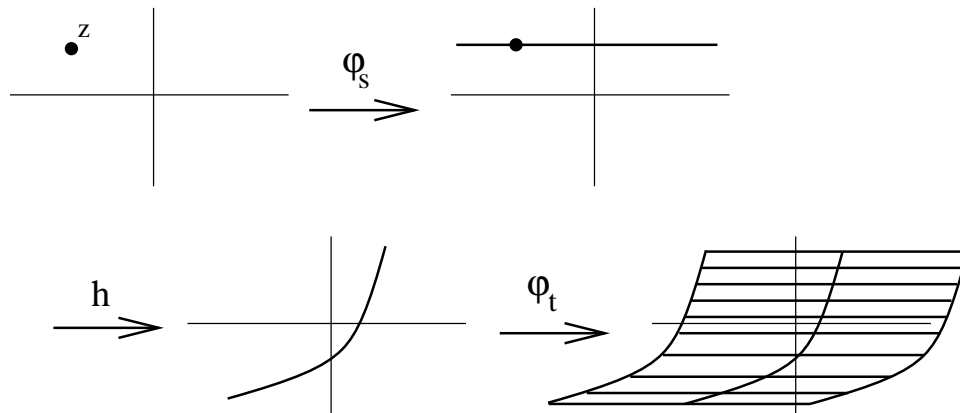


FIGURE 3.3 – $V = \{\varphi_t \circ h \circ \varphi_s(z); |s|, |t| < R\}$ est un voisinage de l'origine.

Remarque 3.8 1. L'hypothèse $r < 1/500$ est assez artificielle et n'a été nécessaire que dans la mesure où nous voulions que le lemme 3.7 soit vrai pour $n = 1$. Cependant l'entier n que nous utilisons effectivement et qui est le nombre de conjugaisons nécessaires pour ramener le coefficient supérieur droit de la matrice dans l'intervalle $[\rho, \rho(1 + \delta)]$ peut être très grand. En fait n sera d'autant plus grand que δ sera petit. En conclusion, on pourrait raffiner la preuve pour pouvoir choisir r près de 1, quitte à prendre δ très petit.

2. De nouveau les raisonnements effectués ci-dessus ne sont pas propres à la dimension 2. Si f et g sont des difféomorphismes locaux à l'origine de \mathbb{C}^n , on produira

dans l'adhérence de $\langle f, g \rangle$ des difféomorphismes conjugués à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\beta \in \mathbb{C}$ proche de l'origine, d'où à nouveau densité locale des orbites.

3.2 Non-densité globale des orbites

Dans cette section nous nous intéressons au comportement dynamique des sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, et en particulier à l'éventuelle existence d'orbites globalement denses. En contraste avec la section précédente nous nous proposons de montrer qu'une large classe de sous-groupes n'admet pas de telles orbites, et plus précisément :

Théorème 3.9 *Soit $G \subset \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ un groupe de type fini dont tous les éléments (sauf l'identité) sont de type Hénon. Alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ tel que*

1. *l'adhérence de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus U$ ne contient qu'un nombre fini de points de la droite à l'infini ;*
2. *pour tout $z \in U$, l'orbite de z par G est discrète.*

On notera que la remarque 2.14 assure que la condition « tous les éléments de G sont de type Hénon » n'est pas une condition très restrictive.

Dans cette section nous noterons $B^c(0, R)$ le complément de la boule de centre 0 et de rayon R .

Une première description de la dynamique des éléments de \mathcal{H} est donnée par le lemme suivant (cf. fig. 3.4) :

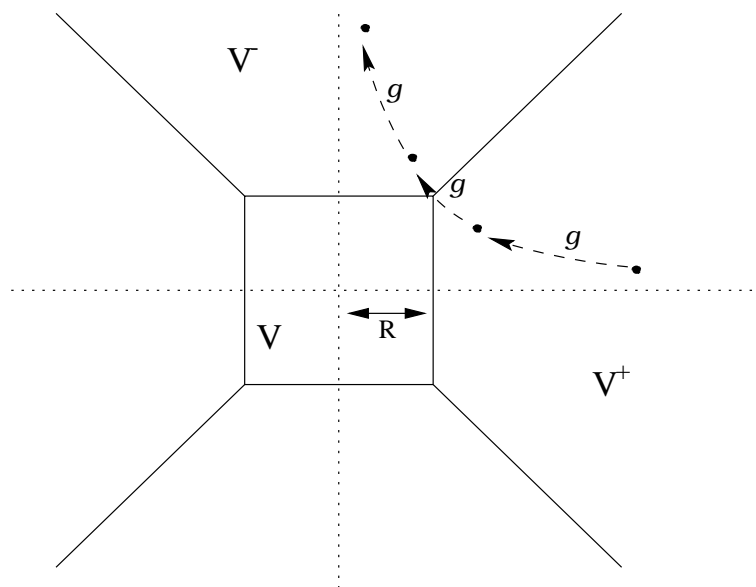
Lemme 3.10 (Friedland-Milnor) *Pour tout $g \in \mathcal{H}$ il existe une constante $R > 0$ telle que $|y| > R$ implique $|y'| > |y|$ ou $|x| > |y|$, où $(x', y') = g(x, y)$.*

Suivant [5] ceci permet de définir une partition de \mathbb{C}^2 en 3 sous-ensembles :

$$V^- = \{(x, y); |y| > R \text{ et } |y| > |x|\}$$

$$V^+ = \{(x, y); |x| > R \text{ et } |x| \geq |y|\}$$

$$V = \{(x, y); |y| \leq R \text{ et } |x| \leq R\}$$


 FIGURE 3.4 – Dynamique d'un élément de \mathcal{H}

Comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre 1, il existe deux points particuliers p^+ et p^- sur la droite à l'infini (correspondant aux axes $\{y = 0\}$ et $\{x = 0\}$). De plus, « l'orbite générique » est une orbite discrète issue de p^+ et s'accumulant sur p^- . Nous allons maintenant préciser ces notions et les généraliser au cas d'un automorphisme de type Hénon quelconque.

Proposition 3.11 Soit $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon. Il existe $p \in \mathbb{CP}_\infty^1$, tel que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe un ouvert $U = U(m) \subset \mathbb{C}^2$ vérifiant

1. $\overline{U^c} \cap \mathbb{CP}_\infty^1 = \{p\}$, où $\overline{U^c}$ est l'adhérence du complément de U dans \mathbb{CP}^2 .
2. $\forall z \in U, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|g^k(z)\| > m^k \|z\|$

On décompose la preuve en plusieurs lemmes. Le point $p \in \mathbb{CP}_\infty^1$ associé à g sera appelé *direction d'indétermination* de g . On définit $I(g)$ l'ensemble d'indétermination de g comme la réunion des directions d'indétermination de g et g^{-1} .

Lemme 3.12 Soit $g \in \mathcal{H}$. Alors g (resp. g^{-1}) vérifie la proposition avec $p = [1 : 0 : 0]$ (resp. $p = [0 : 1 : 0]$). De plus $g(U) \subset U$ (resp. $g^{-1}(U) \subset U$).

