THÉORÈME DE CASTELNUOVO (D'APRÈS [KSC04])

STÉPHANE LAMY

Notes pour un exposé BirPol donné en octobre 2014.

1. Le groupe de Cremona

On travaille sur $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos. Le **groupe de Cremona** est le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ des applications birationnelles $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Le but de ces notes est de donner une preuve d'un résultat classique de Castelnuovo, qui décrit des générateurs du groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. On suit essentiellement [KSC04], avec quelques modifications. Voici tout d'abord quelques exemples de telles transformations, au travers de sous-groupes naturels :

1. Le groupe PGL_3 correspond au sous-groupe des éléments biréguliers (i.e, sans point d'indétermination) de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

2. Le groupe $\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$ est la composante neutre du groupe des automorphismes biréguliers de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ainsi pour tout choix d'application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ vers $\mathbb{P}^2$, $\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

3. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{k}(y)) \rtimes \mathrm{PGL}_2$ peut aussi être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$: dans une carte affine de coordonnées (x, y) on a

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\alpha(y)x + \beta(y)}{\gamma(y)x + \delta(y)}, \frac{ay + b}{cy + d} \right).$$

Ces transformations sont appelées **de Jonquières**, elles correspondent aux transformations préservant un pinceau de droite (dans notre choix de coordonnées, c'est le pinceaux des droites $y =$ constante).

4. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ vu comme groupe des transformations monomiales (à nouveau un choix de carte affine ayant été fait) :

$$(x, y) \mapsto (x^a y^b, x^c y^d).$$

5. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{k}^2)$ des automorphismes polynomiaux du plan affine.

2. Surfaces de Hirzebruch

On appelle **surface de Hirzebruch** une surface munie d'un morphisme vers $\mathbb{P}^1$ dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$. On note $\mathbb{F}_n$, $n \geq 1$, une surface de Hirzebruch possédant une section s d'auto-intersection $-n$, dite section exceptionnelle. Une telle section est l'unique courbe irréductible d'auto-intersection négative, en effet si f est la classe d'une fibre, toute autre courbe est équivalente à $af + ds$ pour certains $a, d \in \mathbb{Z}$, et on a

$$(af + ds) \cdot f = d \geq 0 \text{ et } (af + ds) \cdot s = a - nd \geq 0$$

d'où

$$(af + ds)^2 = 2ad - nd^2 = ad + d(a - nd) \geq 0.$$

On note $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, où la notation $\mathbb{F}_0$ implique en plus le choix d'un des deux réglages qui joue le rôle de la fibre f, tandis que n'importe quel règle de l'autre joue le rôle de la section s. On a donc dans tous les cas

$$f \cdot f = 0, \; s \cdot s = -n \text{ et } f \cdot s = 1.$$

On admet qu'il existe une seule classe d'isomorphie de surface $\mathbb{F}_n$ pour chaque $n \geq 0$. Par contre il est facile de les construire toutes à partir de la remarque suivante :

1. L'éclatement de $\mathbb{P}^2$ produit $\mathbb{F}_1$.

2. Une transformation élémentaire sur une $\mathbb{F}_n$ (éclater un point, contracter une fibre) fait changer l'indice d'un (en plus ou moins suivant si le point éclaté est sur la section exceptionnelle ou pas).

3. Énoncés

Le théorème principal de cette note est :

Théorème 1 (voir [KSC04, Theorem 2.24 p.51])**.** *Toute transformation birationnelle $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ se ramène à un automorphisme linéaire par une composition des 4 types suivants de transformations :*

1. *Un éclatement $\pi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$;*
2. *Une transformation élémentaire $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n\pm1}$;*
3. *L'inverse d'un éclatement $\pi^{-1}\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$;*
4. *L'involution $\tau\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ échangeant les deux facteurs.*

Il s'agit donc d'un théorème de factorisation des transformations de $\mathbb{P}^2$ via des transformations élémentaires mettant en jeu d'autres surfaces : c'est un point de vue moderne qui se généralise en dimension supérieure dans ce qu'on appelle souvent le programme de Sarkisov. A partir du théorème précédent on peut extraire le résultat suivant qui remonte à Castelnuovo (1901) :

Corollaire 2 (Castelnuovo [Cas01])**.** *Toute transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ est une composition de transformations de Jonquières et d'automorphismes linéaires.*

Preuve. Tout d'abord une transformation élémentaire suivie de τ

$$\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0 \to \mathbb{F}_0$$

peut se réécrire

$$\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0$$

grâce au diagramme commutatif de la figure 1. Ainsi dans le théorème 1 on peut se passer de l'involution τ.

