Caractérisation des automorphismes modérés d'après Kuroda

Stéphane Lamy

Décembre 2010

1 Vocabulaire et avertissement

1.1 Le but

Le but de ces notes[1] est de comprendre la preuve de la non-modération de l'automorphisme de Nagata, d'après Kuroda [3]. L'article de Kuroda reprend la théorie de Shestakov-Umirbaev [4, 5], et est auto-contenu modulo deux résultats de preuves assez simples issus de [1]. Kuroda poursuit un double but : d'une part il veut refaire la preuve en la simplifiant (formalisme des formes différentielles au lieu des crochets de Poisson, introduction d'une fonction degré plus efficace...), d'autre part il veut mener la comparaison avec le point de vue de Shestakov-Umirbaev (non-existence des réductions de type IV en particulier).

Mon parti pris est de me limiter à essayer de rédiger une preuve aussi simple que possible, sans comparaison particulière avec le point de vue et le vocabulaire initial de Shestakov-Umirbaev. Je prends aussi parfois mes distances avec les notations ou le plan de Kuroda; un lexique en annexe devrait aider le lecteur souhaitant faire une lecture en parallèle de ces notes avec [3].

1.2 Notion de degré

Une jolie remarque de Kuroda est qu'il est judicieux de travailler avec la fonction degré à valeur dans $\mathbb{N}^3$ définie par

$$\deg x_1^i x_2^j x_3^k = (i, j, k).$$

Ce qui est crucial avec ce choix c'est il y a essentiellement équivalence entre degré et composante homogène de plus haut degré : en effet une composante homogène est toujours réduite à un seul monôme. Le problème est que pour mener la comparaison avec [5], Kuroda traite aussi le cas du degré ordinaire. Cela lui impose des complications de notation et de preuve, que j'évite.

[1] Ces notes sont une version révisée suite aux deux exposés que j'ai donné à Dijon les 25-26 novembre 2010, dans le cadre du groupe de travail «Automorphismes des Espaces Affines».

Kuroda choisit d'utiliser l'ordre lexicographique; il me paraît plus agréable d'utiliser l'ordre lexicographique *gradué*, à savoir l'ordre donné par le degré ordinaire où l'ordre lexicographique n'est utilisé que pour départager les ex-aequo. D'une part cela permet par exemple d'avoir $\deg x_1 < \deg x_2^{1000}$; d'autre part il semble plus reposant pour l'esprit de faire des raisonnements par récurrence pour un ordre où chaque élément n'a qu'un nombre fini de prédécesseurs...

Suivant Kuroda je note f^{w} le monôme dominant (de plus haut poids, w est pour *weight*) d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ (avec coefficient 1, ce qui n'est par contre plus la convention de Kuroda). Par exemple, si $f = 3x_1x_2 + x_3$ et $g = x_1 - x_1x_2$, j'écris $f^{\mathrm{w}} = g^{\mathrm{w}} = x_1x_2$, et $\deg f = \deg g = (1,1,0)$. En fait il serait possible de ne parler que de composante homogène, ou que de degré, mais il est psychologiquement agréable de disposer des deux notations multiplicative et additive.

Le degré d'un automorphisme $F = (f_1, f_2, f_3)$ est par définition la somme

$$\deg F = \deg f_1 + \deg f_2 + \deg f_3 \in \mathbb{N}^3.$$

Si $f_1, \cdots, f_r, g \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ (où typiquement $r = 1$ ou 2) et $\phi = \sum P_i(f_1, \cdots, f_r)y^i \in \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_r][y]$, je définis le **degré virtuel** de ϕ par rapport à g comme le maximum des $\deg P_i(f_1, \cdots, f_r)g^i$, et je le note $\deg^{\mathrm{virt}} \phi(g)$. Je diffère ici des notations de Kuroda. On note $\phi^{\mathrm{w},g}$ la somme des $P_i(f)y^i$ réalisant le maximum.

De manière analogue si $g, h \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ et $\phi = \sum c_{i,j}y^iz^j \in \mathbb{C}[y,z]$, on définit le degré virtuel $\deg^{\mathrm{virt}} \phi(g,h)$ comme le maximum des $\deg g^ih^j$.

On étend également de façon naturelle la notion de degré aux formes

$$\omega = \sum f_{i_1,\cdots,i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$$

en posant

$$\deg \omega = \max\{\deg f_{i_1,\cdots,i_l} x_{i_1} \cdots x_{i_l}\}.$$

Étant donnés $f, g \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ avec $\deg f > \deg g$, la quantité

$$\Delta(f,g) = \deg f - \deg g + \deg df \wedge dg,$$

bien que d'interprétation géométrique peu évidente, joue un rôle crucial à plusieurs endroits clé de la preuve.

1.3 Avertissements !

Premier avertissement : je ne compose pas dans le même sens que Kuroda ! Par exemple si $F = (f_1, f_2, f_3)$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$, et si $E = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2, x_3)$, pour moi l'automorphisme $(f_1 + P(f_2, f_3), f_2, f_3)$ est la composition $E \circ F$. Pour Kuroda c'est $F \circ E$, parce-qu'il travaille avec $\mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ qui est anti-isomorphe à $\mathsf{Aut}[\mathbb{C}^3]$. Si ça vous embrouille, lisez Kuroda directement.

Deuxième avertissement : je me restreins au groupe des automorphismes de $\mathbb{C}^3$ *fixant l'origine*. Cela ne perd pas en généralité, et cela m'évite de trainer des constantes à deux ou trois endroits dans les preuves.

Troisième avertissement : concernant les polynômes dans $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$, je ne travaille qu'avec le degré à valeur dans $\mathbb{N}^3$ défini plus haut, *jamais* avec le degré ordinaire.

1.4 Réductions

Un automorphisme **élémentaire** est un automorphisme de la forme

$$E = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2, x_3),$$

à conjugaison par une permutation des variables près. Suivant l'avertissement ci-dessus, je suppose toujours P sans terme constant. L'ensemble (et non le groupe !) des automorphismes élémentaires est noté $\mathcal{E}$; il est égal à l'union des trois groupes évidents $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.

On dit que $(F, E\circ F)$ est une **réduction élémentaire** (que j'abrège en réduction $\mathcal{E}$, et je précise éventuellement réduction $\mathcal{E}_i$, si $E \in \mathcal{E}_i$), si $\deg(E\circ F) < \deg F$. Je dis qu'une réduction $\mathcal{E}_i$ est **optimale**, si $E\circ F$ n'admet pas lui-même une autre réduction $\mathcal{E}_i$.

Il y a également chez Kuroda des notions de « weak Shestakov-Umirbaev reduction » (la notion dont Kuroda a besoin) et de « Shestakov-Umirbaev reduction » (la notion qui provient des Kazakhs). J'utiliserai essentiellement la première, que j'appelle une **réduction de Kuroda**, et que je noterai réduction **K** (pour « Kuroda », mais je ne vous empêche pas de penser « Kazakh »). La définition précise viendra plus loin, pour l'instant il suffit de savoir qu'il s'agit d'une composition $(E_3 \circ E_2 \circ E_1 \circ F)$, où les deux premiers élémentaires font monter le degré mais où le troisième le fait chuter de nouveau de façon à avoir

$$\deg(E_3 \circ E_2 \circ E_1 \circ F) < \deg F.$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des automorphismes (modérés fixant l'origine) admettant un dévissage par réductions ($\mathcal{E}$ ou **K**) successives, jusqu'à obtenir un automorphisme linéaire. Noter qu'un automorphisme F de degré $\deg F = (i,j,k)$ est linéaire si et seulement si $i+j+k=3$.

1.5 Théorème principal et organisation des notes

Le résultat principal de Kuroda [3] est le

Théorème 1. *L'ensemble $\mathcal{A}$ coïncide avec le groupe des automorphismes modérés (fixant l'origine).*

Si $F \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{E}$, la question est de savoir si $E\circ F$ est encore dans $\mathcal{A}$. C'est clair si $\deg E\circ F > \deg F$, on est donc ramené à prouver la

Proposition 2. *Si $\deg E\circ F \leq \deg F$ pour $F \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{E}$, alors $E\circ F \in \mathcal{A}$.*

Il y a quatre fils de raisonnement qui mènent à la preuve de cette proposition.

Tout d'abord, on va raisonner par récurrence sur le degré de F. La section 2 explicite cette hypothèse de récurrence et en tire les premières conséquences.

Puis il y a deux résultats issus de [1], que je nomme le Super Parachute et le Principe des Deux Maximums. On trouvera énoncés, preuves et conséquences dans la section 3.

Viennent ensuite dans la section 4 la définition des conditions **K**, leur conséquences, et la définition d'une réduction **K** normalisée.

Enfin la section 5 voit la mise en place du Toboggan : il s'agit de conditions d'allure innocente qui mènent après une (très) longue glissade à l'existence d'une réduction élémentaire.

Tous ces préparatifs étant faits, on peut dérouler la preuve dans la section 6. La preuve de la non-modération de l'automorphisme Nagata n'est plus alors qu'une remarque triviale, la cerise sur le gâteau (voir §7).

2 L'Hypothèse de Récurrence

Ici on déduit une suite de remarques plus ou moins directes de l'hypothèse de récurrence :

(HR) Si $H \in \mathcal{A}$ satisfait $\deg H < \mu$, alors pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a $E \circ H \in \mathcal{A}$.

Pour amorcer la récurrence on remarque que l'affirmation est claire pour H linéaire, autrement dit pour H avec $\deg H = (i, j, k)$, $i + j + k = 3$.

Une définition importante : étant donné $F \in \mathcal{A}$, on définit $I_F \subset \{1,2,3\}$ comme l'ensemble des indices i tels que F admette une réduction $\mathcal{E}_i$ dans $\mathcal{A}$.

D'autre part, si H est un automorphisme triangulaire, on lui associe deux automorphismes élémentaires $E_i \in \mathcal{E}_i, E_j \in \mathcal{E}_j$ sur le modèle suivant : si $H = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2 + Q(x_3), x_3)$, on pose $E_1 = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2, x_3)$ et $E_2 = (x_1, x_2 + Q(x_3), x_3)$.

Lemme 3. *Soit $F \in \mathcal{A}$ de degré μ, et supposons* (**HR**).

(i) *Si $E \in \mathcal{E}_i$ pour $i \in I_F$, alors $E \circ F \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Si $E_i \in \mathcal{E}_i$ pour $i \in I_F$ avec $\deg E_i \circ F < \deg F$, et $E, E', E'' \in \mathcal{E}$ avec $E' \circ E = E'' \circ E_i$, alors $E \circ F \in \mathcal{A}$.*

(iii) *Soient H un automorphisme triangulaire, et $E_i \in \mathcal{E}_i$, $E_j \in \mathcal{E}_j$ les deux automorphismes triangulaires qui lui sont associés.*

Si $\deg E_i \circ F < \deg F$ avec $i \in I_F$, alors $E_j \circ F \in \mathcal{A}$.

(iv) *S'il existe $i \neq j$ avec $I_F \smallsetminus \{i\} \neq \emptyset$ et $f_j^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$, alors $j \in I_F$.*

Preuve. (i) Quitte à conjuguer, on peut supposer $i = 1$. Si

$$G = E' \circ F = (f_1 + \phi(f_2, f_3), f_2, f_3) \in \mathcal{A}$$

est une réduction $\mathcal{E}_1$, et $E = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2, x_3)$, alors

$$E \circ F = E \circ E'^{-1} \circ E' \circ F = E \circ E'^{-1} \circ G \in \mathcal{A}$$

en appliquant hypothèse de récurrence (**HR**) à G.

(ii) On peut supposer $E \in \mathcal{E}_j$ avec $j \neq i$, sinon on est dans le cas facile (i). Quitte à conjuguer on peut alors supposer $i = 1,\ j = 2$. L'égalité $E' \circ E = E'' \circ E_1$ implique $E' \in \mathcal{E}_1$ et $E'' \in \mathcal{E}_2$, l'égalité se lit explicitement

$$(x_1 + Q(x_2,x_3), x_2, x_3) \circ (x_1, x_2 + P(x_1,x_3), x_3) = \\ (x_1, x_2 + R(x_1,x_3), x_3) \circ (x_1 + S(x_2,x_3), x_2, x_3)$$

on a donc

$$E'' \circ E_1 = (x_1 + S(x_2,x_3), x_2 + P(x_1,x_3), x_3).$$

D'une part $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$ par (i), d'autre part $\deg E_1 \circ F < \deg F$, l'hypothèse de récurrence (**HR**) implique donc $E'' \circ E_1 \circ F \in \mathcal{A}$.