Preuve. On considère $g = (y, P(y) - \alpha x)$, le cas d'une composition

$$g = (y, P_n(y) - \alpha_n x) \circ \cdots \circ (y, P_1(y) - \alpha_1 x)$$

étant similaire. Pour $\lambda, t \in \mathbb{C}$ on a

$$g(\lambda t, t) = (t, P(t) - \alpha \lambda t)$$

Or $P(t) = \beta t^n + \ll \text{termes de degré inférieur à } n \gg$, donc il existe $R > 0$ tel que pour tout $|t| > R$ on ait

$$|P(t)| \geq \frac{|\beta|}{2} |t|^n$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |P(t) - \lambda \alpha t| &\geq |P(t)| - |\alpha \lambda t| \\ &\geq \frac{|\beta|}{2} |t|^n - |\alpha \lambda t| \end{aligned}$$

Ainsi il existe $R_\lambda > 0$ tel que pour $|t| > R_\lambda$ on ait

$$\|g(\lambda t, t)\| \geq m \|(\lambda t, t)\|$$

et on peut supposer que R_λ est une fonction continue croissante de $|\lambda|$, avec $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} R_\lambda = +\infty$. Posons

$$U = \{(\lambda t, t) \in \mathbb{C}^2; \lambda \in \mathbb{C}, |t| > R_\lambda\}$$

Le complémentaire de U n'adhère à la droite à l'infini qu'en $[1 : 0 : 0]$. Il est clair que $g(U) \subset U$, ainsi on obtient

$$\forall z \in U, \|g^k(z)\| > m^k \|z\|$$

La preuve pour $g^{-1} = (\frac{-1}{\alpha}y + \frac{P(x)}{\alpha}, x)$ est analogue en travaillant avec $g^{-1}(t, \lambda t)$. \square

Lemme 3.13 Soit $e = (x + P(y), y)$ avec $\deg(P) \geq 2$. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ vérifiant :

1. $\overline{U} \cap \mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^1 = \{[1 : 0 : 0]\}$.
2. $\forall z \in U, \|e^{\pm 1}(z)\| > \|z\|$, et donc $e^{\pm 1}(U) \cap U = \emptyset$.

Preuve. Elle découle du lemme précédent en écrivant $e^{\pm 1} = (y, x) \circ (y, x) \circ e^{\pm 1}$ et en remarquant que $(y, x) \circ e^{\pm 1} \in \mathcal{H}$. \square

Le lemme suivant n'est en fait qu'une remarque, mais il sera très utile dans la suite.

Lemme 3.14 Soit g de type Hénon. On suppose que g et g^{-1} vérifient la proposition avec comme directions d'indétermination respectives p^+ et p^- . On note U^+, U^- les ouverts de \mathbb{C}^2 donnés par la proposition pour $m = 2$, et $U = U^+ \cap U^-$. Alors

1. $\|g^k(z)\| > 2^{|k|}\|z\|$ pour tout $z \in U$ et tout $k \in \mathbb{Z}^*$;
2. $g^k(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$;
3. $g^k(U) \subset \mathbb{C}^2 \setminus U^-$ pour $k \in \mathbb{N}^*$;
4. $g^{-k}(U) \subset \mathbb{C}^2 \setminus U^+$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. Les points 1 et 2 sont immédiats. Pour le point 3 supposons que $w = g^k(z)$ avec $z \in U$, donc $\|w\| > \|z\|$. Mais alors on ne peut pas avoir $w \in U^-$ car sinon $\|g^{-k}(w)\| > 2^k\|w\|$ i.e $\|z\| > \|w\|$. Le point 4 est similaire. \square

Lemme 3.15 *Supposons la proposition vérifiée par g avec p comme direction d'indétermination, alors $g' = aga^{-1}$ où a est affine la vérifie également avec $p' := a(p)$ (en prolongeant a en un automorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$).*

Preuve. Soit U l'ouvert obtenu en appliquant la proposition à g . Comme a est affine il existe $\alpha, \beta, R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^2$ on ait

$$\|z\| > R \Rightarrow \alpha\|z\| < \|a(z)\| < \beta\|z\|$$

Maintenant soit $m' \in \mathbb{N}^*$ et soit $z \in U' := a(U \cap B^c(0, R)) \cap B^c(0, R)$, on a

$$\|ag^k a^{-1}(z)\| > \alpha\|g^k a^{-1}(z)\| > \alpha m^k \|a^{-1}(z)\| > \frac{\alpha}{\beta} m^k \|z\| > m'^k \|z\|$$

quitte à prendre m assez grand, d'où le résultat . \square

Lemme 3.16 *Soient $g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{-1}$, et $e = (x + P(y), y)$ avec $\deg(P) \geq 2$. Alors ege^{-1} vérifie la proposition avec $p = [1 : 0 : 0]$.*

Preuve. On peut supposer $g \in \mathcal{H}$, quitte à remplacer g par $e_1 g e_1^{-1}$ et e par $e e_1^{-1}$, pour $e_1 \in E$ convenable. Si $ege^{-1} \in \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{-1}$ on conclut grâce au lemme 3.12, sinon on remarque que ge^{-1} est encore un élément de \mathcal{H} . Dans ce cas on peut supposer que g et ge^{-1} vérifient la proposition avec le même ouvert U . De plus quitte à se placer sur l'intersection U' de U et de l'ouvert donné par le lemme 3.13 on a $\|e(z)\| > \|z\|$ pour tout $z \in U'$; et U' vérifie toujours la propriété

$$\overline{U'^c} \cap \mathbb{C}\mathbb{P}_\infty^1 = \{[1 : 0 : 0]\}$$

Finalemnt en utilisant les inclusions $g^k(U') \subset U'$ et $ge^{-1}(U') \subset U'$ données par le lemme 3.12 :

$$\forall z \in U', \|eg^k e^{-1}(z)\| > \|g^k e^{-1}(z)\| > m^{k-1} \|ge^{-1}(z)\| > m^k \|z\|$$

ce qui est le résultat attendu. \square

Lemme 3.17 Soient g de type Hénon, et $e = (x + P(y), y)$ avec $\deg(P) \geq 2$. Supposons que g et g^{-1} vérifient la proposition avec des directions d'indétermination différentes de $[1 : 0 : 0]$. Alors ege^{-1} vérifie la proposition avec $p = [1 : 0 : 0]$.

Preuve. Soit U l'ouvert associé à e par le lemme 3.13, et soient U^+ , U^- les ouverts associés à g et g^{-1} . Vu l'hypothèse sur les directions d'indétermination on peut supposer que $B^c(0, R) = U \cup U^+ = U \cup U^-$. Soit $z \in U$; on a $\|e^{-1}(z)\| > \|z\|$ et $e^{-1}(z) \notin U$, donc $e^{-1}(z) \in U^+$. Ainsi pour $k > 0$, on a $\|g^k e^{-1}(z)\| > m^k \|z\|$ et $g^k e^{-1}(z) \notin U^-$ (lemme 3.14); donc $g^k e^{-1}(z) \in U$ d'où $\|eg^k e^{-1}(z)\| > m^k \|z\|$. Finalement

$$\|(ege^{-1})^k(z)\| > m^k \|z\|$$

Le raisonnement avec $k < 0$ est analogue. \square

Preuve de la proposition 3.11. Tout automorphisme g de type Hénon peut s'écrire sous la forme

$$g = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$$

où $h \in \mathcal{H}$ et $\varphi = a_n \circ e_n \circ \dots \circ e_1 \circ a_0$, avec $e_i = (x + P_i(y), y)$, $a_i \in A \setminus E$ ($0 < i < n$), et $a_0, a_n \in A$. En fait si $n > 0$ on peut supposer $a_0 = Id, (y, x)$ ou $(y, x) \circ s$ avec $s \in A \cap E$ non diagonal. En effet, si $a_0 \in A \cap E$ on peut écrire $e_1 \circ a_0 = a'_0 \circ e'_1$ avec $e'_1 = (x + P'(y), y)$. Si $a_0 \in A \setminus E$, on écrit $a_0 = s_1 \circ (y, x) \circ s_2$ avec $s_1, s_2 \in A \cap E$ (cf. [FM]). Comme ci-dessus on peut absorber s_1 avec e_1 ; de plus si s_2 est diagonal alors $(y, x) \circ s_2 = s'_2 \circ (y, x)$ et on peut aussi absorber s'_2 .