Maintenant une transformation admettant une factorisation de la forme

$$\mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$$

est de Jonquières (à automorphisme linéaire près au but, pour identifier les points éclatés sur les $\mathbb{P}^2$ à la source et au but). □

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl] \arrow[dr] & & = & & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{F}_1 \arrow[drrr] & & \mathbb{F}_0 \arrow[rr, "\tau"] & & \mathbb{F}_0 & & \mathbb{F}_1 \arrow[dlll] \\
& & & \mathbb{P}^2 & & &
\end{tikzcd}$$

Figure 1

La motivation de Castelnuovo pour obtenir ce résultat était d'en déduire ensuite une preuve complète du théorème de Noether :

Théorème 3 (Noether)**.** *Toute transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ est une composition de transformations quadratiques (générales) et linéaires.*

La preuve de Castelnuovo consiste à réduire le problème à la factorisation des automorphismes de Jonquières. Mais en fait la preuve pour les automorphismes de Jonquières est à peine plus simple que la preuve dans le cas général, comme l'a remarqué un peu plus tard Alexander (1915). Dans ces notes je me concentre sur le théorème 1, et ne fait pas la réduction pour obtenir le théorème de Noether (on pourra consulter [KSC04], voire lire directement la courte note d'Alexander, qui court-circuite complètement l'étape Jonquières, ou mieux, les notes d'Anne Lonjou qui modernise la présentation d'Alexander).

4. Degré et multiplicités

On définit ici les invariants qui vont permettre une preuve par récurrence du théorème.

Considérons $\varphi\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation birationnelle, où $S = \mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{F}_n$ pour un certain n. La transformation φ correspond à un système linéaire $|H_S|$ sur S (transformé du système $|H|$ des droites au but) :

1. Si $S = \mathbb{P}^2$, $H_S \subset |d\ell|$, où ℓ est la classe d'une droite et $d \geq 1$, le cas $d = 1$ correspondant à un automorphisme.
2. Si $S = \mathbb{F}_n$, $H_S \subset |af + ds|$, où $d \geq 1$ et $a \geq nd$ (considérer l'intersection avec s, qui est positive).

Avec ces notations, on définit le **degré** (« degré de Sarkisov ») de φ comme suit :

1. Si $S = \mathbb{P}^2$, $\deg \varphi = d/3$;
2. Si $S = \mathbb{F}_n$, $\deg \varphi = d/2$.

Interprétation de la définition : « degré usuel de H_S normalisé par le canonique » :

1. Si $S = \mathbb{P}^2$, $\deg \varphi = \frac{H_S \cdot \ell}{-K_S \cdot \ell}$;
2. Si $S = \mathbb{F}_n$, $\deg \varphi = \frac{H_S \cdot f}{-K_S \cdot f}$.

Remarquons que l'ensemble des degrés possibles est discret (contenu dans $\frac{1}{6}\mathbb{N}$), le degré minimal étant $\frac{1}{3}$ qui correspond au cas d'un automorphisme de $\mathbb{P}^2$. Il semble donc raisonnable de tenter une récurrence. A noter que dès la dimension 3 on peut faire des définitions analogues mais on tombe sur un invariant dont il n'est plus du tout clair qu'il vit dans un sous-ensemble discret des rationnels ; une difficulté est alors de montrer que l'analogue de l'algorithme qu'on va décrire maintenant dans le cas des surfaces s'arrête un jour...

Par ailleurs, considérons une résolution de φ par une suite d'éclatements de points p_i, chacun correspondant à un point de multiplicité $m_i \geq 1$ du système linéaire H_S.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr] & \\ S \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Alors

$$K_M = \pi^* K_S + \sum_i a_i E_i$$

$$H_M = \pi^* H_S + \sum_i b_i E_i$$

$$K_M + \frac{1}{\deg \varphi} H_M = \pi^* \left(K_S + \frac{1}{\deg \varphi} H_S \right) + \sum_i \lambda_i E_i$$

avec $\lambda_i = a_i - \dfrac{b_i}{\deg \varphi}$. Observons que la condition $a_i \deg \varphi - bi < 0$ équivaut à $\deg \varphi < \frac{b_i}{a_i}$.

Lemme 4. 1. *Si p_j est infiniment proche de p_i, alors $\frac{b_j}{a_j} < \frac{b_i}{a_i}$.*

2. *Si p_i est un point base propre, alors $a_i = 1$ et $b_i = m_i$, ainsi $\frac{b_i}{a_i}$ est la multiplicité usuelle du point p_i.*

Preuve. Découle de l'exo 5. □

Exo 5. Soit $S = \mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{F}_n$, et $\varphi\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation birationnelle. Supposons que p_1, p_2 sont deux points bases de φ, avec p_2 infiniment proche de p_1 (c'est-à-dire que p_2 est un point du diviseur exceptionnel E_1 produit en éclatant p_1). Soit m_1, m_2 les multiplicités respectives de p_1 et p_2. Montrer que $m_1 \geq m_2$ (on a utilisé implicitement ce fait dans la preuve du théorème).