On peut supposer $\deg E \circ F \leq \deg F$, sinon il n'y a rien à montrer; autrement dit $\deg(f_2 + P(f_1, f_3)) \leq \deg f_2$. Comme par hypothèse $\deg(f_1 + S(f_2, f_3)) < \deg f_1$, on voit ainsi que $\deg E'' \circ E_1 \circ F < \deg F$, et à nouveau l'hypothèse (**HR**) implique $(E')^{-1} \circ E'' \circ E_1 \circ F \in \mathcal{A}$.

Or $(E')^{-1} \circ E'' \circ E_1 \circ F = E \circ F$.

(iii) En conjuguant on se ramène à $H = (x_1 + P(x_2,x_3), x_2 + Q(x_3), x_3)$. On peut alors écrire

$$H = (x_1, x_2 + Q(x_3), x_3) \circ (x_1 + P(x_2,x_3), x_2, x_3) = \\ (x_1 + P(x_2 - Q(x_3), x_3), x_2, x_3) \circ (x_1, x_2 + Q(x_3), x_3)$$

ou autrement dit $E_2 \circ E_1 = E' \circ E_2$. On applique alors (ii), avec $i = 1$ ou 2.

(iv) On peut supposer $i = 1,\ j = 2$, et $f_2^{\mathrm{w}} = (f_1^{\mathrm{w}})^r$. Si $3 \in I_F$, il suffit de considérer un automorphisme triangulaire $H = (x_1,\ x_2 - c x_1^r,\ x_3 + \phi_3(x_1, x_2))$ et d'appliquer (iii). $\square$

3 Le Super Parachute et le Principe des Deux Maximums

Je rassemble ici deux énoncés qui proviennent de [1]. Le Super Parachute est le plus important; on en donne aussi des conséquences directes.

Etant donnés $\phi \in \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_r][y]$ et $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ on définit le nombre $m^g(\phi) \geq 0$ comme le plus petit entier i tel que

$$\deg(\partial_y^{(i)} \phi)(g) = \deg^{\mathrm{virt}}(\partial_y^{(i)} \phi)(g).$$

3.1 Le Super Parachute

Lemme 4. *Le monôme g^{w} est une racine multiple de $\phi^{\mathrm{w},g}$ d'ordre $m^g(\phi)$.*

Preuve. On a $(\partial_y^{(i)}\phi)^{\mathrm{w},g}(g^{\mathrm{w}}) = 0$ pour tout $0 \leq i < m^g(\phi)$.

Or $(\partial_y^{(i)}\phi)^{\mathrm{w},g} = (\partial_y^{(i)}\phi^{\mathrm{w},g})$, d'où le résultat. □

Super Parachute 5 ([1, Théorème 2.1])**.** *Soient $f_1,\cdots,f_r \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ algébriquement indépendants, ce qui revient à dire que $\omega := df_1 \wedge \cdots \wedge df_r \neq 0$. Soient $\phi \neq 0 \in \mathbb{C}[f_1,\cdots,f_r][y]$ et $g \neq 0 \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$. Alors*

$$\deg\phi(g) \geq \deg^{\mathrm{virt}}\phi(g) - m^g(\phi)(\deg\omega + \deg g - \deg\omega\wedge dg).$$

Preuve. D'abord quelques banalités sur le degré des formes (ν,ν' sont des formes, f un polynôme non constant) :

$$\begin{aligned}
\deg\nu\wedge\nu' &\leq \deg\nu + \deg\nu' \\
\deg f &= \deg df \\
\deg f\nu &= \deg f + \deg\nu \\
\deg^{\mathrm{virt}}(\partial_y\phi)(g) &= \deg^{\mathrm{virt}}\phi(g) - \deg g
\end{aligned}$$

Comme $\omega = df_1 \wedge\cdots\wedge df_r$, on a $\omega\wedge df_i = 0$ pour tout $i = 1,\cdots,r$, d'où la remarque :

$$\omega\wedge d(\phi(g)) = (\partial_y\phi)(g)\omega\wedge dg$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\deg\omega + \deg\phi(g) &= \deg\omega + \deg d(\phi(g)) \geq \deg\omega\wedge d(\phi(g)) \\
&= \deg((\partial_y\phi)(g)\omega\wedge dg) = \deg(\partial_y\phi)(g) + \deg\omega\wedge dg
\end{aligned}$$

et donc

$$-\deg\omega\wedge dg + \deg\omega + \deg\phi(g) \geq \deg(\partial_y\phi)(g). \tag{1}$$

On prouve le Super Parachute par récurrence sur $m^g(\phi)$.

Si $m^g(\phi) = 0$, ou autrement dit si $\deg\phi(g) = \deg^{\mathrm{virt}}\phi(g)$, il n'y a rien à montrer.

Si $m^g(\phi) \geq 1$, on a $m^g(\partial_y\phi) = m^g(\phi) - 1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
\deg(\partial_y\phi)(g) &\geq \deg^{\mathrm{virt}}(\partial_y\phi)(g) - (m^g(\phi)-1)(\deg\omega + \deg g - \deg\omega\wedge dg) \\
&= \deg^{\mathrm{virt}}\phi(g) - \deg g - (m^g(\phi)-1)(\deg\omega + \deg g - \deg\omega\wedge dg) \\
&= \deg^{\mathrm{virt}}\phi(g) - m^g(\phi)(\deg\omega + \deg g - \deg\omega\wedge dg) - \deg\omega\wedge dg + \deg\omega
\end{aligned}$$

En rassemblant avec (1), et en éliminant les $-\deg\omega\wedge dg + \deg\omega$, on obtient le Super Parachute attendu. □

3.2 Conséquences

Le cas intéressant est quand on a une inégalité stricte $\deg \phi(f,g) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g)$. Le petit lemme suivant sert sans arrêt. Il semble que ce soit l'absence d'un tel lemme qui empêche toute généralisation de la stratégie en dimension 4 ou plus.

Lemme 6. *Soient $f,g \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ algébriquement indépendants, et $\phi(f,g)$ tel que $\deg \phi(f,g) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g)$.*

Alors il existe $p,q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tels que $p \deg g = q \deg f$.

Preuve. On a $\phi(f,g) = \sum c_{i,j} f^i g^j$. Comme $\deg \phi(f,g) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g)$, il existe (i,j) et (i',j') tels que

$$\deg f^i g^j = \deg f^{i'} g^{j'} = \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g).$$

On peut de plus supposer que i est maximal pour cette propriété, et i' est minimal. On a donc

$$(f^{\mathrm{w}})^i (g^{\mathrm{w}})^j = (f^{\mathrm{w}})^{i'} (g^{\mathrm{w}})^{j'} \Rightarrow (f^{\mathrm{w}})^{i-i'} = (g^{\mathrm{w}})^{j'-j}.$$

En divisant les exposants par leur PGCD on obtient $(g^{\mathrm{w}})^p = (f^{\mathrm{w}})^q$ avec $p,q \in \mathbb{N}$ et $p \wedge q = 1$, d'où le résultat. $\square$

Voici maintenant divers corollaires du Super Parachute.

Corollaire 7. *Soient $f,g \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ algébriquement indépendants, et $\phi(f,g)$ tel que $\deg \phi(f,g) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g)$.*

On écrit $p \deg g = q \deg f$ où $p,q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$. Alors :

(i) $\deg \phi(f,g) \geq q \deg f + \deg df \wedge dg - \deg f - \deg g$;

(ii) Si $h \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ et f,g,h algébriquement indépendants, avec $\deg(h + \phi(f,g)) < \deg h$*, alors*

$$\deg(h + \phi(f,g)) > q \deg f - \deg df \wedge dh - \deg g;$$

(iii) Si $f^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g^{\mathrm{w}}]$, $g^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f^{\mathrm{w}}]$, alors $\deg \phi(f,g) > \deg df \wedge dg$;

(iv) Si $\deg f < \deg g$, $\deg \phi(f,g) \leq \deg g$*, et $g^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f^{\mathrm{w}}]$, alors $p = 2$, $q \geq 3$ est impair; il existe donc δ entier tel que* $\deg f = 2\delta$, $\deg g = q\delta$*. De plus*

$$\deg \phi(f,g) \geq (q-2)\delta + \deg df \wedge dg = \Delta(g,f).$$

En particulier si $\deg f \geq \deg \phi(f,g)$*, alors $q = 3$.*

(v) Sous les mêmes hypothèses que le point précédent, on a

$$\deg d\phi \wedge df \geq q\delta + \deg df \wedge dg.$$

Preuve. (i) Reprenons les notations de la preuve du lemme 6. On a $i = i' + qm$ pour un certain $m > 0$. Le monôme g^{w} ne peut pas être une racine d'ordre plus grand que m de $\phi^{\mathrm{w},g}$; on déduit donc du lemme 4 que $m \geq m^g(\phi)$.

On a d'une part

$$\deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g) = \deg f^i g^j \geq i \deg f \geq qm \deg f \geq qm^g(\phi) \deg f; \tag{2}$$

et d'autre part le Super Parachute 5 appliqué[2] à $\phi(f,y) \in \mathbb{C}[f][y]$ donne

$$\deg \phi(f,g) \geq \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g) - m^g(\phi)(\deg f + \deg g - \deg df \wedge dg).$$

Finalement en divisant par $m^g(\phi) \geq 1$, on obtient bien

$$\deg \phi(f,g) \geq q \deg f + \deg df \wedge dg - \deg f - \deg g.$$

(ii) Le Super Parachute 5 appliqué à $\psi = h + \phi(f,y) \in \mathbb{C}[f,h][y]$ donne

$$\deg h + \phi(f,g) \geq \deg^{\mathrm{virt}} \psi(g) - m^g(\psi)(\deg df \wedge dh + \deg g - \deg df \wedge dg \wedge dh). \tag{3}$$

Par hypothèse $\deg h + \phi(f,g) < \deg h$ d'où $\deg h = \deg \phi(f,g) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g)$. Ainsi non seulement $\deg^{\mathrm{virt}} \psi(g) = \deg^{\mathrm{virt}} \phi(g)$, mais aussi $\psi^{\mathrm{w},g} = \phi^{\mathrm{w},g}$ et donc $m^g(\psi) = m^g(\phi) \geq 1$.

Pour obtenir (ii), au vue de (3) il suffit donc de montrer $\deg^{\mathrm{virt}} \psi(g) \geq qm^g(\psi) \deg f$ puis de diviser par $m^g(\psi)$. Or par ce qui précède l'inégalité souhaitée est exactement (2).

(iii) Comme $p \deg g = q \deg f$ avec $p \wedge q = 1$, on en déduit qu'il existe un degré δ tel que $\deg f = p\delta$ et $\deg g = q\delta$. L'inégalité (i) donne

$$\begin{aligned}\deg \phi(f,g) \geq q \deg f - \deg f - \deg g + \deg df \wedge dg = \\ (pq - p - q)\delta + \deg df \wedge dg.\end{aligned} \tag{4}$$

Les hypothèses $f^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g^{\mathrm{w}}]$, $g^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f^{\mathrm{w}}]$ impliquent $2 \leq p < q$ ou $2 \leq q < p$. On a donc $pq - p - q > 0$, et finalement

$$\deg \phi(f,g) > \deg df \wedge dg.$$

(iv) Les hypothèses impliquent $2 \leq p < q$. Comme $q\delta = \deg g \geq \deg \phi(f,g)$, on déduit de (4) que $q > pq - p - q$. Ceci n'est possible que si $p = 2$, et donc $q \geq 3$ est impair. En remplaçant p par 2 dans (4), on obtient l'inégalité.

Si $\deg f \geq \deg \phi(f,g)$, alors l'inégalité donne $2\delta > (q-2)\delta$, d'où $q = 3$.

[2] A noter que $\phi(f,g)$ peut être vu comme provenant d'un élément de $\mathbb{C}[f][y]$ ou de $\mathbb{C}[y,z]$, et les deux notions de degré virtuel correspondantes coïncident : $\deg^{\mathrm{virt}} \phi(f,g) = \deg^{\mathrm{virt}} \phi(g)$.

(v) Comme précedemment on note $\phi(f,g)=\sum c_{i,j} f^i g^j$. On a $d\phi(f,g)=\partial_1\phi(g)df+\partial_2\phi(g)dg$ où $\partial_1\phi, \partial_2\phi \in \mathbb{C}[f][y]$ sont égaux à

$$\begin{aligned}\partial_1\phi(y) &= \sum c_{i,j} i f^{i-1} y^j;\\ \partial_2\phi(y) &= \sum c_{i,j} j f^i y^{j-1}.\end{aligned}$$

En particulier $d\phi \wedge df = \partial_2\phi(g) dg \wedge df$, et

$$\deg d\phi \wedge df = \deg \partial_2\phi(g) + \deg df \wedge dg.$$

Il s'agit donc de montrer $\deg \partial_2\phi(g) \geq q\delta$. Rappelons que par (1), $\deg^{\text{virt}} \phi(g) \geq 2m^g(\phi) \deg g$, et donc

$$\deg^{\text{virt}} \partial_2\phi(g) = \deg^{\text{virt}} \phi(g) - \deg g \geq (m^g(\phi)-1) 2 \deg g + \deg g.$$

Le Super Parachute 5 donne alors

$$\begin{aligned}\deg \partial_2\phi(g) &\geq \deg^{\text{virt}} \partial_2\phi(g) - m^g(\partial_2\phi)(\deg g + \deg f - \deg df \wedge dg)\\ &\geq (m^g(\phi)-1)2\deg g + \deg g - (m^g(\phi)-1)(\deg g + \deg f - \deg df \wedge dg)\\ &= (m^g(\phi)-1)(\deg g - \deg f + \deg df \wedge dg) + \deg g\\ &\geq \deg g = q\delta\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. $\square$

3.3 Principe des Deux Maximums

Je propose ci-dessous l'argument de Kuroda, et en annexe un développement de la preuve en trois lignes de Shestakov-Umirbaev.