Nous terminons maintenant la preuve de la proposition par récurrence. On peut voir la conjugaison par φ comme une suite de conjugaison alternativement par des automorphismes affines et élémentaires. Si $a_0 = Id$ ou (y, x) , alors $a_0 h a_0^{-1} \in \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{-1}$ et on peut appliquer le lemme 3.16; et si $a_0 = (y, x) \circ s$ avec $s \in A \cap E$ non diagonal alors on est dans les conditions du lemme 3.17. Dans les deux cas après conjugaison par le premier élémentaire e_1 on obtient un automorphisme avec pour ensemble d'indétermination le singleton $\{[1 : 0 : 0]\}$. Le lemme 3.15 dit alors qu'après conjugaison par l'automorphisme affine a_1 on obtient comme ensemble d'indétermination $\{a_1([1 : 0 : 0])\}$. Or $a_1([1 : 0 : 0]) \neq [1 : 0 : 0]$ si $a_1 \notin A \cap E$, ainsi on peut appliquer le lemme 3.17 pour la conjugaison élémentaire suivante, et ainsi de suite. \square

Nous pouvons maintenant nous attaquer à la preuve du théorème 3.9. Nous commençons par donner une preuve dans un cas particulier où le principe du « ping-pong » s'applique directement. La preuve dans le cas général n'est qu'un raffinement de ce cas particulier, elle sera cependant rédigée de manière indépendante.

Le cas des ensembles d'indétermination distincts

Nous allons ici prouver le théorème dans le cas où les ensembles d'indétermination $I(g_1), \dots, I(g_n)$ associés aux générateurs de G sont deux à deux distincts. A chaque g_i nous associons U_i l'ouvert obtenu en appliquant le lemme 3.14.

Quitte à considérer l'intersection des U_i avec $B^c(0, R)$ pour R assez grand, on peut supposer $U_i \cup U_j = B^c(0, R)$ pour tout $i \neq j$. En effet $(U_i \cup U_j)^c$ n'adhère pas à l'infini, vu l'hypothèse sur les directions d'indétermination. Soit $U = \cap_i U_i$ et soit $z \in U$. Appliquons à z un automorphisme de longueur l par rapport au système de générateurs (g_1, \dots, g_n) , i.e un automorphisme qui s'écrit

$$g = g_{i_p}^{l_p} \circ \dots \circ g_{i_1}^{l_1} \text{ avec } \sum_k l_k = l$$

Comme $z \in U_{i_1}$ on a $\|g_{i_1}^{l_1}(z)\| > 2^{l_1}R$, de plus $g_{i_1}^{l_1}(z) \notin U_{i_1}$ donc $g_{i_1}^{l_1}(z) \in U_{i_2}$. Ainsi par récurrence on obtient $\|g(z)\| > 2^l R$. Maintenant il existe un nombre fini d'automorphismes de longueur l , donc chaque boule de centre 0 et de rayon $2^l R$ ne contient qu'un nombre fini de points de l'orbite de z par G , i.e l'orbite de z par G est fermée. Plus précisément, l'orbite de z vient adhérer dans $\mathbb{C}P^2$ aux ensembles d'indétermination des g_i (cf. fig. 3.5). \square

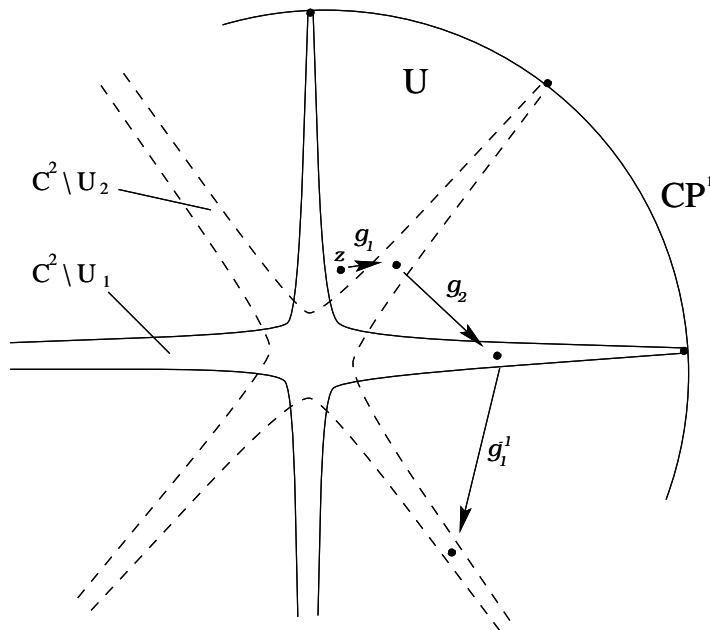


FIGURE 3.5 – Principe du ping-pong

Le cas général

L'hypothèse « G de type fini » ne nous sert en fait qu'à assurer la condition de finitude énoncée dans la proposition ci-dessous. Il serait donc possible d'énoncer un théorème légèrement plus général en supposant directement cette condition satisfaite par G .

Rappelons que $t(g)$ désigne la taille d'un automorphisme $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (cf. def. pp 18).

Proposition 3.18 *Soit G un groupe de type fini dont tous les éléments (sauf l'identité) sont de type Hénon. Alors il existe des familles finies (a_i) et (e_j) d'automorphismes respectivement affines (non élémentaires) et élémentaires (non affines) telles que tout élément $g \in G$ admette une décomposition de la forme*

$$g = a_{i_1} \circ e_{j_1} \circ \cdots \circ a_{i_n} \circ e_{j_n}$$

(éventuellement l'écriture commence par e_{j_1} et/ou finit par a_{i_n}).

Preuve. Il suffit de trouver un système de générateurs pour G (éventuellement redondant) (g_1, \dots, g_n) tel que

1. chaque g_i s'écrit $g_i = d_i \circ m_i \circ f_i$ avec $t(g_i) = t(d_i) + t(m_i) + t(f_i)$, $t(m_i) = 1$ ou $m_i = Id$ (les notations correspondent à début, milieu et fin);
2. tout $g \in G$ admet une décomposition

$$g = g_{i_n} \circ \cdots \circ g_{i_0}$$

avec $t(f_{i_j} \circ d_{i_{j-1}}) \geq |t(f_{i_j}) - t(d_{i_{j-1}})| + 1$, pour $j = 1, \dots, n$.

Cette deuxième condition assure que la décomposition de $f_{i_j} \circ d_{i_{j-1}}$ commence par un affine (ou un élémentaire) en même temps que f_{i_j} , et se termine par un affine (ou un élémentaire) en même temps que $d_{i_{j-1}}$. Ainsi il ne peut se produire de simplifications en cascade : on aura

$$g = d_{i_n} \circ m_{i_n} \circ (f_{i_n} \circ d_{i_{n-1}}) \circ \cdots \circ (f_{i_1} \circ d_{i_0}) \circ m_{i_0} \circ f_{i_0}$$

avec

$$t(g) = t(d_{i_n}) + t(m_{i_n}) + t(f_{i_n} \circ d_{i_{n-1}}) + \cdots + t(f_{i_1} \circ d_{i_0}) + t(m_{i_0}) + t(f_{i_0})$$

Pour obtenir les systèmes (a_i) et (e_j) souhaités, il suffira alors de prendre la réunion des m_i non triviaux ($t(m_i) = 1$ équivaut à $m_i \in A \setminus S$ ou $m_i \in E \setminus S$) et des automorphismes affines et élémentaires nécessaires pour écrire les décompositions des $f_{i_j} \circ d_{i_{j-1}}$ utilisés dans le point 2.