Solution : m_1 s'interprète comme $H \cdot E_1$, qui est égal à une somme d'intersections locales dont $(H \cdot E_1)_{p_2}$, et cette dernière est plus grande ou égale à m_2.

5. C'est pas nef

Rappelons qu'un diviseur D (éventuellement avec des coefficients dans $\mathbb{Q}$, on parle de $\mathbb{Q}$-diviseur) est dit **nef** si $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C.

Lemme 6. *Le diviseur $K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S$ est non nef si et seulement si on est dans l'une des situations suivantes :*

1. *$S = \mathbb{F}_0$, et $H_S \subset |af + ds|$ avec $a < d$;*
2. *$S = \mathbb{F}_1$, et $H_S \subset |af + ds|$ avec $a/3 < d/2$.*

Preuve. Tout d'abord observons que si $S = \mathbb{P}^2$ alors $K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S$ est trivial et donc en particulier nef : on peut donc se restreindre au cas $S = \mathbb{F}_n$. Notons comme précédemment f et s une fibre et la section exceptionnelle de $\mathbb{F}_n$. Par adjonction on a

$$K_S \cdot s = -2 - s^2 = n - 2.$$

En particulier si $n \geq 2$ on a

$$\left(K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S\right) \cdot f = 0;$$
$$\left(K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S\right) \cdot s \geq 0;$$

et $K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S$ est nef (car toute courbe sur $\mathbb{F}_n$ est équivalente à $af + bs$ avec $a, b \geq 0$). Donc la condition $K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S$ non nef équivaut à $n = 0$ ou $n = 1$, avec

$$\left(K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S\right) \cdot s < 0,$$

que l'on peut réécrire

$$H_S \cdot s < -\frac{d}{2} K_S \cdot s.$$

Si $n = 0$, on a $H_S \cdot s = (af + ds) \cdot s = a$ et $K_S \cdot s = -2$, on obtient $a < d$.
Si $n = 1$, on a $H_S \cdot s = (af + ds) \cdot s = a - d$ et $K_S \cdot s = -1$, on obtient $\frac{a}{3} < \frac{d}{2}$. □

6. C'est nef

Lemme 7. *Soit $S = \mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{F}_n$, et $\varphi\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation birationnelle, associée à un système linéaire H_S. Supposons que φ ne soit pas un isomorphisme, et que $K_S + \frac{1}{\deg\varphi} H_S$ soit nef. Alors H_S admet au moins un point de multiplicité strictement supérieur à $\deg\varphi$.*

Preuve. Considérons une résolution

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ S \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Soit ℓ une droite générale du $\mathbb{P}^2$ au but. Comme φ n'est pas un isomorphisme, on a

$$\deg\varphi > \frac{1}{3} = \frac{H \cdot \ell}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot \ell},$$

ce qui se réécrit

$$0 > \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\deg\varphi}H\right)\cdot\ell.$$

Par ailleurs, en notant respectivement E_i, E'_j les diviseurs exceptionnels de π, π' :

$$\begin{aligned} K_M + \frac{1}{\deg\varphi}H_M &= \pi^*\left(K_S + \frac{1}{\deg\varphi}H_S\right) + \sum_i \left(a_i - \frac{b_i}{\deg\varphi}\right)E_i \\ &= \pi'^*\left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\deg\varphi}H\right) + \sum_j \star E'_j. \end{aligned}$$

Comme ℓ est générale on a $E_i\cdot\ell \geq 0$ pour tout i, et $E'_j\cdot\ell = 0$ pour tout j. Comme en regroupant on obtient

$$0 > \mathrm{nef}\cdot\ell + \sum_i \left(a_i - \frac{b_i}{\deg\varphi}\right)E_i\cdot\ell,$$

on conclut que l'un au moins des coefficients $\left(a_i - \frac{b_i}{\deg\varphi}\right)$ est strictement négatif. Par le lemme 4 on peut supposer que le coefficient correspond à un point base propre, ce qui implique $a_i = 1$, $b_i = m_i$ et finalement $m_i > \deg\varphi$. □

A titre de curiosité, comparons avec les preuves miraculeuses données dans [KSC04] :

Preuve à l'ancienne. Premier cas : $S = \mathbb{P}^2$.

En comparant l'auto-intersection et l'intersection avec le canonique d'un élément de H_S sur $\mathbb{P}^2$ et sur une résolution de φ, on obtient

$$\begin{aligned} \sum m_i^2 &= d^2 - 1; \\ \sum m_i &= 3d - 3. \end{aligned}$$

Supposons que les m_i sont tous $\leq d/3$, alors

$$d^2 - 1 = \sum m_i^2 \leq \frac{d}{3}\sum m_i = d^2 - d$$

qui vient contredire $d > 1$ (car φ n'est pas un isomorphisme).