Principe des Deux Maximums 8 ([1, Theorem 5.2] et [4, Lemma 5])**.** *Si (f_1, f_2, f_3) est un automorphisme, alors le maximum des trois degrés suivants est atteint au moins deux fois :*

$$\deg f_1 + \deg df_2 \wedge df_3, \quad \deg f_2 + \deg df_1 \wedge df_3, \quad \deg f_3 + \deg df_1 \wedge df_2.$$

Preuve. Supposons que le maximum n'est atteint qu'une fois, disons (quitte à composer à gauche par une permutation) par $\deg f_3 + \deg df_1 \wedge df_2$. Pour $i = 1,2,3$ on écrit

$$df_i = f_{i,1}\frac{dx_1}{x_1} + f_{i,2}\frac{dx_2}{x_2} + f_{i,3}\frac{dx_3}{x_3}.$$

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3}\\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3}\\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3}\end{pmatrix}$$

et notons $\tilde{f}_{i,j}$ le mineur obtenu en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

Il existe $j_0, j_1 \in \{1,2,3\}$ tel que

$$\begin{aligned} \deg df_1 \wedge df_2 &= \deg \tilde{f}_{3,j_0}; \\ \deg f_3 = \deg df_3 &= \deg f_{3,j_1}. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a

$$\deg f_3 + \deg df_1 \wedge df_2 = \deg f_{3,j_1} \deg \tilde{f}_{3,j_0} > \deg f_{i,j} \deg \tilde{f}_{i,j} \tag{5}$$

pour $i = 1$ ou 2 et j arbitraire.

Quitte à composer (à droite cette fois) par une permutation, on peut supposer $j_0 = 3$.

Supposons tout d'abord $j_1 = 3$. Calculons le déterminant de la matrice M de deux façons différentes. En développant suivant la troisième colonne :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} f_{i,3} \tilde{f}_{i,3},$$

et en utilisant (5), on voit que $\deg \det(M) = \deg f_{3,3} \deg \tilde{f}_{3,3}$. Mais en développant suivant la première ligne

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} f_{1,j} \tilde{f}_{1,j}$$

et à nouveau via (5), on obtient $\deg \det(M) < \deg f_{3,3} \deg \tilde{f}_{3,3}$: contradiction.

Enfin si $j_1 \neq 3$, on considère la matrice M' obtenue en remplaçant la troisième colonne de M par une copie de la colonne j_1 :

$$M' = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,j_1} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,j_1} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,j_1} \end{pmatrix}$$

Clairement $\det(M') = 0$, pourtant en développant suivant la troisième colonne on trouve $\deg \det(M') = \deg f_{3,j_1} \deg \tilde{f}_{3,3}$: contradiction. □

4 Les conditions K

Il est temps de rentrer dans le détail de ces fameuses conditions **K**... Je rappelle que c'est le nom que je donne aux conditions de Shestakov-Umirbaev «faibles» introduites par Kuroda.

4.1 Définition

On considère $F = (f_1, f_2, f_3)$ un automorphisme. Supposons que $G = (g_1, g_2, g_3)$ s'obtienne à partir de F en composant successivement par trois automorphismes élémentaires de la forme

$$E_1 = (x_1 + \phi_1(x_1,x_2), x_2, x_3);$$
$$E_2 = (x_1, x_2 + \phi_2(x_3), x_3);$$
$$E_3 = (x_1, x_2, x_3 + \phi_3(x_1,x_2)).$$

A cause de la forme particulière de E_2, la composition $E_2 \circ E_1$ est un automorphisme triangulaire et on peut voir le passage de F à $G = E_3 \circ E_2 \circ E_1 \circ F$ en deux étapes :

$$(f_1, f_2, f_3) \to (g_1, g_2, f_3) = (f_1 + \phi_1(f_2, f_3), f_2 + \phi_2(f_3), f_3)$$
$$(g_1, g_2, f_3) \to (g_1, g_2, g_3) = (g_1, g_2, f_3 + \phi_3(g_1, g_2)).$$

On dit que le couple (F,G) satisfait les conditions **K** si les conditions suivantes sont satisfaites. D'une part les conditions naturelles

(**K**1) $\deg f_i \leq \deg g_i$ pour $i = 1,2$;

(**K**2) $\deg g_3 < \deg f_3$;

(**K**3) (i) $\deg g_2 < \deg g_1$; (ii) $g_1^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g_2^{\mathrm{w}}]$;

(**K**4) (i) $\deg f_3 < \deg g_1$; (ii) $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g_1^{\mathrm{w}}, g_2^{\mathrm{w}}]$.

et d'autre part l'inégalité

(K<) $\deg g_3 < \Delta(g_1, g_2) = \deg g_1 - \deg g_2 + \deg dg_1 \wedge dg_2$;

Commentaires : (**K**1) signifie que E_1 et E_2 ne font pas baisser le degré. Noter que l'on admet la possibilité pour E_1 et E_2 d'être égal à l'identité. (**K**2) signifie que E_3 fait chuter strictement le degré, on verra (même si ce n'est pas évident a priori, cf corollaire 13) que les conditions impliquent $\deg G < \deg F$, ce qui justifie la terminologie de «réduction». (**K**3) brise la symétrie entre les indices 1 et 2, la condition (ii) est une condition d'optimalité. Il est moins clair comment interpréter (**K**4).

On dira qu'un automorphisme F admet une réduction **K** s'il existe G et une permutation σ tels que $(\sigma \circ F, G)$ satisfassent les conditions **K**. Tout comme il y a trois types de réduction élémentaires il y a donc six types de réduction **K**, mais on se ramènera toujours à la forme ci-dessus dans les preuves.

En fait les conditions **K** impliquent de fortes contraintes sur les degré des composantes, et sur la forme de ϕ_1 et ϕ_2. Le §4.2 explore ces contraintes, le §4.3 introduit la notion de réduction **K** normalisée, et le §4.4 caractérise certains polynômes en les f_i de petits degré.

4.2 Propriétés

Proposition 9. *Si (F,G) est une réduction **K**, il existe un entier impair $s \geq 3$ et un degré δ tel que*

$$\deg g_1 = s\delta, \quad \deg g_2 = \deg f_2 = 2\delta,$$
$$\Delta(g_1,g_2) = (s-2)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 < \deg f_3 < s\delta.$$

De plus

(i) Si $s = 3$, alors

$$G = (f_1 + af_3^2 + cf_3 + ef_2,\ f_2 + bf_3,\ f_3 + \phi_3(g_1,g_2)).$$

(ii) Si $s \geq 5$, alors

$$G = (f_1 + cf_3 + \psi(f_2),\ f_2,\ f_3 + \phi_3(g_1,g_2)),$$

avec $\deg \psi(f_2) \leq (s-1)\delta$.

Preuve. La condition (K2), $\deg g_3 < \deg f_3$ implique $\deg \phi_3(g_1,g_2) = \deg f_3$. Donc par (K4), on a $\deg \phi_3(g_1,g_2) < \deg g_1$ et $\phi_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g_1^{\mathrm{w}}, g_2^{\mathrm{w}}]$. Ceci implique

$$\deg \phi_3(g_1,g_2) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_3(g_1,g_2).$$

On est en position d'appliquer le corollaire 7(iv,v). D'une part on obtient $(g_1^{\mathrm{w}})^2 = (g_2^{\mathrm{w}})^s$ pour $s \geq 3$ impair; en particulier $\delta = \frac{\deg g_2}{2}$ est entier. D'autre part on a les deux inégalités

$$\deg dg_2 \wedge d(\phi_3(g_1,g_2)) \geq s\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2, \tag{6}$$

et

$$\deg f_3 \geq (s-2)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 = \Delta(g_1,g_2) \tag{7}$$

Cette dernière condition donne en particulier $\deg f_3 > \delta$. On a alors[3]

$$2\delta = \deg g_2 \geq \deg \phi_2(f_3) > \deg(\phi_2(y)) \cdot \delta.$$

Ainsi $\phi_2(y)$ est au plus de degré 1:

$$g_2 = f_2 + bf_3. \tag{8}$$

Si $b \neq 0$ et $\deg f_3 > \deg f_2$ on aurait $f_3^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[g_2^{\mathrm{w}}]$ en contradiction avec (**K**4). En tous cas on a donc

$$\deg f_2 = \deg g_2 = 2\delta. \tag{9}$$

Notons au passage que $b \neq 0$ implique $s = 3$, car par (7), $s \geq 5$ implique $\deg f_3 \geq 3\delta > \deg g_2 = \deg f_2$.

Pour terminer la preuve il nous faut d'abord montrer le

[3] Ici $\deg \phi_2(y) \in \mathbb{N}$ est le degré ordinaire d'un polynôme à une variable.

Lemme 10.
$$\deg dg_2 \wedge df_3 = \deg df_2 \wedge df_3 \geq s\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2.$$

Preuve. D'une part, comme $d(\phi_2(f_3)) \wedge df_3 = 0$, on a

$$df_2 \wedge df_3 = dg_2 \wedge df_3 = dg_2 \wedge dg_3 - dg_2 \wedge d(\phi_3(g_1, g_2)).$$

De plus en combinant (**K**<) pour l'inégalité stricte et (6) pour la dernière inégalité, on a

$$\begin{aligned} \deg dg_2 \wedge dg_3 \leq \deg g_2 + \deg g_3 < \deg g_1 + \deg dg_1 \wedge dg_2 \\ = s\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 \leq \deg dg_2 \wedge d(\phi_3(g_1, g_2)) \end{aligned}$$

Ainsi $\deg df_2 \wedge df_3 = \deg dg_2 \wedge d(\phi_3(g_1, g_2))$, et à nouveau par (6) on obtient l'inégalité attendue. □

On reprend la preuve de la proposition 9; il nous reste à établir la forme de $\phi_1(f_2, f_3)$.

Remarquons que (8) et (9) impliquent $f_2^{\mathrm{w}} \neq f_3^{\mathrm{w}}$, sinon on aurait $g_2^{\mathrm{w}} = f_3^{\mathrm{w}}$ en contradiction avec (**K**4).

Supposons que $f_3^{\mathrm{w}} = (f_2^{\mathrm{w}})^l$ avec $l \geq 2$. Alors $\deg f_3 > \deg f_2$ et donc $b = 0$, $g_2^{\mathrm{w}} = f_2^{\mathrm{w}}$. On aurait $f_3^{\mathrm{w}} = (g_2^{\mathrm{w}})^l$, à nouveau en contradiction avec (**K**4). On conclut que $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$.

Supposons au contraire que $f_2^{\mathrm{w}} = (f_3^{\mathrm{w}})^l$ avec $l \geq 2$. En particulier on aurait $2\delta = \deg f_2 = l \deg f_3 > l\delta$, contradiction. On conclut que $f_2^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_3^{\mathrm{w}}]$.

Montrons maintenant qu'on ne peut pas avoir $\deg \phi_1(f_2, f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2, f_3)$. Sinon, les remarques précédentes permettent d'appliquer le corollaire 7(iii), qui donne

$$\deg \phi_1(f_2, f_3) > \deg df_2 \wedge df_3.$$

Comme $\deg df_2 \wedge df_3 > s\delta$ par le lemme 10, on aurait $\deg \phi_1(f_2, f_3) > s\delta$, contradiction.

On conclut que $\deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2, f_3) = \deg \phi_1(f_2, f_3) \leq s\delta$.

Si $s \geq 5$, on obtient $\phi_1(f_2, f_3) = cf_3 + \psi(f_2)$, avec $\deg \psi(f_2) \leq (s-1)\delta$.

Si $s = 3$, on obtient $\phi_1(f_2, f_3) = af_3^2 + cf_3 + ef_2$. □

4.3 Normalisation

Dans chacun des cas (i) et (ii) de la proposition 9, on peut simplifier l'écriture de G (ou plutôt, reporter un peu de la complication de ϕ_1 dans ϕ_3).