Partons d'un système (g_1, \dots, g_n) quelconque de générateurs, que l'on complète de manière à ce que si g_i est dans le système, alors g_i^{-1} l'est également. Supposons qu'il existe un couple d'indices (i, j) tel que

$$0 < t(g_i \circ g_j) < \max(t(g_i), t(g_j)) \quad (*)$$

Disons que g_i réalise ce maximum. Alors on remplace g_i par $g_i \circ g_j$ et par récurrence sur la somme $\Sigma t(g_i)$ on obtient après un nombre fini de tels remplacements un système de générateurs tel qu'aucun couple (i, j) ne vérifie plus la propriété $(*)$.

Considérons maintenant la parité de $t(g_i)$ pour chaque élément g_i du système obtenu. Si $t(g_i)$ est pair on écrit

$$g_i = d_i \circ f_i \text{ avec } t(d_i) = t(f_i) = t(g_i)/2$$

Si $t(g_i)$ est impair on écrit

$$g_i = d_i \circ m_i \circ f_i \text{ avec } t(d_i) = t(f_i) = (t(g_i) - 1)/2 \text{ et } t(m_i) = 1$$

Remarquons tout d'abord que si $t(g_i)$ est pair, alors il ne peut pas y avoir de g_j qui s'écrive $g_j = f_i^{-1} \circ h_j$ avec $t(g_i) = t(f_i^{-1}) + t(h_j)$, car alors $t(g_i \circ g_j) \leq t(g_j) - 1$ ce qui est impossible par la réduction précédente. Par contre dans le cas impair cette situation est possible, et dans ce cas g_j est également de taille impaire et admet une décomposition

$$g_j = f_i^{-1} \circ m_j \circ f_j \quad (\text{i.e } d_j = f_i^{-1})$$

avec $m_i, m_j \in A \setminus S$ ou $m_i, m_j \in E \setminus S$. Ajoutons donc au système de générateurs toutes les compositions de la forme

$$\begin{aligned} g_{i_n} \circ \dots \circ g_{i_1} &= (d_{i_n} \circ m_{i_n} \circ f_{i_n}) \circ (f_{i_n}^{-1} \circ \dots) \circ \dots \circ (\dots \circ f_{i_2}) \circ (f_{i_2}^{-1} \circ m_{i_1} \circ f_{i_1}) \\ &= d_{i_n} \circ (m_{i_n} \circ \dots \circ m_{i_1}) \circ f_{i_1} \end{aligned}$$

où les m_{i_j} sont ou bien tous dans $A \setminus S$, ou bien tous dans $E \setminus S$. Il n'y a qu'un nombre fini de telles compositions sinon on aurait dans G des automorphismes de la forme $d \circ m \circ d^{-1}$ avec $t(m) = 1$, qui ne sont pas de type Hénon. Par construction le nouveau système de générateurs satisfait les deux propriétés énoncées en début de preuve. \square

Soient (a_i) et (e_j) les familles finies d'automorphismes affines et élémentaires données par la proposition 3.18. On peut supposer quitte à le rajouter que la famille (a_i) contient la transposition (y, x) . On introduit (h_l) la famille des applications de la forme $a_i \circ e_j$. Remarquons que comme pour tout i, j on a $a_i \in A \setminus S$ et $e_j \in E \setminus S$ chaque h_l est de type Hénon et admet $[1 : 0 : 0]$ comme point d'indétermination. Pour chaque h_l il existe donc un ouvert U_l vérifiant :

1. U_i^c n'adhère en l'infini qu'en $[1 : 0 : 0]$;
2. $\forall z \in U_i, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|h_i^k(z)\| > 2^k \|z\|$

D'autre part il existe $\alpha_i, \beta_i, R > 0$ tels que

$$\forall i, \forall \|z\| > R, \alpha_i \|z\| < \|a_i(z)\| < \beta_i \|z\|$$

On pose $\gamma = \min_i(\alpha_i)$, $V = \cap_i U_i$ et $U = \cap_i a_i(V)$. Le complémentaire de U adhère en l'infini en un nombre fini de points, à savoir les $a_i([1 : 0 : 0])$.

Considérons maintenant un automorphisme $g \in G$ dont la décomposition dans le produit amalgamé s'écrit avec n élémentaires, et fixons $z \in U$.

1. Si l'écriture de g commence (à gauche) par un affine, on écrit

$$g = h_{l_n} \circ \cdots \circ h_{l_1} \circ a_{i_0}$$

où a_{i_0} est éventuellement l'identité, et on obtient

$$\|g(z)\| > 2^n \gamma \|z\|$$

2. Si l'écriture de g commence par un élémentaire e_j , on écrit

$$g = (y, x) \circ h_{l_n} \circ \cdots \circ h_{l_1} \circ a_{i_0}$$

où $h_{l_n} = (y, x) \circ e_j$ et on obtient encore l'inégalité $\|g(z)\| > 2^n \gamma \|z\|$.

Ainsi chaque boule de centre 0 et de rayon $2^n \gamma \|z\|$ ne contient qu'un nombre fini de point de l'orbite de z par G , ce qui termine la preuve du théorème. \square

Une remarque pour finir : les résultats en début de chapitre assurent qu'il existe des couples de matrices $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ tel que le groupe $\langle A, B \rangle$ soit dense dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$. On peut supposer par exemple que A et B ont leurs valeurs propres de module plus petit que 1, et que ce sont les parties linéaires de deux automorphismes f et g de type Hénon (fixant l'origine). Ainsi f et g admettent chacun un bassin d'attraction autour de 0 (domaine de Fatou-Bieberbach) et la densité des parties linéaires implique une densité locale autour de l'origine (th. 3.1). Cette densité se propage au moins sur chacun des deux bassins, cependant le théorème 3.9 affirme que cette densité reste asymptotiquement confinées le long des 4 directions d'indétermination associées à g, f, g^{-1}, f^{-1} .

En conclusion la densité globale pour un groupe $G \subset \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ ne peut provenir que de la présence d'automorphismes élémentaires dans le groupe. Par exemple si $g = f \circ l$ où l est un automorphisme linéaire bien choisi, on pourra obtenir des orbites globalement denses pour le groupe $\langle f, g \rangle$, mais bien sûr ce groupe ne vérifie pas les hypothèses du théorème 3.1 : il contient l'automorphisme l .

Chapitre 4

Familles paramétrées d'éléments de Aut

4.1 Motivations

Dans l'étude du groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^n]$ des automorphismes polynômiaux de \mathbb{C}^n , le cas $n = 2$ est très particulier. On dispose en effet du théorème de structure qui décrit $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ comme le produit amalgamé de deux de ses sous-groupes, à savoir les groupes affine et élémentaire. Nous noterons A_n le groupe affine en dimension n , et E_n le groupe des automorphismes élémentaires i.e qui sont de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\alpha_1 x_1 + f_1, \dots, \alpha_n x_n + f_n)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $f_i \in \mathbb{C}[x_{i+1}, \dots, x_n]$. Ainsi les groupes que nous notions jusque là A et E seront notés dans ce chapitre A_2 et E_2 ; on a donc $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A_2 *_{\cap} E_2$. Ce résultat ne semble pas pouvoir s'étendre en dimension supérieure. En effet d'une part il est facile de voir que $\langle A_3, E_3 \rangle$ n'est pas le produit amalgamé de A_3 et E_3 , par exemple dans [2] est explicitée la relation :

$$(x, z, y) \circ (x + y^2, y, z) \circ (x, z, y) \circ (x - z^2, y, z) = Id$$

D'autre part la question de savoir si $\text{Aut}[\mathbb{C}^3] = \langle A_3, E_3 \rangle$ est encore ouverte, cependant le sentiment général est que cette égalité est fautive et un bon candidat à être un contre-exemple est l'automorphisme suivant dû à Nagata :

$$N : (x, y, z) \rightarrow (x - 2y(y^2 + xz) - z(y^2 + xz)^2, y + z(y^2 + xz), z)$$

Cet automorphisme est construit à partir d'une dérivation localement nilpotente. Une dérivation D de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est dite localement nilpotente (voir par exemple [12]) si pour tout $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^n(f) = 0$. A une dérivation localement nilpotente on associe un automorphisme polynômial noté $\exp(D)$

$$\exp(D) : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_1), \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_n) \right)$$

Remarquons que si $f \in \text{Ker}(D)$ alors

1. $f.D$ est encore une dérivation localement nilpotente ;
2. $f \circ \exp(D) = f$.