Deuxième cas : $S = \mathbb{F}_n$.

Dans ce cas

$$\begin{aligned} H_S^2 &= (af + ds)^2 = 2ad - nd^2; \\ K_{\mathbb{P}^2}\cdot H_S &= (af + ds)((-2-n)f - 2s) = -2d - nd - 2a + 2nd. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum m_i^2 &= H_S^2 - 1 = d(2a - nd) - 1; \\ \sum m_i &= -K_S\cdot H_S - 3 = 2(a + d) - nd - 3. \end{aligned}$$

Supposons les m_i tous $\leq d/2$, alors

$$d(2a - nd) - 1 = \sum m_i^2 \leq \frac{d}{2}\sum m_i = d(a + d) - nd^2/2 - 3d/2.$$

Comme $d \geq 1$, on a $1 - 3d/2 < 0$ et donc

$$d(2a - nd) < d(a + d) - nd^2/2.$$

En simplifiant par d et en regroupant les a :

$$\frac{a}{2+n} < \frac{d}{2}.$$

Comme par ailleurs $nd \leq a$, on obtient $n < n/2 - 1$, soit $n < 2$.

Si $n = 0$, on a $a < d$.

Si $n = 1$, on a $a/3 < d/2$. □

Lemme 8. *Soit* $\varphi\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *une transformation birationnelle, associée à un système linéaire* H_S*. Supposons que* H_S *admette un point* p *de multiplicité plus grande que le degré de* φ*.*

1. *Si* $S = \mathbb{P}^2$*, alors le degré de* $\varphi \circ \pi$ *est strictement inférieur au degré de* φ*, où* $\pi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ *est l'éclatement de* p *;*
2. *Si* $S = \mathbb{F}_n$*, alors les degrés de* φ *et* $\varphi \circ \alpha^{-1}$ *sont égaux, où* $\alpha\colon \mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n\pm1}$ *est la transformation élémentaire associée à* p*. De plus dans ce cas la somme des multiplicités associées à la résolution de* $\varphi \circ \alpha^{-1}$ *est strictement inférieure à la somme correspondante pour* φ*.*

Preuve. Si $S = \mathbb{P}^2$, le système H'_S sur $\mathbb{F}_1$ correspond à $\pi^* d\ell - mE$. D'autre part la classe d'une fibre sur $\mathbb{F}_1$ est donnée par $f = \pi^*\ell - E$, et donc

$$\deg H'_S = \frac{H'_S \cdot f}{2} = \frac{d-m}{2} < \frac{3d-d}{6} = \frac{d}{3} = \deg H_S.$$

Si $S = \mathbb{F}_n$ la transformation élémentaire α est un isomorphisme au voisinage d'une fibre générale f et donc

$$\deg H'_S = \frac{H'_S \cdot f}{2} = \frac{H_S \cdot f}{2} = \deg H_S.$$

La somme des multiplicités baisse car on a remplacé un point de multiplicité m par un point de multiplicité $d-m$, et $m > d/2$. □

7. La preuve du théorème

Preuve du théorème 1. Soit $S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation birationnelle, toujours avec S isomorphe à $\mathbb{P}^2$ ou une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$. On cherche à faire baisser son degré par l'une des 4 opérations listées dans l'énoncé.

S'il n'y a pas de point base de multiplicité plus grande que le degré, on est dans l'une des situations exceptionnelles décrites dans le lemme 7.

- Si $S = \mathbb{F}_0$, alors en changeant de projection on échange les rôles de a et d, et le degré baisse puisque $a < d$.
- Si $S = \mathbb{F}_1$ on contracte la section s. Le degré de la nouvelle application $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ est $a/3$, et $a/3 < d/2$.

Supposons maintenant qu'il y ait un point p de multiplicité m plus grande que le degré. On applique le lemme 8.

- Si $S = \mathbb{P}^2$, alors on considère $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de p. Le degré de la nouvelle transformation $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ est $\frac{d-m}{2} < \frac{d}{3}$.
- Si $S = \mathbb{F}_n$, alors on considère la transformation élémentaire associée à p. Le degré de la nouvelle transformation $\mathbb{F}_{n\pm1} \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ est inchangé, par contre la somme de toutes les multiplicités a chuté. On conclut par récurrence sur la somme des multiplicités qu'après un nombre fini de telles transformations élémentaires on se retrouve dans l'un des trois cas précédents.

□

Références

[Cas01] G. Castelnuovo. Le transformazioni generatrici del gruppo *Cremoniano* nel piano. *Torino Atti*, 36 :861–874, 1901.

[KSC04] J. Kollár, K. E. Smith, et A. Corti. *Rational and nearly rational varieties*, volume 92 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9, France

E-mail address: slamy@math.univ-toulouse.fr