(i) Si $s = 3$, on remplace

$$G = \left(f_1 + af_3^2 + cf_3 + ef_2,\ f_2 + bf_3,\ f_3 + \phi_3(g_1, g_2)\right)$$

par
$$G' = \left(f_1 + af_3^2 + (c - be)f_3,\ f_2 + bf_3,\ f_3 + \phi_3(g_1 + eg_2, g_2)\right).$$

(ii) Si $s \geq 5$, on remplace

$$G = (f_1 + cf_3 + \psi(f_2),\, f_2,\, f_3 + \phi_3(g_1, g_2))$$

par

$$G' = (f_1 + cf_3,\, f_2,\, f_3 + \phi_3(g_1 + \psi(g_2), g_2))\,,$$

avec $\deg \psi(g_2) \leq (s-1)\delta$.

On vérifie facilement que (F, G') est encore une réduction **K**, et que $\deg G = \deg G'$. Je dirai qu'une telle réduction est **normalisée**. Autrement dit, une réduction **K** est normalisée si $\phi_1(x_2, x_3) \in \mathbb{C}[x_3]$, et la remarque ci-dessus est que l'on peut toujours se ramener à cette situation.

Voici un critère qui assure qu'une réduction **K** normalisée est aussi une réduction $\mathcal{E}_3$: c'est un «pré-Toboggan».

Proposition 11. *Supposons que (F,G) soit une réduction **K** normalisée. On a donc*

$$G = (f_1 + af_3^2 + cf_3,\, f_2 + bf_3,\, f_3 + \phi_3(g_1, g_2)).$$

Alors

(i) $\deg df_1 \wedge df_3 = (s-2)\delta + \deg df_2 \wedge df_3 \geq 2(s-1)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2$.

(ii) $\deg df_1 \wedge df_2 = \begin{cases} \deg f_3 + \deg df_2 \wedge df_3 & \textit{si } a \neq 0 \\ \deg df_1 \wedge df_3 & \textit{si } a = 0, b \neq 0 \\ \deg df_2 \wedge df_3 & \textit{si } a = b = 0, c \neq 0 \end{cases}$

En particulier si $\deg df_1 \wedge df_2 < \deg df_2 \wedge df_3$ *alors* $a = b = c = 0$*; autrement dit* (F,G) *est une réduction* $\mathcal{E}_3$.

Preuve. (i) D'une part le lemme 10 donne $\deg dg_2 \wedge df_3 > \deg dg_1 \wedge dg_2$. D'autre part $s\delta = \deg g_1 > \deg f_3$. Donc

$$\deg g_1 + \deg dg_2 \wedge df_3 > \deg f_3 + dg_1 \wedge dg_2.$$

Par le Principe des Deux Maximums 8 on obtient

$$\deg g_2 + dg_1 \wedge df_3 = \deg g_1 + \deg dg_2 \wedge df_3.$$

Remarquons que $dg_1 \wedge df_3 = df_1 \wedge df_3$, $dg_2 \wedge df_3 = df_2 \wedge df_3$. On obtient ainsi l'égalité attendue :

$$\deg df_1 \wedge df_3 = (s-2)\delta + \deg df_2 \wedge df_3.$$

L'inégalité n'est qu'une reprise du lemme 10.

(ii) On exprime $df_1 \wedge df_2$:

$$df_1 \wedge df_2 = dg_1 \wedge dg_2 + 2af_3 df_2 \wedge df_3 + cdf_2 \wedge df_3 + bdf_1 \wedge df_3.$$

En se rappelant que par (7)

$$\deg f_3 \geq (s-2)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2,$$

on obtient les inégalités (la dernière est le lemme 10)

$$\deg f_3 df_2 \wedge df_3 > \deg df_1 \wedge df_3 > \deg df_2 \wedge df_3 > \deg dg_1 \wedge dg_2.$$

On en déduit immédiatement les différents cas de l'énoncé. $\square$

Corollaire 12. *Si (F,G) est une réduction **K** normalisée qui n'est pas une réduction $\mathcal{E}_3$, et si les degrés des formes $df_1 \wedge df_2$, $df_1 \wedge df_3$ et $df_2 \wedge df_3$ sont deux à deux distincts, alors $s = 3$ et*

$$df_2 \wedge df_3 < df_1 \wedge df_3 < df_1 \wedge df_2.$$

Preuve. La proposition donne $\deg df_1 \wedge df_3 = (s-2)\delta + \deg df_2 \wedge df_3$. On ne peut pas avoir $a = b = c = 0$ puisque (F,G) n'est pas une réduction $\mathcal{E}_3$. On a donc $\deg df_1 \wedge df_2 = \deg f_3 + \deg df_2 \wedge df_3$. Comme $\deg f_3 > (s-2)\delta$, on a le résultat. $\square$

On est enfin en position de montrer qu'une réduction **K** fait bien baisser strictement le degré.

Corollaire 13. *Supposons que (F,G) soit une réduction **K**.*

(i) *Si* $\deg f_1 < \deg g_1$, *alors* $s = 3$ *et*

$$\deg f_1 \geq \frac{5}{2}\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2, \quad \deg f_3 = \frac{3}{2}\delta.$$

(ii) $\deg G < \deg F$;

(iii) *Les degrés* $\deg f_1$, $\deg f_2$ *et* $\deg f_3$ *sont deux à deux distincts.*

Preuve. On peut supposer la réduction normalisée, ce qui n'affecte ni les degrés des f_i, ni ceux des g_i.

(i) Si $\deg f_1 < \deg g_1$, la condition (K4), $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[g_1^{\mathrm{w}}]$ force $s = 3$ et $\deg f_3^2 = \deg g_1$, d'où $\deg f_3 = \frac{3}{2}\delta$.

La proposition 11(i) donne $\deg df_1 \wedge df_3 \geq 4\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2$; on a donc

$$\deg f_1 + \deg f_3 \geq \deg df_1 \wedge df_3 \geq 4\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2$$

d'où $\deg f_1 \geq \frac{5}{2}\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2$.

(ii) Si $\deg f_1 = \deg g_1$, le résultat est clair en se rappelant que $\deg g_2 = \deg f_2$ et $\deg f_3 > \deg g_3$.

Si $\deg f_1 < \deg g_1$, on est dans la situation de (i). On a donc

$$\deg f_1 + \deg f_3 \geq \frac{5}{2}\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 + \frac{3}{2}\delta = 4\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2.$$

Par ailleurs la condition (**K**<) donne

$$\deg g_3 < \deg g_1 - \deg g_2 + \deg dg_1 \wedge dg_2 = \delta + \deg dg_1 \wedge dg_2.$$

d'où

$$\deg g_1 + \deg g_3 < 4\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 \leq \deg f_1 + \deg f_3.$$

Comme $\deg f_2 = \deg g_2$, cela donne $\deg G < \deg F$.

(iii) Comme $g_2 = f_2 + bf_3$ et que $\deg g_2 \geq \deg f_2$, si $f_2^{\mathrm{w}} = f_3^{\mathrm{w}}$ on aurait $f_3^{\mathrm{w}} = g_2^{\mathrm{w}}$ en contradiction avec (K4).

Si $f_1^{\mathrm{w}} = f_3^{\mathrm{w}}$ on a $g_1 = f_1 + cf_3 + \psi(f_2)$ et comme $\deg g_1 \geq \deg f_1$, on aurait $g_1^{\mathrm{w}} = f_3^{\mathrm{w}}$, de nouveau en contradiction avec (K4).

Reste à montrer $f_1^{\mathrm{w}} \neq f_2^{\mathrm{w}}$. C'est clair si $\deg f_1 = \deg g_1 = s\delta > 2\delta = \deg f_2$. Si $\deg f_1 < \deg g_1$, le point (i) donne $\deg f_1 > \frac{5}{2}\delta > 2\delta = \deg f_2$. □

4.4 Polynômes en les f_i

On suppose dans les deux lemmes suivants que $F = (f_1, f_2, f_3)$ admet une réduction **K** normalisée.

Lemme 14. *Si $P(f_1, f_3)$ satisfait $\deg P(f_1, f_3) \leq \deg f_2$, alors $P = bf_3$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que $\deg^{\mathrm{virt}} P(f_1, f_3) \leq \deg f_2$. Supposons que ce ne soit pas le cas, on a alors

$$\deg P(f_1, f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} P(f_1, f_3).$$

Le lemme 6 assure qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tels que $p \deg f_3 = q \deg f_1$, et le corollaire 7(i) donne

$$2\delta = \deg f_2 \geq \deg P(f_1, f_3) \geq q \deg f_1 + \deg df_1 \wedge df_3 - \deg f_1 - \deg f_3.$$

Par ailleurs la proposition 11(i) donnent

$$\deg df_1 \wedge df_3 \geq 2(s-1)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2.$$

En remplaçant dans l'inégalité précédente on obtient

$$2\delta \geq (q-1)\deg f_1 - \deg f_3 + 2(s-1)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2. \tag{10}$$

On distingue deux cas.

Si $\deg f_1 < \deg g_1$, le corollaire 13 donne $s = 3$, $\deg f_3 = \frac{3}{2}\delta$ et $\deg f_1 > \frac{5}{2}\delta$. On estime alors le membre de droite de l'inégalité (10) pour obtenir une contradiction :

$$(q-1)\frac{5}{2}\delta - \frac{3}{2}\delta + 4\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 > \frac{5}{2}q\delta > 2\delta.$$

Si $\deg f_1 = \deg g_1 = s\delta$, on obtient

$$2\delta \geq (q-1)s\delta - \frac{q}{p}s\delta + 2(s-1)\delta + \deg dg_1 \wedge dg_2 > qs\frac{p-1}{p}\delta + (s-2)\delta.$$

Ainsi $s = 3$, et $3q\frac{p-1}{p} < 1$, mais cette dernière condition est impossible car $p \geq 2$. □

Lemme 15. *Supposons que* $\mathbb{C}[f_1,f_2] \neq \mathbb{C}[g_1,g_2]$. *Si* $P(f_1,f_2)$ *satisfait* $\deg P(f_1,f_2) < \deg f_1$, *alors* $P \in \mathbb{C}[f_2]$.

Preuve. Il s'agit de montrer que $\deg^{\text{virt}} P(f_1,f_2) < \deg f_1$. Supposons que ce ne soit pas le cas, on a alors
$$\deg P(f_1,f_2) < \deg^{\text{virt}} P(f_1,f_2).$$
Par le corollaire 7(iii), on a $\deg P(f_1,f_2) > \deg df_1 \wedge df_2$.

Comme $(f_1,f_2) \neq (g_1,g_2)$, par la proposition 11 on a

$$\deg df_1 \wedge df_2 \geq \deg df_2 \wedge df_3 > s\delta,$$

où la dernière inégalité vient du lemme 10.

On obtient la contradiction $\deg P(f_1,f_2) > s\delta = \deg g_1 \geq \deg f_1$.

□

5 Toboggan vers une réduction $\mathcal{E}_3$

5.1 Le Toboggan

On fait l'hypothèse de récurrence suivante, qui nous donne donc libre accès au lemme 3 :

(HR) Si $H \in \mathcal{A}$ satisfait $\deg H < \mu$, alors pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a $E \circ H \in \mathcal{A}$.

On veut prouver le

Toboggan 16. *Supposons (**HR**). Soit* $F = (f_1,f_2,f_3) \in \mathcal{A}$ *de degré* μ *qui satisfait (pour un degré* δ *et* $s \geq 3$ *impair) :*

(i) $\deg f_1 = s\delta$*;*

(ii) $\deg f_2 = 2\delta$*;*

(iii) $\Delta(f_1,f_2) = (s-2)\delta + \deg df_1 \wedge df_2 \leq \deg f_3 < s\delta$*;*

(iv) $f_3^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\text{w}}]$.

Alors F *admet une réduction* $\mathcal{E}_3$ *dans* $\mathcal{A}$.

Preuve. Tout d'abord, quelques conséquences directes des hypothèses :

(v) $\deg f_2 < \deg f_3^2$ *et en particulier* $f_2^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_3^{\text{w}}]$*;*

(vi) $f_2^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_1^{\text{w}}, f_3^{\text{w}}]$*;*

(vii) $f_1^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_3^{\text{w}}]$ *sauf éventuellement si* $s = 3$ *et* $f_1^{\text{w}} = (f_3^{\text{w}})^2$.

Comme $F \in \mathcal{A}$, il admet une réduction $G \in \mathcal{A}$ qui peut être de type $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ou **K**. Il s'agit de montrer qu'il en existe toujours une de type $\mathcal{E}_3$. Le plan de la preuve, illustré sur la figure 1, est de prouver les implications

$$\text{réduction } \mathcal{E}_2 \Longrightarrow \text{réduction } \mathcal{E}_1 \Longrightarrow \text{réduction } \mathbf{K} \Longrightarrow \text{réduction } \mathcal{E}_3.$$

Avertissement : Le point le plus difficile de tout le papier de Kuroda est la deuxième de ces implication, qui repose sur la proposition 17 à la preuve incroyablement labyrinthique...