Considérons maintenant la dérivation $D = -2y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y}$ définie sur $\mathbb{C}[x, y, z]$. C'est une dérivation localement nilpotente de noyau $\mathbb{C}[z, y^2 + xz]$. On a alors

$$N = \exp((y^2 + xz).D)$$

Nous noterons $Q = y^2 + xz$, ainsi $Q \circ N = Q$.

Dans [11] Drensky et Yu considèrent les automorphismes de type Nagata de la forme $\exp(\delta.D)$ où $\delta \in \mathbb{C}[z, Q] = \text{Ker}(D)$ et posent la question : est-ce que le groupe « orthogonal non linéaire » $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, i.e le groupe constitué des $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^3]$ tels que $Q \circ \varphi = Q$, est engendré par le groupe orthogonal linéaire et les automorphismes de type Nagata ?

Dans ce chapitre nous nous proposons de décrire le groupe $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ et de répondre (par la négative) à la question de [11] ; l'idée principale étant de voir un élément de $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ comme une famille à paramètre d'automorphismes de \mathbb{C}^2 . Dans la suite nous noterons (u, v) les coordonnées dans \mathbb{C}^2 , et (x, y, z) les coordonnées dans \mathbb{C}^3 .

4.2 Structure du groupe $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$

Le théorème de structure pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ énoncé dans l'introduction est en fait valable pour n'importe quel corps k (même si dans [26] les auteurs se restreignent au corps des complexes). On va travailler avec $k = \mathbb{C}$, et avec $k = \mathbb{C}(t)$ le corps des fractions rationnelles.

Un élément du groupe $\text{Aut}[k^n]$ peut être vu comme un élément du groupe $\text{Aut}(k[x_1, \dots, x_n])$ des k -automorphismes de l'algèbre $k[x_1, \dots, x_n]$. Ainsi on peut considérer un élément de $\text{Aut}[\mathbb{C}(t)^2]$ comme un automorphisme de \mathbb{C}^2 dont les coefficients dépendent rationnellement de t , ou bien comme un élément du groupe $\text{Aut}_t(\mathbb{C}(t)[u, v])$ des $\mathbb{C}(t)$ -automorphismes de l'algèbre $\mathbb{C}(t)[u, v]$. On dira qu'un élément de $\text{Aut}_t(\mathbb{C}(t)[x_1, \dots, x_n])$ est un automorphisme de \mathbb{C}^n à paramètre rationnel, de même les éléments du groupe $\text{Aut}_t(\mathbb{C}[t][x_1, \dots, x_n])$ seront appelés automorphismes à paramètre polynômial.

Exemples :

$f_1 = (u + tv^n, v)$ est un automorphisme à paramètre polynômial.

$f_2 = (u + \frac{1}{t}v^n, v)$ est un automorphisme à paramètre rationnel.

$f_3 = (tu, v)$ est également un automorphisme à paramètre rationnel d'inverse $(\frac{1}{t}u, v)$, mais contrairement aux deux exemples précédents son déterminant jacobien dépend de t . Dans la suite nous ne considérerons pas de tels automorphismes.

Si F est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$, on définit le groupe $F_{(t)}$ (resp. $F_{[t]}$) des automorphismes dans F à paramètre rationnel (resp. polynômial) comme le sous-groupe de $\text{Aut}_t(\mathbb{C}(t)[x_1, \dots, x_n])$ (resp. $\text{Aut}_t(\mathbb{C}[t][x_1, \dots, x_n])$) constitué des φ_t dont le déterminant jacobien ne dépend pas de t et vérifiant $\varphi_{t_0} \in F$ pour tout $t_0 \in \mathbb{C}$ (dans le cas rationnel on ne considère que les t_0 en dehors d'un nombre fini de pôles). On note H le sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constitué des automorphismes de déterminant jacobien ± 1 qui commutent avec $-Id$, et on pose $A_H = A_2 \cap H$, $E_H = E_2 \cap H$.

Proposition 4.1 *On a les décompositions en produit amalgamé :*

$$H = A_H *_{\cap} E_H \text{ et } H_{(t)} = A_{H,(t)} *_{\cap} E_{H,(t)}$$

Preuve. Tout d'abord d'après [29] (pp. 14) on a $A_H *_{\cap} E_H = \langle A_H, E_H \rangle$. Reste à voir que A_H et E_H engendrent bien H . Pour cela on reprend la récurrence de la preuve du théorème de structure pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (cf [26]). Soit $g = (g_1, g_2) \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, quitte à composer (à gauche) par un automorphisme de la forme $(u + \alpha v, v)$ on peut supposer $\deg(g_1) \neq \deg(g_2)$, et en composant éventuellement par (v, u) on se ramène à $\deg(g_1) > \deg(g_2)$. On montre alors que $\deg(g_1) = \deg(g_2) \times n$, et on compose par $(u + \beta v^n, v)$ pour baisser le degré. On remarque que si g commute avec $-Id$, i.e si g_1 et g_2 ont tous leurs monômes de degré impair, alors n est aussi impair. Ainsi par récurrence on écrit $g = m \circ s$ où $s \in A_2 \cap E_2$, $\det(\text{Jac}(m)) = \pm 1$ et m commute avec $-Id$, d'où le résultat. La preuve dans le cas à paramètre rationnel est similaire (en travaillant sur le corps $\mathbb{C}(t)$). \square

Remarque 4.2 En contraste avec la proposition 4.1, le groupe des automorphismes de \mathbb{C}^2 à paramètre polynômial n'est pas engendré par les sous-groupes affine et élémentaire à paramètre polynômial (le théorème de structure appliqué avec $k = \mathbb{C}(t)$ dit que c'est vrai pour les automorphismes à paramètre rationnel). Un contre-exemple est fourni par l'automorphisme de Nagata : ce fait est bien connu et s'exprime en disant que N n'est pas modéré dans $\mathbb{C}[z][x, y]$ (cf. [2] ou [27]). En effet en considérant la troisième coordonnée comme un paramètre, on obtient :

$$N_t : (u, v) \rightarrow (u - 2v(v^2 + tu) - t(v^2 + tu)^2, v + t(v^2 + tu))$$

qui admet la décomposition :

$$N_t = \left(u - \frac{v^2}{t}, v\right) \circ (u, v + t^2 u) \circ \left(u + \frac{v^2}{t}, v\right)$$

Encore faut-il vérifier que N_t n'admet pas une autre décomposition à coefficients polynômiaux (voir [27] et la fin de ce chapitre).

Nous introduisons maintenant un sous-groupe particulier de $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. Tout d'abord notons E_G le groupe formé des applications de la forme :

$$(x, y, z) \rightarrow (\alpha^2 x + 2\alpha y \delta(z) - z \delta^2(z), y - \frac{z}{\alpha} \delta(z), \frac{1}{\alpha^2} z)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\delta \in \mathbb{C}[z]$. Il est naturel de considérer ce groupe : en fait il n'est pas difficile de vérifier que $E_G = E_3 \cap \text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. Nous noterons $O(3, \mathbb{C})$ le groupe orthogonal linéaire associé à la forme Q , et G le groupe engendré par $O(3, \mathbb{C})$ et E_G . Ce groupe intervient de la manière suivante. Un élément de $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ induit un automorphisme sur chaque quadrique $V_\lambda = \{y^2 + xz = \lambda\}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), et les automorphismes de telles surfaces sont classifiées dans [18] et [25] :

Proposition 4.3 (Gizatullin-Danilov, Makar-Limanov) *Soit $\lambda \neq 0$. Le groupe G_λ des automorphismes de la surface V_λ s'obtient comme la restriction du groupe G à V_λ .*

La proposition dit en particulier que tout automorphisme de V_λ s'étend en un automorphisme de \mathbb{C}^3 qui préserve Q . On a exclu le cas $\lambda = 0$ car dans ce cas le groupe associé est un peu plus gros : le groupe G_0 des automorphismes du niveau V_0 est le groupe engendré par les restrictions des éléments de G à V_0 et par les transformations $(x, y, z) \rightarrow (\mu x, \mu y, \mu z)$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$. D'autre part G possède une structure plus précise :

Lemme 4.4 *On a une décomposition en produit amalgamé*

$$G = O(3, \mathbb{C}) *_{\cap} E_G$$

Preuve. Gizatullin et Danilov obtienne ce résultat groupé avec le résultat de la proposition 4.3. On peut cependant donner une preuve élémentaire en raisonnant par récurrence sur le degré d'une composition d'élément de $O(3, \mathbb{C})$ et de E_G . Nous laissons le détail de l'argument au lecteur (voir la preuve similaire dans [15] du fait que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A_2 *_{\cap} E_2$ sachant que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = \langle A_2, E_2 \rangle$). \square

Nous faisons maintenant le lien entre les groupes H et G . Nous utiliserons la paramétrisation suivante de la surface V_0 :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\xrightarrow{p} \mathbb{C}^3 \\ (u, v) &\rightarrow (u^2, uv, -v^2) \end{aligned}$$

et plus exactement le morphisme d'algèbre induit par p :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x, y, z] &\xrightarrow{p^*} \mathbb{C}[u, v] \\ x, y, z &\rightarrow u^2, uv, -v^2 \end{aligned}$$

Quand nous travaillerons sur le corps $\mathbb{C}(t)$ nous prolongeons simplement p^* en un morphisme de $\mathbb{C}(t)$ -algèbre en posant $p^*(t) = t$.

Proposition 4.5 *Il existe un morphisme $\sigma : H_{(t)} \rightarrow G_{(t)}$ surjectif et de noyau $\langle -Id \rangle$ tel que pour tout $f_t \in H_{(t)}$, $\sigma(f_t)$ fasse commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t)[x, y, z] & \xrightarrow{\sigma(f_t)} & \mathbb{C}(t)[x, y, z] \\ p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ \mathbb{C}(t)[u, v] & \xrightarrow{f_t} & \mathbb{C}(t)[u, v] \end{array}$$

Preuve. On définit σ sur $A_{H,(t)}$ et sur $E_{H,(t)}$ en posant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_{H,(t)} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & -b^2 \\ ac & ad+bc & -bd \\ -c^2 & -2cd & d^2 \end{pmatrix} \in O(3, \mathbb{C})_{(t)}$$

$$\left(\alpha u + v\delta(-v^2), \frac{\pm v}{\alpha} \right) \in E_{H,(t)} \rightarrow \left(\alpha^2 x \pm 2\alpha y\delta(z) - z\delta^2(z), y \mp \frac{z}{\alpha}\delta(z), \frac{z}{\alpha^2} \right) \in E_{G,(t)}$$

On vérifie que σ est ainsi bien défini (i.e les deux définitions coïncident sur $A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$) et fait commuter le diagramme ci-dessus. De plus σ induit des isomorphismes

$$A_{H,(t)} / \langle -Id \rangle \cong O(3, \mathbb{C})_{(t)} \text{ et } E_{H,(t)} / \langle -Id \rangle \cong E_{G,(t)}$$

Il n'est pas difficile de voir que le produit amalgamé donné par la proposition 4.1 passe au quotient :

$$H_{(t)} / \langle -Id \rangle = A_{H,(t)} / \langle -Id \rangle *_{\cap} E_{H,(t)} / \langle -Id \rangle$$

et donc σ induit bien comme annoncé un isomorphisme

$$H_{(t)} / \langle -Id \rangle \cong G_{(t)}$$

□

Le lemme suivant vient encore préciser la proposition 4.3 :

Lemme 4.6 *Soit $f = (f_1, f_2, f_3) \in G \setminus O(3, \mathbb{C})$, et soit h_i la composante homogène de plus haut degré de f_i .*

1. *Il existe un polynôme L homogène de degré 1 tel que pour chaque i , h_i soit une puissance de L (à une constante multiplicative près) ;*
2. *h_i n'est pas un multiple de $y^2 + xz$;*

3. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le morphisme de restriction $G \xrightarrow{q_\lambda} G_\lambda$ est un isomorphisme.

Preuve. Ecrivons $f = g \circ a$, où $a \in A$ et la décomposition de g dans le produit amalgamé $O(3, \mathbb{C}) *_{\cap} E_G$ se termine (à droite) par un élément de E_G . On montre facilement par récurrence que chacune des trois composantes homogènes de plus haut degré de g est une puissance de z . En composant par l'automorphisme a on obtient le point 1 (si $a = (a_1, a_2, a_3)$ alors $L = a_3$).

Le point 2 est un corollaire immédiat.

Pour le point 3, il suffit de remarquer que tout élément non trivial dans $\text{Ker}(q_\lambda)$ s'écrirait

$$(x, y, z) + (y^2 + xz - \lambda).(f_1, f_2, f_3)$$

en particulier ses composantes de plus haut degré seraient multiples de $y^2 + xz$. \square

Nous voudrions maintenant considérer σ comme un morphisme de $H_{[t]}$ dans $G_{[t]}$. Ceci n'est pas immédiat, en effet pour définir l'image d'un élément f_t de $H_{[t]}$ il faut commencer par décomposer f_t dans le produit amalgamé $A_{H,(t)} *_{\cap} E_{H,(t)}$

$$f_t = f_n \circ \dots \circ f_1$$

puis par définition $\sigma(f_t) = \sigma(f_1) \circ \dots \circ \sigma(f_n)$. Même si f_t est à coefficients polynômiaux en t nous avons vu que sa décomposition pouvait faire appel à des automorphismes à paramètre rationnel (remarque 4.2), ainsi il n'est pas clair a priori que $\sigma(f_t)$ soit à coefficients polynômiaux. De même il faut vérifier que tout élément de $G_{[t]}$ est l'image par σ d'un élément de $H_{[t]}$. Tout ceci est l'objet de la :

Proposition 4.7 *Le morphisme σ se restreint en un morphisme $H_{[t]} \rightarrow G_{[t]}$ surjectif et de noyau $\langle -Id \rangle$.*

Preuve. Soient $\varphi_t : (u, v) \rightarrow (f_t(u, v), g_t(u, v)) \in H_{[t]}$, et $(x_0, y_0, z_0) \in V_0$. Par construction, pour tout $t_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\sigma(\varphi_{t_0})(x_0, y_0, z_0) = (f_{t_0}(u_0, v_0)^2, f_{t_0}(u_0, v_0)g_{t_0}(u_0, v_0), -g_{t_0}(u_0, v_0)^2)$$

Ainsi $\sigma(\varphi_{t_0})$ définit un automorphisme de V_0 . Par le lemme 4.6 cet automorphisme se prolonge de manière unique en un élément de G : $\sigma(\varphi_{t_0})$ est donc bien défini sur tout \mathbb{C}^3 . Ceci étant valable pour tout $t_0 \in \mathbb{C}$, on en déduit que $\sigma(\varphi_t)$ a tous ses coefficients polynômiaux en t .