Supposons que $G = (f_1, f_2 + \phi_2(f_1, f_3), f_3) \in \mathcal{A}$ soit une réduction $\mathcal{E}_2$ de F. On a donc $f_2^{\mathrm{w}} = \phi_2^{\mathrm{w}}$, et par *(vi)* $\deg \phi_2(f_1, f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_2(f_1, f_3)$. On sait par le lemme 6 qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tels que $p \deg f_1 = q \deg f_3$. En particulier

$$\deg f_3 = \frac{p}{q} \deg f_1 = \frac{p}{q} s\delta.$$

Le corollaire 7(ii) donne alors l'inégalité (où $\varepsilon = \deg df_1 \wedge df_2 \wedge df_3$):

$$\begin{aligned} 2\delta = \deg f_2 > \deg(f_2 + \phi_2(f_1, f_3)) &\geq p \deg f_1 + \varepsilon - \deg df_1 \wedge df_2 - \deg f_3 \\ &\geq p \deg f_1 - \deg f_3 + (s-2)\delta - \deg f_3 \\ &= \left(s \left(p - 2\frac{p}{q} + 1 \right) - 2 \right) \delta. \end{aligned}$$

Nous déduisons maintenant de cette inégalité que $f_1^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_3^{\mathrm{w}}]$ (on a donc $f_1^{\mathrm{w}} = (f_3^{\mathrm{w}})^2$ par *(vii)*, mais peu importe). En effet sinon le corollaire 7(iv) appliqué à $f = f_3$, $g = f_1$ donne $p = 2$, et le dernier membre de l'inégalité ci-dessus est au moins $(3(2 - 2.2/3 + 1) - 2)\delta = 3\delta$, contradiction.

Alors le lemme 3(iv) appliqué à $i = 3, j = 1$ implique $1 \in I_F$.

Supposons que $F' = (f_1 + \phi_1(f_2, f_3), f_2, f_3) \in \mathcal{A}$ soit une réduction $\mathcal{E}_1$ de F. On peut supposer que cette réduction est optimale, et donc

(viii) $(f_1 + \phi_1(f_2, f_3))^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_2, f_3]^{\mathrm{w}}$.

On est dans les conditions d'application de la proposition suivante, dont la preuve occupe le §5.2.

Proposition 17. *Sous les hypothèses (i - viii) précédentes, on est dans l'un des cas suivants :*

1. $\deg \phi_1(f_2, f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2, f_3)$ *et F' n'admet pas de réduction **K**;*
2. $\deg \phi_1(f_2, f_3) = \deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2, f_3)$ *et si F' admet une réduction **K**, alors F en admet une également;*

De plus dans les deux cas F' n'admet pas de réduction élémentaire.

En particulier, comme $F' \in \mathcal{A}$ mais que F' n'admet pas de réduction élémentaire par la proposition 17, on en déduit que F' admet une réduction **K**. On est donc dans la deuxième alternative de la proposition 17, et finalement F admet une réduction **K**.

Supposons enfin que (F_σ, G) soit une réduction **K**, que l'on peut supposer normalisée. Comme on sait que f_1 est de degré strictement supérieur à f_2 et f_3, on a $\sigma(1) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\deg f_1 &\leq \deg g_1 && \text{par (K1)} \\
&\leq \deg f_{\sigma(2)} \wedge d f_{\sigma(3)} && \text{par le lemme 10} \\
&\leq \deg f_1 \wedge d f_{\sigma(3)} && \text{par la proposition 11.}
\end{aligned}$$

Comme l'hypothèse *(iii)* donne $\deg d f_1 \wedge d f_2 < \deg f_1$, on en déduit $\sigma(3) = 3$ et donc $\sigma = \mathrm{id}$.

L'inégalité $\deg d f_1 \wedge d f_2 < \deg f_1 \leq d f_2 \wedge d f_3$ permet également d'appliquer la proposition 11, ainsi (F, G) est une réduction $\mathcal{E}_3$. □

5.2 Preuve de la proposition 17

Merci de vérifier le verrouillage de votre harnais de sécurité.

On note $f_1' = f_1 + \phi_1(f_2, f_3)$.

Commençons par traiter le cas $\deg \phi_1(f_2, f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2, f_3)$.

Par le lemme 6, il existe p, q premiers entre eux tels que $q \deg f_2 = p \deg f_3$. Notons que $p, q \neq 1$ par *(iv, v)*. On a

$$\begin{aligned}
s\delta = \deg f_1 &> \deg f_1 + \phi_1(f_2, f_3) \\
&> q \deg f_2 - \deg d f_1 \wedge d f_2 - \deg f_3 && \text{par le lemme 7(ii)} \\
&\geq q \deg f_2 - (\deg f_3 - (s-2)\delta)) - \deg f_3 && \text{par } (iii) \\
&= \left(q \left(2 - \frac{4}{p} \right) + s - 2 \right) \delta
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de $\deg f_2 = 2\delta, \deg f_3 = \frac{q}{p} \deg f_2$.

Montrons que $p = 3$ par l'absurde. Si $p = 2$, alors $\deg f_3 = q\delta$. L'hypothèse *(iii)* implique alors $q = s - 1$, ce qui vient contredire q premier avec 2. Si $p \geq 4$, comme $q \geq 2$ l'inégalité ci-dessus donnerait une contradiction $s\delta > s\delta$.

De même, sachant $p = 3$, l'inégalité interdit d'avoir $q \geq 3$. On a donc $q = 2$.

On a donc $\deg f_3 = \frac{4}{3}\delta$. Comme l'hypothèse *(iii)* impose $\deg f_3 > (s-2)\delta$, on en déduit $s = 3$, ou autrement dit

$$\deg f_1 = 3\delta, \quad \deg f_2 = 2\delta, \quad \deg f_3 = \frac{4}{3}\delta, \quad 3\delta > \deg f_1' > \frac{7}{3}\delta.$$

Ces valeurs interdisent que F' admette une réduction **K**: on devrait avoir $\deg f_1' = s'\gamma$, $\deg f_j = 2\gamma$ pour un degré γ, un entier impair $s' \geq 3$ et $j = 2$ ou 3, ce qui n'est pas le cas. On obtient la première alternative de la proposition.

Enfin, si F' admet une réduction élémentaire ($\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$, puisque $\mathcal{E}_1$ est exclu par optimalité), on constate qu'on est dans les hypothèses du corollaire 7(iv) et donc il existe

$q' \geq 3$ impair tel que $2\deg f'_1 = q' \deg f_j$: à nouveau ce n'est pas compatible avec les degrés ci-dessus.

On traite maintenant le cas $\deg \phi_1(f_2, f_3) = \deg^{\text{virt}} \phi_1(f_2, f_3)$.

Fait 18. $f_1^{\text{w}} = (f_3^{\text{w}})^2$.

Par l'absurde, supposons $f_1^{\text{w}} \neq (f_3^{\text{w}})^2$. Donc $f_1^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_3^{\text{w}}]$ par *(vii)*. D'autre part les hypothèses *(i,ii,iii)* impliquent d'une part $f_1^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\text{w}}]$ et d'autre part

$$\deg f_1 < \deg f_2 + \deg f_3.$$

On a donc $\phi_1^{\text{w}} = f_1^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\text{w}}, f_3^{\text{w}}]$: contradiction.

L'hypothèse *(vii)* implique alors $s = 3$, ou autrement dit

$$\deg f_1 = 3\delta, \quad \deg f_2 = 2\delta, \quad \deg f_3 = \frac{3}{2}\delta.$$

Comme

$$\deg^{\text{virt}} \phi_1(f_2, f_3) = \deg \phi_1(f_2, f_3) = \deg f_1 = 3\delta,$$

on en déduit que

$$\phi_1(f_2, f_3) = af_3^2 + cf_3 + ef_2 \text{ avec } a \neq 0. \tag{11}$$

Vient maintenant une série de petits faits techniques avant de s'attaquer à la non-existence de réduction élémentaire.

Fait 19. $\deg df_1 \wedge df_3 = \delta + \deg df_2 \wedge df_3$.

Par hypothèse *(iii)* on a $\deg df_1 \wedge df_2 < \deg f_3 = \frac{3}{2}\delta$, d'où

$$\deg f_3 + \deg df_1 \wedge df_2 < 3\delta.$$

Comme $\deg f_1 = 3\delta$ on obtient a fortiori

$$\deg f_3 + \deg df_1 \wedge df_2 < \deg f_1 + \deg df_2 \wedge df_3.$$

Le Principe des Deux Maximums 8 nous dit alors que

$$\deg f_2 + \deg df_1 \wedge df_3 = \deg f_1 + \deg df_2 \wedge df_3.$$

Finalement en passant $\deg f_2$ à droite on obtient l'égalité attendue :

$$\deg df_1 \wedge df_3 = \deg f_1 - \deg f_2 + \deg df_2 \wedge df_3 = \delta + \deg df_2 \wedge df_3.$$

Fait 20. $\deg df'_1 \wedge df_3 = \delta + \deg df_2 \wedge df_3$.

Au vu de l'expression (11) de ϕ_1 on a $d\phi_1 \wedge df_3 = e df_2 \wedge df_3$. Par le fait 19 on a $\deg df_2 \wedge df_3 < \deg df_1 \wedge df_3$. Comme $df_1' \wedge df_3 = df_1 \wedge df_3 + e df_2 \wedge df_3$, on en déduit $\deg df_1' \wedge df_3 = \deg df_1 \wedge df_3$ d'où le résultat, en combinant avec le fait 19.

Fait 21. $\deg df_1' \wedge df_2 = \frac{3}{2}\delta + \deg df_2 \wedge df_3$.

Au vu de l'expression (11) de ϕ_1 on a

$$df_1' \wedge df_2 = df_1 \wedge df_2 + 2af_3 df_3 \wedge df_2 + c df_3 \wedge df_2.$$

Par l'hypothèse *(iii)* on a $\deg df_1 \wedge df_2 < \deg f_3$, d'où l'on déduit que $2af_3df_3 \wedge df_2$ est de degré strictement supérieur aux deux autres termes du membre de droite. Finalement,

$$\deg df_1' \wedge df_2 = \deg f_3 df_3 \wedge df_2 = \frac{3}{2}\delta + \deg df_2 \wedge df_3.$$

Fait 22. $\deg f_1' > \delta$.

Considérons le polynôme $P \in \mathbb{C}[f_1, f_2][y]$ défini par $P = f_1 + ay^2 + cy + ef_2$. D'une part $\deg P(f_3) = \deg f_1'$, d'autre part $\deg^{\text{virt}} P(f_3) = \deg f_1$, en particulier

$$\deg P(f_3) < \deg^{\text{virt}} P(f_3).$$

Considérons maintenant le polynôme dérivé $P' = 2ay + c$. On a $\deg P'(f_3) = \deg^{\text{virt}} P'(f_3) = \deg f_3$. On applique le Super Parachute 5 (avec $m^{f_3}(P) = 1$ par ce qui précède) et on obtient

$$\deg P(f_3) \geq \deg^{\text{virt}} P(f_3) + \deg df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 - \deg df_1 \wedge df_2 - \deg f_3.$$

En se souvenant que par l'hypothèse *(iii)*, $(s-2)\delta + \deg df_1 \wedge df_2 \leq \deg f_3$, on obtient

$$\deg f_1' = \deg P(f_3) > \deg f_1 - 2\deg f_3 + (s-2)\delta = \delta.$$

Fait 23.

(a) $(f_1')^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\text{w}}, f_3^{\text{w}}]$;

(b) $f_2^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\text{w}}, f_3^{\text{w}}]$;

(c) $f_3^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\text{w}}, f_2^{\text{w}}]$.

Le point *(a)* est une version faible de l'hypothèse d'optimalité *(viii)*.

On a donc $f_2^{\text{w}} \neq (f_1')^{\text{w}}$, et le fait 22 implique alors $f_2^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\text{w}}]$. Les égalités $\deg f_2 = 2\delta$ et $\deg f_3 = \frac{3}{2}\delta$ impliquent $f_2^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[f_3^{\text{w}}]$. Enfin, comme $\deg f_2 < \deg f_1' + \deg f_3$, on obtient le point *(b)*.

Le point *(a)* assure $f_3^{\text{w}} \neq (f_1')^{\text{w}}$, et le fait 22 implique alors $f_3^{\text{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\text{w}}]$. Comme $\deg f_3 < \deg f_2$, on obtient le point *(c)*.

Ces menus préliminaires techniques étant posés, on peut commencer à travailler. Par optimalité on sait déjà que F' n'admet pas de réduction $\mathcal{E}_1$. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas non plus de réduction $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$.