Montrons maintenant la surjectivité. Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in G_{[t]}$. On a

$$p^*(\psi_1)p^*(\psi_3) + p^*(\psi_2)^2 = p^*(\psi_1\psi_3 + \psi_2^2) = p^*(y^2 + xz) = 0$$

donc $-p^*(\Psi_1)p^*(\Psi_3)$ est un carré dans $\mathbb{C}[t][u, v]$. Or $\mathbb{C}[t][\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] = \mathbb{C}[t][x, y, z]$ donc en appliquant p^* on obtient $\mathbb{C}[t][p^*(\Psi_1), p^*(\Psi_2), p^*(\Psi_3)] = \mathbb{C}[t][u^2, uv, v^2]$. En particulier $p^*(\Psi_1)$ et $-p^*(\Psi_3)$ n'ont pas de facteur commun et sont donc des carrés :

$$p^*(\Psi_1) = f_t(u, v)^2, \quad -p^*(\Psi_3) = g_t(u, v)^2$$

Quitte à remplacer f_t par $-f_t$ on peut de plus supposer que

$$p^*(\Psi_2) = f_t(u, v)g_t(u, v)$$

Alors $\varphi : (u, v) \rightarrow (f_t(u, v), g_t(u, v))$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[t][u, v]$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(t)[x, y, z] & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}(t)[x, y, z] \\ p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ \mathbb{C}(t)[u, v] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}(t)[u, v] \end{array}$$

En fait il n'est pas difficile de voir que φ est un automorphisme : il suffit de faire le même raisonnement avec Ψ^{-1} pour produire un inverse de φ (car si $\Psi = Id$ les seuls endomorphismes qui font commuter le diagramme ci-dessus sont $\pm Id$). Ainsi φ est un élément de $H_{[t]}$ antécédent de Ψ par σ , d'où le résultat. \square

Nous venons d'établir un lien entre $H_{[t]}$ et $G_{[t]}$; nous allons maintenant montrer que $G_{[t]}$ et $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ sont isomorphes. Ainsi via ces deux morphismes un élément de $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ pourra être vu comme une famille à paramètre polyômial d'automorphismes de \mathbb{C}^2 .

Considérons le groupe $\text{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x, y, z])$ des automorphismes de la \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C}(Q)[x, y, z]$ qui préservent la forme Q . On a bien sûr

$$\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3] = \text{Aut}_Q(\mathbb{C}[x, y, z]) \subset \text{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x, y, z])$$

Proposition 4.8 *Il existe un isomorphisme*

$$G_{(t)} \xrightarrow{\tau} \text{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x, y, z])$$

qui induit un isomorphisme entre les groupes $G_{[t]}$ et $\text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

Preuve. On associe à chaque $f_t \in G_{(t)}$ un élément $\tau(f_t)$ dans $\text{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x, y, z])$ en substituant Q au paramètre t :

$$\tau(f_t) : (x, y, z) \longrightarrow f_Q(x, y, z)$$

L'application τ ainsi construite est clairement un morphisme de groupe. Nous allons maintenant construire une réciproque à τ . Considérons le morphisme de $\mathbb{C}(t)$ -algèbre

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(t)[x, y, z] &\xrightarrow{p_\lambda^*} \mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2] \\ x, y, z &\rightarrow u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2 \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme précédemment, p_λ^* provient d'une paramétrisation de la surface V_λ . Cependant p_λ^* garde un sens pour tout $\lambda \in \mathbb{C}(t)$, en particulier nous utiliserons p_t^* . De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{C}(t)$ on peut étendre p_λ^* en un morphisme

$$\mathbb{C}(Q)[x, y, z] \xrightarrow{p_\lambda^*} \mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2]$$

en posant simplement $p_\lambda^*(Q) = \lambda$. Pour tout $\lambda \in k$ ($k = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}(t)$), p_λ^* induit un isomorphisme

$$k[x, y, z]/(y^2 + xz - \lambda) \cong k[u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2]$$

Le groupe des automorphismes de l'algèbre $k[x, y, z]/(y^2 + xz - \lambda)$ s'identifie canoniquement pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ à G_λ et donc à G (lemme 4.6). Soit β tel que $\beta^4 = \lambda$. On vérifie que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & \cong & G_\lambda \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(\mathbb{C}[u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2]) \\ G \nearrow & & \downarrow s_1 \qquad \qquad \qquad \downarrow s_2 \\ & \cong & G_1 \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(\mathbb{C}[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]) \end{array}$$

L'application s_1 consiste simplement à considérer un élément de G_λ comme un élément de G_1 . Plus précisément, par le lemme 4.6 un élément $f \in G_\lambda$ détermine un unique élément de G (que l'on note encore f), et s_1 consiste simplement à restreindre f à V_1 . L'application s_2 est l'isomorphisme qui fait commuter le diagramme, i.e s_2 est l'application qui à

$$\varphi : u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2 \rightarrow \varphi_1(u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2), \varphi_2(u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2), \varphi_3(u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2)$$

associe

$$s_2(\varphi) : u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2 \rightarrow \varphi_1(u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2), \varphi_2(u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2), \varphi_3(u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2)$$

A priori φ n'admet pas une écriture unique, mais on peut déterminer les φ_i de manière canonique en imposant que l'application

$$x, y, z \rightarrow \varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z)$$

soit un élément de G . Ainsi s_2 est bien définie (la définition de s_2 donnée dans la note [23] est erronée ; je remercie M. Gizatullin qui m'a signalé cette erreur). On a bien sûr un diagramme correspondant pour le corps de base $\mathbb{C}(t)$. Ainsi le groupe G (resp. $G_{(t)}$) s'identifie avec les automorphismes de l'algèbre $\mathbb{C}[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$ (resp. $\mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$).

Maintenant soit $\varphi \in \text{Aut}_Q(\mathbb{C}(Q)[x, y, z])$. On associe à φ via p_i^* un automorphisme de $\mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{t}{v^2}, uv, -v^2]$. Comme précédemment on se ramène à l'algèbre associée à V_1 ¹ :

$$P(u, v) \in \mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{t}{v^2}, uv, -v^2] \longrightarrow \frac{1}{\alpha^2} P(\alpha u, \alpha v) \in \mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$$

où $\alpha^4 = t$. Ainsi à φ on associe un automorphisme de $\mathbb{C}(t)[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$, i.e un élément φ_t de $G_{(t)}$ par la discussion ci-dessus. On vérifie que ceci définit bien une réciproque à τ ; en fait pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}^*$ en dehors d'un nombre fini de pôles (et même pour $\lambda = 0$ par continuité), φ_λ est l'unique élément dans G qui coïncide avec φ sur V_λ . Enfin il est clair que si $\varphi \in \text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, alors φ_t est à coefficients polynômiaux. En effet par construction les pôles en t de φ_t proviennent des pôles en Q de φ . \square

Nous pouvons maintenant produire un contre-exemple à la question de Drensky et Yu. Ci-dessus nous avons construit deux morphismes :

$$H_{[t]} \xrightarrow{\sigma} G_{[t]} \xrightarrow{\tau} \text{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$$

On remarque que $O(3, \mathbb{C})$ est dans l'image de $A_{H, [t]}$ par $\tau \circ \sigma$, en fait $O(3, \mathbb{C})$ est exactement l'image de A_H . D'autre part les automorphismes de type Nagata $\exp(\delta(Q, z).D)$ proviennent des élémentaires de la forme $(u - v\delta(t, -v^2), v) \in E_{H, [t]}$.

Nous allons maintenant exhiber un élément de $H_{[t]}$ qui n'est pas dans le groupe engendré par $A_{H, [t]}$ et $E_{H, [t]}$, en appliquant le morphisme surjectif $\tau \circ \sigma$ nous obtenons ainsi un contre-exemple à la question de Drensky et Yu.

Reprenons l'exemple N_t de la remarque 4.2. On peut construire une famille indexée sur \mathbb{N}^* d'exemples similaires en posant

$$N_{i,t} = (u - \frac{v^i}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^i}{t}, v)$$

On a $N_t = N_{2,t}$. De plus pour i impair $N_{i,t}$ est dans $H_{[t]}$. Vérifions par exemple que $N_{3,t}$ est bien à coefficients polynômiaux

$$N_{3,t}(u, v) = (u - 3v^2(ut + v^3) - 3vt(ut + v^3)^2 - t^2(ut + v^3)^3, v + t(ut + v^3))$$

1. la ligne qui suit ne veut pas dire grand chose, c'est un résidu de l'erreur signalée juste au-dessus... Je conseille au lecteur intéressé de lire plutôt mon article paru au Boletín de La Sociedad Matemática Mexicana en 2003 (note ajoutée en juin 2003)

Si $N_{3,t}$ admet une autre décomposition elle est de la forme :

$$N_{3,t} : (u, v) \longrightarrow \left(u - \frac{v^3}{t}, v\right) \circ s \circ s^{-1} \circ (u, v + t^2 u) \circ s' \circ s'^{-1} \circ \left(u + \frac{v^3}{t}, v\right)$$

où $s, s' \in A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$. Si $s = (\alpha u + \beta v, \gamma v)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}(t)$ et $\alpha\gamma = \pm 1$, alors

$$\left(u - \frac{v^3}{t}, v\right) \circ s = \left(\alpha u + \beta v - \frac{\gamma^3 v^3}{t}, \gamma v\right)$$

qui est encore à coefficients non polynômiaux.

Bibliographie

- [1] Adjamagbo K. – Simple reasons why injective polynomial endomorphisms are automorphisms. *Comm. in Algebra*, vol. 25, 1997, pp. 623–630.
- [2] Alev J. – A note on Nagata’s automorphism. In : *Automorphisms of affine spaces (Curaçao)*, éd. par van den Essen A. pp. 215–221. – Kluwer Acad. Publish.
- [3] Bass H. et Meister G. – Polynomial flows in the plane. *Adv. in Math.*, vol. 55, 1985, pp. 173–208.
- [4] Beardon A. – Symetries of Julia sets. *Bull. London Math. Soc.*, vol. 22, 1990, pp. 576–582.
- [5] Bedford E. et Smillie J. – Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Inven. Math.*, vol. 103, 1991, pp. 69–99.
- [6] Bedford E. et Smillie J. – Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 VI : Connectivity of J . *Annals of Math.*, vol. 148, 1998, pp. 695–735.
- [7] Benedicks M. et Carleson L. – The dynamics of the Hénon map. *Annals of Math.*, vol. 133, 1991, pp. 73–169.
- [8] Cerveau D. – Densité des feuilles de certaines équations de Pfaff à 2 variables. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 33, 1983, pp. 185–194.
- [9] Cerveau D. – Sur la linéarisation de certains sous-groupes de difféomorphismes polynomiaux du plan et les domaines de Fatou-Bieberbach. *Prépublication IRMAR*, 1997.
- [10] Diller J. – Dynamics of birational maps of \mathbb{P}^2 . *Indiana Math. J.*, vol. 45, 1997, pp. 721–772.
- [11] Drensky V. et Yu J.-T. – Exponential automorphisms of polynomial algebras. *Com. in Algebra*, vol. 26, 1998, pp. 2977–2985.
- [12] Essen A. – Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms. *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 116, 1992, pp. 861–871.
- [13] Fornæss J. et Sibony N. – *Complex dynamics in higher dimensions.*, pp. 131–186. – Kluwer Acad. Publish., 1994.

- [14] Fornaess J. et Sibony N. – Oka’s inequality for currents and applications. *Math. Ann.*, vol. 301, 1995, pp. 399–419.
- [15] Friedland S. et Milnor J. – Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Erg. Th. and Dyn. Sys.*, vol. 9, 1989, pp. 67–99.
- [16] Ghys E. – Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l’identité. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, vol. 24, 1993, pp. 137–178.
- [17] Ghys E. et de la Harpe P. – Le bord d’un arbre. In : *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov.*, éd. par Ghys E. et de la Harpe P., pp. 103–116.
- [18] Gizatullin M. et Danilov V. – Automorphisms of affine surfaces II. *Isz. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 41, 1977, pp. 51–98.
- [19] Harpe P. – Free groups in linear groups. *Ens. Math.*, vol. 29, 1983, pp. 129–144.
- [20] Hénon M. – A two dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. in Math. Phys.*, vol. 50, 1976, pp. 69–77.
- [21] Hubbard J. et Oberste-Vorth R. – Hénon mappings in the complex domain I : the global topology of dynamical space. *Publ. Math. IHES*, vol. 79, 1994, pp. 5–46.
- [22] Kambayashi T. – Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space. *J. of Algebra*, vol. 60, 1979, pp. 439–451.
- [23] Lamy S. – Les automorphismes polynômiaux de \mathbb{C}^3 préservant une forme quadratique. *CRAS*, vol. 328, 1999, pp. 883–886.
- [24] Lubotzky A. – Lattices in rank one lie groups over local fields. *Geom. and Funct. Analysis*, vol. 1, 1991, pp. 405–431.
- [25] Makar-Limanov L. – On group of automorphisms of class of surfaces. *Israel J. Math.*, vol. 69, 1990, pp. 250–256.
- [26] McKay J. et Wang S. – An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables. *J. Pure and Appl. Algebra*, vol. 52, 1988, pp. 91–102.
- [27] Nagata M. – *On the automorphism group of $k[X, Y]$* . – Kinukuniya, 1972, *Kyoto univ. Lectures in Math.*, volume 5.
- [28] Rosay J.-P. et Rudin W. – Holomorphic maps from \mathbb{C}^n to \mathbb{C}^n . *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 310, 1988, pp. 47–86.
- [29] Serre J.-P. – *Arbres, Amalgames, SL_2* . – SMF, 1977, *Astérisque*, volume 46.
- [30] Sibony N. – Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k . *Préprint*, 1998.
- [31] Sidki S. – On a 2-generated infinite 3-group : the presentation problem. *J. of Algebra*, vol. 110, 1987, pp. 13–23.
- [32] Umemura H. – On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group I. *Nagoya Math. J.*, vol. 88, 1982, pp. 213–246.

- [33] Wright D. – Abelian subgroups of $\text{Aut}_k(k[x,y])$ and applications to actions on the affine plane. *Illin. J. Math.*, vol. 23, 1979, pp. 579–635.
- [34] Wright D. – Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes. *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 331, 1992, pp. 281–300.