Montrer que F' n'admet pas de réduction $\mathcal{E}_3$ revient à montrer que $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_1', f_2]^{\mathrm{w}}$. Par l'absurde, supposons que $\phi_3(f_1', f_3)$ vérifie $\phi_3^{\mathrm{w}} = f_3^{\mathrm{w}}$.

Par le fait 23(c), on sait que $\phi_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\mathrm{w}}, f_2^{\mathrm{w}}]$.

Donc $\deg \phi_3(f_1', f_2) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_3(f_1', f_2)$.

Le fait 23(a,b) permet d'appliquer le corollaire 7(iii) et d'obtenir

$$\frac{3}{2}\delta = \deg f_3 = \deg \phi_3(f_1', f_2) > \deg df_1' \wedge df_2.$$

Ceci vient contredire le fait 21.

Montrer que F' n'admet pas de réduction $\mathcal{E}_2$ revient à montrer que $f_2^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_1', f_3]^{\mathrm{w}}$. Par l'absurde, supposons que $\phi_2(f_1', f_3)$ vérifie $\phi_2^{\mathrm{w}} = f_2^{\mathrm{w}}$.

Par le fait 23(b), on sait que $\phi_2^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[(f_1')^{\mathrm{w}}, f_3^{\mathrm{w}}]$.

Donc $\deg \phi_2(f_1', f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_2(f_1', f_3)$. Par le lemme 6 il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$, et un degré γ tels que

$$\deg f_1' = p\gamma, \qquad \deg f_3 = q\gamma.$$

Le corollaire 7(i) donne alors

$$pq\gamma + \deg df_1' \wedge df_3 - p\gamma - q\gamma \leq \deg \phi_2(f_1', f_3) = \deg f_2 = 2\delta.$$

Or par le fait 20 on sait que $\deg df_1' \wedge df_3 = \delta + \deg df_2 \wedge df_3$.

On a donc

$$\deg df_2 \wedge df_3 + (pq - p - q)\gamma < \delta. \tag{12}$$

On sait que $\frac{3}{2}\delta = \deg f_3 = q\gamma$, et (fait 22) $\delta < \deg f_1' = p\gamma$, donc

$$pq - p - q < \min\{p, q\}.$$

Par le fait 23(a,c) on sait que $p \neq 1$ et $q \neq 1$.

Alors les seules possibilités sont $(p,q) = (2,3)$ ou $(3,2)$.

Si $(p,q) = (2,3)$ on obtient à l'aide du fait 22 la contradiction

$$3\delta < 3\deg f_1' = 2\deg f_3 = 3\delta.$$

Si $(p,q) = (3,2)$, on vérifie que

$$\deg f_1' = \frac{9}{4}\delta, \quad \gamma = \frac{3}{4}\delta, \quad pq - p - q = 1.$$

L'inégalité (12) devient

$$\deg df_2 \wedge df_3 < \frac{\delta}{4}.$$

Le corollaire 7(ii) donne alors

$$\begin{aligned}\deg(f_2+\phi_2(f_1',f_3)) &> 3\deg f_3 - \deg f_2\wedge f_3 - \deg f_1' \\ &\geq \left(3\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\delta \\ &= 2\delta.\end{aligned}$$

Ceci vient contredire $\deg(f_2+\phi_2(f_1',f_3)) < \deg f_2 = 2\delta$.

Pour terminer la preuve de la proposition 17, il nous reste à montrer la deuxième alternative de l'énoncé :

Fait 24. *Supposons que* $(\sigma\circ F',G)$ *soit une réduction* ***K****. Alors* $\sigma = id$ *et* (F,G) *est encore une réduction* ***K****.*

On peut supposer la réduction $(\sigma\circ F',G)$ normalisée. On note $G=(g_1,g_2,g_3)$.
Les faits 20 et 21 impliquent

$$\deg df_2\wedge df_3 < \deg df_1'\wedge df_3 < \deg df_1'\wedge df_2.$$

Comme on sait que F' n'admet pas de réduction $\mathcal{E}$, le corollaire 12 nous donne $\sigma = \mathrm{id}$ et $2\deg g_1 = 3\deg g_2$.

En particulier $\deg g_1 = \frac{3}{2}\deg f_2 = \deg f_1 > \deg f_1'$. Ainsi la condition (**K**1) est bien satisfaite par (F,G), (K3)(ii) et (K4)(ii) viennent du fait 23, et les autres conditions sont immédiates.

6 Preuve du résultat principal

On prouve ici la proposition 2 :

Si $\deg E\circ F \leq \deg F$ *pour* $F\in\mathcal{A}$, $E\in\mathcal{E}$, *alors* $E\circ F\in\mathcal{A}$.

Je rappelle qu'elle implique immédiatement le théorème 1.

6.1 Stabilité de la réduction K

Ce paragraphe repose essentiellement sur le §4 «Conditions **K**».

Une première étape est de montrer que les conditions **K** sont stables au sens suivant :

Lemme 25. *Soit* (F,G) *une réduction* ***K*** *normalisée, avec* $G\in\mathcal{A}$. *Supposons qu'il existe* $E\in\mathcal{E}$ *tel que* $\deg E\circ F\leq\deg F$. *Si* $E\in\mathcal{E}_3$, *on suppose de plus que* G *n'est pas une réduction* $\mathcal{E}_3$ *de* F. *Alors* $(E\circ F,G)$ *est encore une réduction* ***K****.*

Preuve. On écrit $G = E_3 \circ E_2 \circ E_1 \circ F$, et on distingue trois cas.

Si $E \in \mathcal{E}_1$; c'est le cas le plus facile : on a directement G sous la bonne forme

$$G = E_3 \circ E_2 \circ (E_1 \circ E^{-1}) \circ (E \circ F).$$

Si $E = (x_1,\, x_2 + P(x_1,x_3),\, x_3) \in \mathcal{E}_2$, le lemme 14 montre que $P = bx_3$, et on remarque que (F,G) étant normalisé, E_1 et E^{-1} commutent :

$$(x_1 + \phi_1(x_3), x_2, x_3) \circ (x_1, x_2 - bx_3, x_3) = (x_1, x_2 - bx_3, x_3) \circ (x_1 + \phi_1(x_3), x_2, x_3).$$

On a donc

$$\begin{aligned} G &= E_3 \circ E_2 \circ E_1 \circ E^{-1} \circ E \circ F \\ &= E_3 \circ (E_2 \circ E^{-1}) \circ E_1 \circ (E \circ F). \end{aligned}$$

Supposons enfin $E = (x_1,\, x_2,\, x_3 + P(x_1,x_2)) \in \mathcal{E}_3$. On a $\deg P(f_1,f_2) \leq \deg f_3$, or par le corollaire 13 on a $\deg f_1 > \deg f_3$, $\deg f_2 \neq \deg f_3$, donc $\deg P(f_1,f_2) < \deg f_1$. D'autre part comme par hypothèse G n'est pas une réduction $\mathcal{E}_3$ de F, on a $\mathbb{C}[f_1,f_2] \neq \mathbb{C}[g_1,g_2]$. Le lemme 15 donne alors $P(f_1,f_2) \in \mathbb{C}[f_2]$. Comme P est de degré au moins 1, on a $\deg f_2 < \deg f_3$, et donc par la proposition 9 $g_2 = f_2$, i.e $E_2 = \mathrm{id}$. Il existe $E_1' \in \mathcal{E}_1$ tel que $E_1 \circ E^{-1} = E^{-1} \circ E_1'$, et on obtient

$$\begin{aligned} G &= E_3 \circ E_1 \circ E^{-1} \circ E \circ F \\ &= (E_3 \circ E^{-1}) \circ E_1' \circ (E \circ F). \end{aligned}$$

□

6.2 Réduction du problème

On suppose la proposition 2 vraie pour tout F avec $\deg F < \mu$; on veut maintenant la prouver pour $\deg F = \mu$.

Au vu du lemme 25 on peut supposer que F admet une réduction élémentaire (F,G), que l'on peut prendre optimale par hypothèse de récurrence, avec $G \in \mathcal{A}$. Quitte à conjuguer par une permutation, on peut supposer qu'il s'agit d'une réduction $\mathcal{E}_3$. Autrement dit, $G = E_3 \circ F$ avec $E_3 = (x_1, x_2, x_3 + \phi_3(x_1,x_2))$. L'optimalité implique $(f_3 + \phi_3(f_1,f_2))^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_1,f_2]^{\mathrm{w}}$.

L'énoncé de la proposition 2 nous donne maintenant un élémentaire E tel que $\deg E \circ F \leq \deg F$. Si $E \in \mathcal{E}_3$, alors la conclusion est immédiate par le lemme 3(i). Sinon, quitte à conjuguer par la transposition $(1,2)$ on peut supposer $E_1 := E \in \mathcal{E}_1$. On note $E_1 = (x_1 + \phi_1(x_2,x_3), x_2, x_3)$.

La question est : $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & F = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{A} \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
 & & & E_1 \circ F = (f_1 + \phi_1(f_2, f_3), f_2, f_3) \in \mathcal{A}? \\
  \arrow[uu, "\mathrm{deg}"] & G = (f_1, f_2, f_3 + \phi_3(f_1, f_2)) \in \mathcal{A} & &
\end{tikzcd}$$

6.3 Conditions de victoire facile

Ce paragraphe repose essentiellement sur le §2 « Hypothèse de Récurrence ».

On a gagné si on montre que $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$. Voici diverses conditions qui mènent facilement à la victoire.

Lemme 26. *Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite.*

(i) $\phi_1(f_2, f_3) \in \mathbb{C}[f_2]$*;*

(ii) $f_1^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$ *ou* $f_3^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$*;*

(iii) $f_3^{\mathrm{w}} = f_1^{\mathrm{w}}$*;*

(iv) $2 \in I_F$*, et* $\phi_1(f_2, f_3) \in \mathbb{C}[f_3]$*;*

(v) $2 \in I_F$*, et* $f_1^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_3^{\mathrm{w}}]$ *ou* $f_2^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_3^{\mathrm{w}}]$.

Alors $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$.

Preuve. (i) Considérons l'automorphisme triangulaire $H = (x_1 + \phi_1(x_2), x_2, x_3 + \phi_3(x_1, x_2))$. On peut appliquer le lemme 3(iii).

(ii) Si $f_3^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$, on considère un automorphisme triangulaire de la forme $H = (x_1 + \phi_1(x_2, x_3), x_2, x_3 - c x_2^r)$, et de nouveau on peut appliquer le lemme 3(iii).

Si $f_1^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$, comme $I_F \setminus \{2\} \neq \emptyset$, on peut appliquer le lemme 3(iv) et obtenir $1 \in I_F$. Donc $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$ par le lemme 3(i).

(iii) Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\deg(f_3 + a f_1) = \deg(f_1 + \frac{f_3}{a}) < \deg f_3.$$

Donc l'automorphisme $(f_1, f_2, f_3 + a f_1)$ d'une part est dans $\mathcal{A}$ par le lemme 3(i), d'autre part est de degré $< \mu$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$(x_1 - \frac{x_3}{a}, x_2, x_3) \circ (f_1, f_2, f_3 + a f_1) = (-\frac{f_3}{a}, f_2, f_3 + a f_1) \in \mathcal{A}.$$

Par permutation, on en déduit que $(f_1 + \frac{f_3}{a}, f_2, f_3) \in \mathcal{A}$. Comme le degré de ce dernier automorphisme est $< \mu$, on a $1 \in I_F$, et donc $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$ par le lemme 3(i).

(iv) et *(v)* Si $2 \in I_F$, on peut appliquer les points précédents en changeant les rôles des indices 2 et 3. $\square$

6.4 Cas (A) et (B) : l'escalier du Toboggan

Si aucune des conditions du lemme 26 n'est satisfaite, on va devoir montrer que $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$ en ayant recours à la grosse artillerie, à savoir le Toboggan 16.

Le lemme suivant distingue deux cas, qui seront traités dans les deux paragraphes suivants. Noter que les deux cas ne sont pas tout à fait symétriques; en particulier c'est seulement dans le cas (A) qu'apparaîtra la nécessité d'introduire une réduction **K**.

Lemme 27. *Supposons qu'aucune des conditions (i-v) du lemme 26 n'est satisfaite. On est alors dans l'un des deux cas suivants (où $\{1,2,3\} = \{i,j,3\}$ ou $\{i,j,1\}$ dans les cas (A) et (B) respectivement) :*

(A) *f_3 n'est pas la composante f_j de plus haut degré, et $f_j^{\mathrm{w}}, f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$.*

(B) *f_1 n'est pas la composante f_j de plus haut degré; $f_j^{\mathrm{w}}, f_1^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$; et $\phi_1(f_2, f_3) \notin \mathbb{C}[f_i]$.*

Preuve. Supposons $j = 1$. Le lemme 26(ii) assure que $f_1^{\mathrm{w}}, f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$. On est donc dans le cas (A).

Supposons $j = 3$. Le lemme 26(ii) assure que $f_1^{\mathrm{w}}, f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$, et le lemme 26(i) assure que $\phi_1(f_2, f_3) \notin \mathbb{C}[f_2]$. On est donc dans le cas (B).

Supposons finalement $j = 2$.

Premier sous-cas : $f_2^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_1^{\mathrm{w}}]$. On prouve $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_1^{\mathrm{w}}]$, on sera ainsi dans le cas (A). En effet si $f_3^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_1^{\mathrm{w}}]$, alors $f_3^{\mathrm{w}} = (f_1^{\mathrm{w}})^p$ avec $p > 1$ par le lemme 26(iii). On vérifie que $f_3, f_2, \phi_1(f_2, f_3)$ satisfont les hypothèses du corollaire 7(iv). On en déduit que $\deg \phi_1(f_2, f_3) > \frac{1}{2} \deg f_3 \geq \deg f_1$: contradiction.

Deuxième sous-cas : $f_2^{\mathrm{w}} \in \mathbb{C}[f_1^{\mathrm{w}}]$. Alors on applique le lemme 3(iv) pour obtenir $2 \in I_F$. Le lemme 26(iv) et (v) implique qu'on est dans le cas (B). $\square$

6.5 Du bon usage du Toboggan : piste (A)

On suppose qu'on est dans le cas (A) du lemme 27.

Il est facile de voir que le couple formé de (f_j, f_i, f_3) et $(f_j, f_i, f_3 + \phi_3(f_1, f_2))$ satisfait les conditions (**K**1-4). Seule la condition (**K**4)(ii) n'est pas complètement évidente, à savoir $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_j^{\mathrm{w}}, f_i^{\mathrm{w}}]$: il faut se souvenir que $\deg f_j > \deg f_3$ et que par (A), $f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$.

On montre maintenant que (f_j, f_i, f_3) et $(f_j, f_i, f_3 + \phi_3(f_1, f_2))$ satisfont également la condition (**K**<). Autrement dit on veut établir l'inégalité

$$\deg(f_3 + \phi_3(f_1, f_2)) < \Delta(f_j, f_i) = \deg f_j - \deg f_i + \deg df_1 \wedge df_2.$$

Prouvons cette inégalité par l'absurde, à l'aide du Toboggan. On suppose donc :

(A) f_3 n'est pas la composante f_j de plus haut degré, et $f_j^{\mathrm{w}}, f_3^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$;

(non K<) $\deg(f_3+\phi_3(f_1,f_2)) \geq \Delta(f_j,f_i) = \deg f_j - \deg f_i + \deg df_1 \wedge df_2$

On en déduit qu'on est dans les hypothèses du Toboggan 16:

(i) $\deg f_j = s\delta$;

(ii) $\deg f_i = 2\delta$;

(iii) $\Delta(f_j,f_i) \leq \deg(f_3+\phi_3(f_1,f_2)) < s\delta$;

(iv) $(f_3+\phi_3(f_1,f_2))^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_2^{\mathrm{w}}]$.

C'est facile : (i) et (ii) découlent du corollaire 7(iv); (iii) est alors immédiate à partir de (non **K**<); (iv) découle de l'optimalité de ϕ_3.

Ainsi on glisse et $G = (f_j, f_i, f_3+\phi_3(f_1,f_2))$ admet une réduction $\mathcal{E}_3$: ceci viendrait contredire l'optimalité de la réduction $(f_1, f_2, f_3+\phi_3(f_1,f_2))$.

Finalement, $(f_j, f_i, f_3+\phi_3(f_1,f_2))$ est une réduction **K** (normalisée, puisque c'est aussi une réduction $\mathcal{E}_3$) de (f_j, f_i, f_3). Le lemme 25 implique alors que $E_1 \circ F$ est dans $\mathcal{A}$.

6.6 Du bon usage du Toboggan : piste (B)

On suppose qu'on est dans le cas (B) du lemme 27.

On a $\{i,j\} = \{2,3\}$. Comme $\deg \phi_1(f_2,f_3) \leq \deg f_1 < \deg f_j$ et que d'après (B), $\phi_1(f_2,f_3) \notin \mathbb{C}[f_i]$, on obtient

$$\deg \phi_1(f_2,f_3) < \deg^{\mathrm{virt}} \phi_1(f_2,f_3).$$

On est dans les hypothèses du corollaire 7(iv); ainsi il existe un degré δ et un entier impair $s \geq 3$ tel que $\deg f_i = 2\delta$, $\deg f_j = s\delta$ et

$$(s-2)\delta + \deg df_2 \wedge df_3 \leq \deg \phi_1(f_2,f_3) \leq \deg f_1 < \deg f_j = s\delta.$$

Comme par (B), $f_1^{\mathrm{w}} \notin \mathbb{C}[f_i^{\mathrm{w}}]$, on obtient que (f_j, f_i, f_1) satisfait les hypothèses du Toboggan 16.

Ainsi on glisse et (f_j, f_i, f_1) admet une réduction $\mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{A}$; en conséquence (f_1, f_2, f_3) admet une réduction $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{A}$. Par le lemme 3(i), ceci implique $E_1 \circ F \in \mathcal{A}$.

7 Cerise sur le gâteau

Il est maintenant facile de montrer que l'automorphisme de Nagata

$$F = (x_1 + 2x_2(x_2^2 - x_1x_3) + x_3(x_2^2 - x_1x_3)^2,\ x_2 + x_3(x_2^2 - x_1x_3),\ x_3)$$

n'est pas modéré.

On a $\deg f_1 = (2,0,3)$, $\deg f_2 = (1,0,2)$ et $\deg f_3 = (0,0,1)$.

D'une part, si F admettait une réduction **K**, par la proposition 9 l'un des degrés des f_i devrait être de la forme 2δ : ce n'est pas le cas.

D'autre part, si F admettait une réduction élémentaire, alors l'un des degrés devraient être une $\mathbb{N}$-combinaison des 2 autres (car ils sont deux à deux $\mathbb{N}$-indépendants). Il est clair que ce n'est pas le cas.

En conséquence, F n'est pas dans $\mathcal{A}$, donc non modéré.

Références

[1] Kuroda S. – A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality. *J. Math. Soc. Japan*, vol. 60, n2, 2008, pp. 495–510.

[2] Kuroda S. – Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, vol. 45, n3, 2009, pp. 907–917.

[3] Kuroda S. – Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism. *Tohoku Math. J. (2)*, vol. 62, n1, 2010, pp. 75–115.

[4] Shestakov I. P. et Umirbaev U. U. – Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 17, n1, 2004, pp. 181–196 (electronic).

[5] Shestakov I. P. et Umirbaev U. U. – The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 17, n1, 2004, pp. 197–227 (electronic).

[6] Vénéreau S. – A parachute for the degree of a polynomial in algebraically independent ones. *To appear in Math. Ann.*, arXiv:0704.1561v2, 2007.

Annexe : iconographie

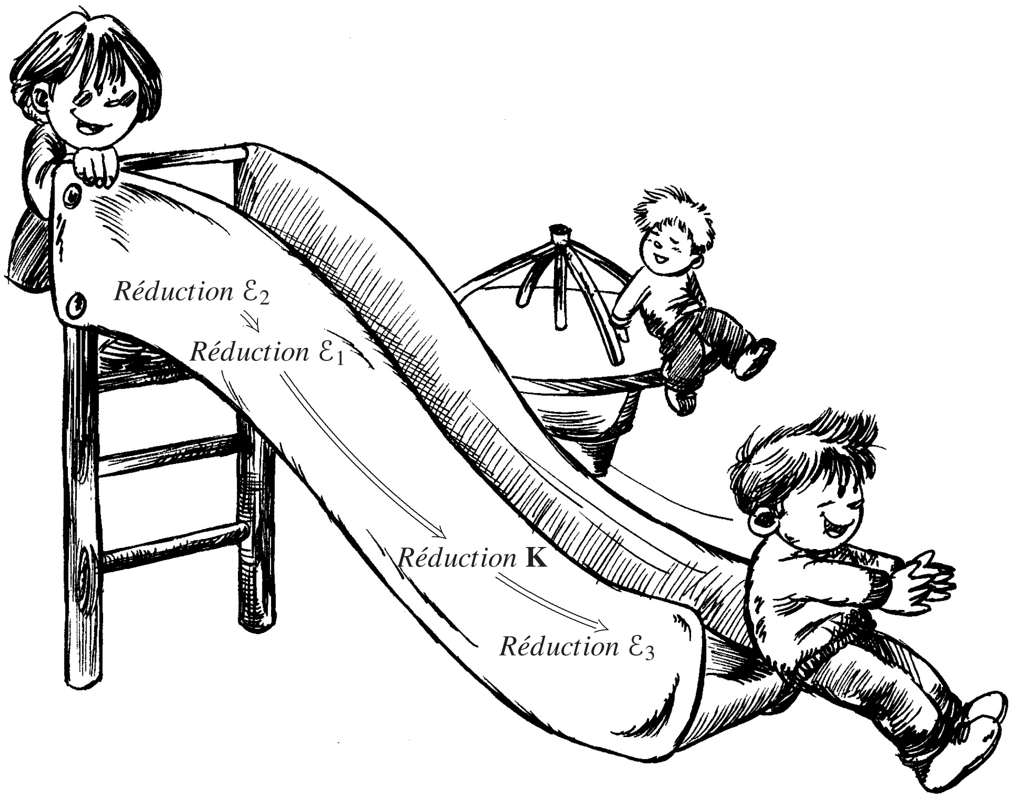

Figure 1: Plan de la preuve du Toboggan 16. La longue glissade Réduction $\mathcal{E}_1 \Longrightarrow$ Réduction **K** correspond à la proposition 17, et constitue le point technique délicat de l'article.

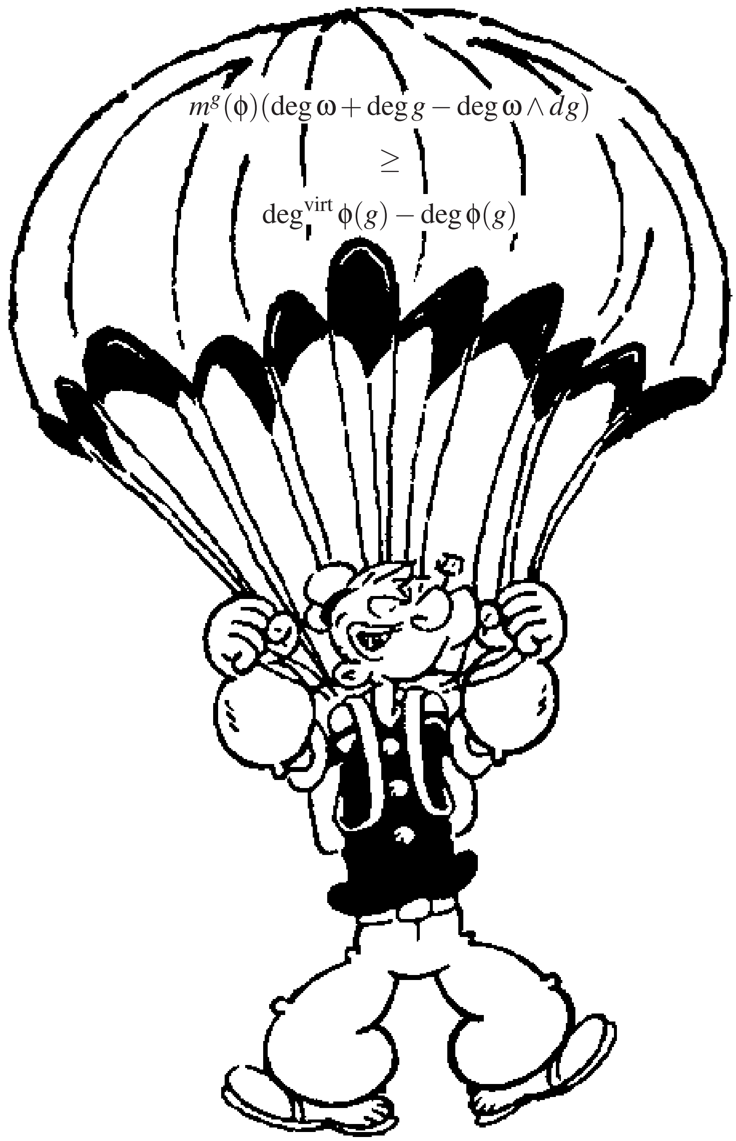

Figure 2: Le Super Parachute. Le terme « parachute » est une marque déposée de S. Vénéreau : voir [6] où une inégalité similaire est démontrée, dont le lecteur aura remarqué qu'elle garantit que le degré réel ne chute pas trop par rapport au degré virtuel...

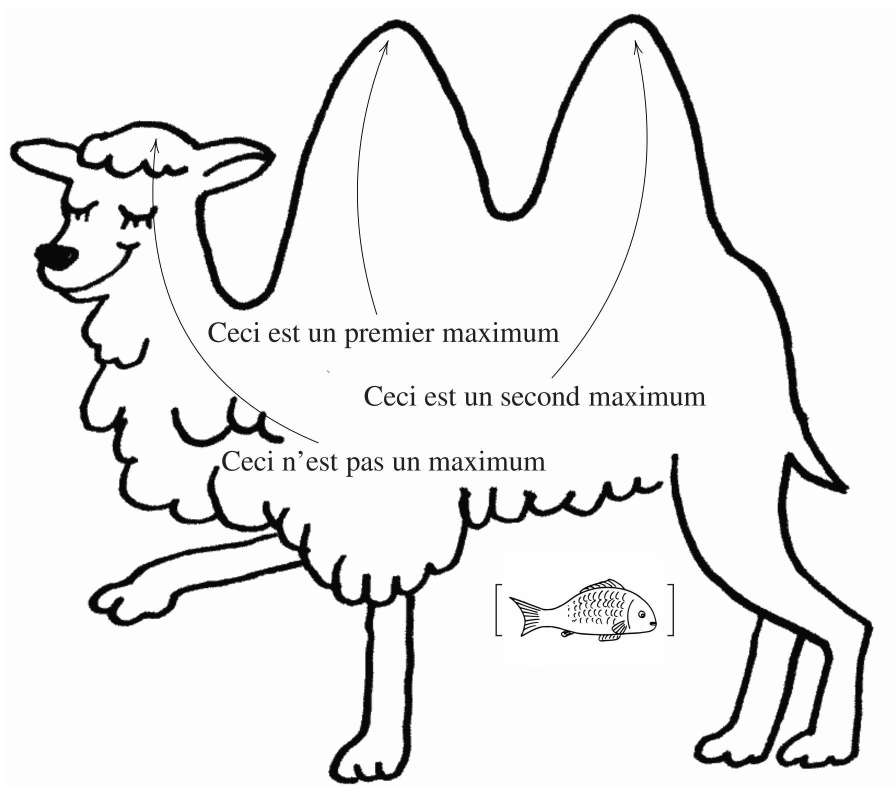

Figure 3: Le Principe des Deux Maximums 8. Une façon de prouver le Principe est d'utiliser un crochet de Lie, dans l'esprit du crochet de Poisson de Shestakov et Umirbaev : voir annexe suivante.

Annexe : preuve alternative du Principe des Deux Maximums

La preuve du Principe des Deux Maximums 8 est pratiquement le seul endroit où le formalisme des crochets de Poisson de Shestakov-Umirbaev semble apporter une simplification notable par rapport au formalisme des formes utilisé par Kuroda. Je propose ci-dessous une définition qui englobe les deux points de vue, puis je donne la preuve du Principe suivant [4, Lemma 5].

7.1 Un crochet

Considérons $T^*\mathbb{C}^3$ l'espace des 1-formes algébriques $\sum f_i dg_i$ où $f_i, g_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, et

$$\mathcal{T} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} (T^*\mathbb{C}^3)^{\otimes p}$$

l'algèbre associative des puissances tensorielles de $T^*\mathbb{C}^3$.

Soient $\omega, \nu \in \mathcal{T}$. On définit un crochet de Lie suivant le procédé standard en posant :

$$[\omega, \nu] = \omega \otimes \nu - \nu \otimes \omega.$$

En particulier, si df, dg sont des 1-formes,

$$[df, dg] = df \otimes dg - dg \otimes df = df \wedge dg.$$

Si $\omega \in \mathcal{T}$ et f est une fonction :

$$[\omega, f] = f\omega - f\omega = 0.$$

7.2 Identité de Jacobi

Le fait que le crochet vérifie bien l'identité de Jacobi est facile à vérifier :

Proposition 28. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{T}$. *Alors*

$$[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
[[\alpha, \beta], \gamma] &= \alpha \otimes \beta \otimes \gamma - \beta \otimes \alpha \otimes \gamma - \gamma \otimes \alpha \otimes \beta + \gamma \otimes \beta \otimes \alpha; \\
[[\beta, \gamma], \alpha] &= \beta \otimes \gamma \otimes \alpha - \gamma \otimes \beta \otimes \alpha - \alpha \otimes \beta \otimes \gamma + \alpha \otimes \gamma \otimes \beta; \\
[[\gamma, \alpha], \beta] &= \gamma \otimes \alpha \otimes \beta - \alpha \otimes \gamma \otimes \beta - \beta \otimes \gamma \otimes \alpha + \beta \otimes \alpha \otimes \gamma;
\end{aligned}$$

Chacune des 6 permutations possibles apparaît deux fois, avec des signes différents. □

7.3 Preuve du Principe

La preuve repose sur la remarque :

Lemme 29. *Soient* $f, g, h \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. *Alors*

$$\deg\left[[df, dg], dh\right] = \deg h + \deg df \wedge dg.$$

Preuve. On a

$$dh = \sum_k \frac{\partial h}{\partial x_k} dx_k$$

et

$$[df, dg] = df \wedge dg = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Ainsi

$$[[df, dg], dh] = \sum_{\substack{i<j \\ k}} \frac{\partial h}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [dx_i \wedge dx_j, dx_k];$$

d'où le résultat. □

Comme

$$[[df, dg], dh] + [[dg, dh], df] + [[dh, df], dg] = 0,$$

les termes dominants doivent se compenser et en particulier le maximum des degrés est réalisé au moins deux fois : c'est la preuve du Principe des Deux Maximums 8 en trois lignes de Shestakov et Umirbaev.

Annexe : Exemples de réductions K

Étant donné $F=(f_1,f_2,f_3)$ un automorphisme, rappelons qu'une réduction **K** normalisée de F est un automorphisme $G=(g_1,g_2,g_3)$ de la forme

$$G=(f_1+af_3^2+cf_3, f_2+bf_3, f_3+\phi_3(g_1,g_2)).$$

Une lecture attentive de la preuve révèle qu'une grande partie des problèmes techniques provient de la possibilité d'une telle réduction avec $a\neq 0$. Il est à noter qu'on ne dispose d'aucun exemple d'une telle réduction, et qu'on peut légitimement douter de leur existence. Cela revient exactement au problème de l'existence des réductions de type II ou III, dans la terminologie de Shestakov et Umirbaev. A noter également qu'il suffirait de répondre par la négative à la question suivante pour régler cette question (voir [2, Question 4.1]) :

Question 30. Existe-t-il un automorphisme $F=(f_1,f_2,f_3)$ tel que $\deg(f_1^3+f_2^2)<\deg f_1$?

D'autre part, il existe bien des réductions **K** avec $a=0, c\neq 0$, qui correspondent à des réductions de type I dans la terminologie de Shestakov et Umirbaev. En particulier il existe des automorphismes modérés n'admettant aucune réduction élémentaire. Je donne ci-dessous de tels exemples : ce sont les exemples décrits par Kuroda dans [2], mais présentés légèrement différemment.

7.4 Exemple avec $s=3$

Soient

$$\begin{aligned} E_3 &= (x_1, x_2, x_3+x_1^2-x_2^3)\in\mathcal{E}_3,\\ H &= (x_1+\alpha x_2x_3+x_3^3, x_2+x_3^2, x_3). \end{aligned}$$

Il est clair que dans la composition $E_3\circ H$ les monômes de degré 6 se compensent, mais en choisissant $\alpha=\frac{3}{2}$ on peut également faire en sorte que ce soit le cas pour les monômes de degré 5 :

$$E_3\circ H=\left(x_1+\tfrac{3}{2}x_2x_3+x_3^3, x_2+x_3^2, x_3+x_1^2-x_2^3+3x_1x_2x_3+x_3^2(2x_1x_3-3x_2^2)\right).$$

Considérons maintenant un automorphisme triangulaire préservant le polynôme $2x_1x_3-3x_2^2$ qui apparaît en facteur :

$$T=(x_1, x_2+x_1^2, x_3+3x_1x_2+\tfrac{3}{2}x_1^3).$$

On constate que l'automorphisme $E_3\circ H\circ T$ admet pour degré de ses composantes :

$$(9,0,0),\ (6,0,0),\ (7,0,1);$$

et c'est encore le cas en composant à gauche par un automorphisme linéaire

$$E_1 = (x_1 + cx_3, x_2, x_3).$$

Finalement, $G = H \circ T$, dont les degrés des composantes sont

$$(9,0,0),\ (6,0,0),\ (3,0,0),$$

est une réduction **K** de $F = E_1 \circ E_3 \circ H \circ T$. Suivant les notations de la proposition 9, on a $s = 3$ et $\delta = (3,0,0)$.

7.5 Exemple avec $s = 5$

On peut appliquer la même stratégie pour produire des exemples avec $s \geq 3$ impair arbitraire. Je me contente ici d'indiquer la construction pour $s = 5$.

Soient

$$\begin{aligned} E_3 &= (x_1, x_2, x_3 + x_1^2 - x_2^5) \in \mathcal{E}_3, \\ H &= (x_1 + \alpha x_2^2 x_3 + \beta x_2 x_3^3 + x_3^5, x_2 + x_3^2, x_3). \end{aligned}$$

Noter que $\alpha x_2^2 x_3 + \beta x_2 x_3^3 + x_3^5$ est homogène de degré 5, en considérant x_3 de poids 1 et x_2 de poids 2. En choisissant $\alpha = \frac{15}{8}$, $\beta = \frac{5}{2}$, on fait chuter au maximum le degré de la composition :

$$E_3 \circ H = \left(x_1 + \frac{15}{8} x_2^2 x_3 + \frac{5}{2} x_2 x_3^3 + x_3^5, x_2 + x_3^2, x_3 + \frac{x_3^4}{8}(16x_1x_3 - 5x_2^3) + \cdots \right).$$

Considérons un automorphisme triangulaire préservant le polynôme $16x_1x_3 - 5x_2^3$:

$$T = \left(x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{15x_1x_2^2 + 15x_1^3x_2 + x_1^5}{16} \right).$$

On constate que l'automorphisme $E_3 \circ H \circ T$ admet pour degré de ses composantes :

$$(25,0,0),\ (10,0,0),\ (20,3,0);$$

et c'est encore le cas en composant à gauche par un automorphisme linéaire

$$E_1 = (x_1 + cx_3, x_2, x_3).$$

Finalement, $G = H \circ T$, dont les degrés des composantes sont

$$(25,0,0),\ (10,0,0),\ (5,0,0),$$

est une réduction **K** de $F = E_1 \circ E_3 \circ H \circ T$. Suivant les notations de la proposition 9, on a $s = 5$ et $\delta = (5,0,0)$.

Annexe : Lexique Lamy - Kuroda

Vocabulaire

Lamy	Kuroda
$\mathbb{C}$	k
$E \circ F$	$F \circ E$
conditions **K**	weak Shestakov-Umirbaev conditions
conditions **K** normalisées	Shestakov-Umirbaev conditions
$\deg^{\text{virt}} \phi(f,g)$	$\deg^S \phi$ where $S = \{f,g\}$

Numérotation

Lamy	Kuroda
Théorème 1	Theorem 2.1, p. 78
Proposition 2	Proposition 6.2, p. 100
Lemme 3	Claim 1, p. 101
Lemme 4	Remark after Theorem 3.1, p. 80
Super Parachute 5	Theorem 3.1, p. 80
Lemme 6	first assertion of Lemma 3.2, p. 80
Corollaire 7	Lemmas 3.2 and 3.3, p. 80-82
Principe des Deux Maximums 8	Theorem 3.4, p. 83
Proposition 9	Properties (P1, P2, P3), p. 85
Lemme 10	last inequality of (P12), p.85
Proposition 11	(P12), p. 85
Corollaire 12	Proposition 5.1(iv), p.93
Corollaire 13	(P5) and (P6), p.85
Proposition 14	(P9), p.85
Proposition 15	(P10), p.85
Toboggan 16	Proposition 6.3, p. 101
Proposition 17	Proposition 5.4, p. 95
Fait 18	First § of the proof of Proposition 5.4
Fait 19	Equation (5.8), p. 97
Fait 20	Equation (5.9), p. 97
Fait 21	Equation (5.10), p. 97
Fait 22	Equation (5.11), p. 97
Fait 23	Equations (i), (ii), (iii), end of p. 97
Fait 24	Last § of the proof of Proposition 5.4
Lemme 25	Claim 2 and Proposition 4.4(i), p.91
Lemme 26	Claims 3 and 4, p. 104
Lemme 27	Claim 6, p. 106