C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 537-540, 1998
Théorie des groupes/*Group Theory*
(Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*)

L'alternative de Tits pour $\mathrm{Aut}\left[\mathbf{C}^2\right]$

Stéphane LAMY

Département de mathématiques, Université de Bretagne occidentale, 6, avenue Victor-le-Gorgeu, B.P. 809, 29285 Brest cedex, France
Courriel : stephane.lamy@univ-brest.fr

(Reçu le 13 mai 1998, accepté après révision le 22 juin 1998)

Résumé. Via une action de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ sur un arbre, nous classifions les sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. En particulier nous montrons que l'alternative de Tits est vérifiée. D'autre part nous obtenons une reformulation de la notion de fonction de Green pour un automorphisme de type Hénon. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

The Tits alternative for $\mathrm{Aut}\left[\mathbf{C}^2\right]$

Abstract. *Letting* $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ *act on a tree, we classify the subgroups of* $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$*, and show that the Tits alternative is true. Further we get another formulation for the notion of Green fonction of an Hénon type automorphism.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Préliminaires

Dans cette Note nous nous intéressons au groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan complexe. Nous nous proposons, suivant une démarche utilisée par Wright [10] dans le cadre abélien, de décrire les sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. Les résultats seront énoncés avec au mieux une esquisse de démonstration ; pour un exposé avec preuves détaillées nous renvoyons le lecteur au preprint [6].

Il est bien connu (*voir* [4]) que le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ peut s'écrire comme un produit amalgamé. Plus précisément, on note :

- $E = \{(x,y) \to (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)\,;\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{C}, \alpha\beta \neq 0, P \in \mathbf{C}[Y]\}$,
- $A = \{(x,y) \to (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)\,;\ a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$,
- $S = E \cap A$.

Les éléments de E (resp. A) s'appellent les automorphismes élémentaires (resp. affines), et on a $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2] = A *_S E$. Cette structure algébrique particulière à la dimension 2 permet, suivant la théorie de Bass–Serre (*voir* [7]), de faire canoniquement agir $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ sur un arbre. La construction est la suivante : on pose l'ensemble des sommets égal à l'union disjointe des classes à gauche $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]/A$ et $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]/E$, et l'ensemble des arêtes égal aux classes à gauche $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]/S$. Par définition, pour chaque h dans $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ l'arête hS relie les sommets hE et hA. On vérifie que le graphe ainsi construit

Note présentée par Étienne GHYS.

est un arbre, sur lequel $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ agit par translation à gauche : $f(gE) = (f \circ g)E$ (idem avec A, S). On récupère ainsi une représentation (fidèle) de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ dans le groupe des isométries d'un arbre.

À un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ on associe le sous-arbre $\mathrm{Fix}(f)$ constitué des sommets et arêtes fixés par l'action de f. En remarquant alors que, pour chaque $g \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, le groupe gEg^{-1} (resp. gAg^{-1}, gSg^{-1}) est le stabilisateur du sommet gE (resp. du sommet gA, de l'arête gS), on retrouve l'alternative décrite dans [4], à savoir :

1. ou bien $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ et f est conjugué à un élément de E (f est dit *de type « élémentaire »*) ;
2. ou bien $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ et f est conjugué à une composition $g_m \circ \cdots \circ g_1$ d'applications de Hénon, i.e. $g_i(x, y) = (y, P_i(y) - \delta_i x)$ (f est dit *de type « Hénon »*).

Dans le second cas il existe une unique géodésique infinie (i.e. un sous-arbre isomorphe à $\mathbf{R}$) notée $\mathrm{Géo}(f)$, telle que l'action de f restreinte à $\mathrm{Géo}(f)$ soit une translation. On notera $\lg(f)$ la longueur de cette translation.

2. Classification des sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$

Nous pouvons maintenant énoncer notre principal résultat :

THÉORÈME 1. – *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$. On distingue quatre cas :*

1. *G est conjugué à un sous-groupe de A ou de E ;*
2. *tous les éléments de G sont de type élémentaire mais G n'est pas conjugué à un sous-groupe de E ou de A. Alors G est abélien ;*
3. *G contient des éléments de type Hénon, et ceux-ci admettent tous la même géodésique. Alors G est résoluble ;*
4. *G contient deux éléments g_1 et g_2 de type Hénon avec des géodésiques différentes. Alors G contient un groupe libre à deux générateurs.*

En remarquant que E (resp. A) est un groupe résoluble (resp. linéaire), on obtient le

COROLLAIRE 1. – *Le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ vérifie l'alternative de Tits, i.e. si G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, alors on a :*

1. *ou bien G contient un groupe résoluble d'indice fini,*
2. *ou bien G contient un groupe libre à deux générateurs.*

Il est à noter qu'il existe des groupes opérant fidèlement sur un arbre mais ne vérifiant pas l'alternative de Tits. On trouvera dans [9] l'exemple d'un tel groupe : il s'agit d'un groupe infini, de type fini, dont tous les éléments sont d'ordre fini (je remercie le « referee » à qui je dois cet exemple).

La preuve du théorème repose sur la propriété remarquable suivante: étant donné un f de type élémentaire, l'arbre $\mathrm{Fix}(f)$ est ou bien non borné ou bien très petit. En fait, on a la

PROPOSITION 1. – *L'arbre $\mathrm{Fix}(f)$ est non borné si et seulement si f est conjugué à une application $(x, y) \longmapsto (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité du même ordre.*

Il est facile de voir que la condition est suffisante ; en effet, si p, q désignent des entiers tels que $\alpha^p = \beta$ et $\beta^q = \alpha$, alors on remarque que l'application de type Hénon $g = (y, y^p + x) \circ (y, y^q + x)$ commute avec $(\alpha x, \beta y)$; en regardant les actions de $(\alpha x, \beta y)$ et g sur l'arbre on obtient immédiatement $\mathrm{Géo}(g) \subset \mathrm{Fix}\big((\alpha x, \beta y)\big)$.

On montre que la condition est nécessaire à l'aide d'un calcul aisé mais fastidieux : en fait, on vérifie « à la main » que dans tous les autres cas, le diamètre de $\mathrm{Fix}(f)$ est au plus 6.

Le résultat suivant, utile pour la preuve du cas 4 du théorème, vient préciser le cas où $\mathrm{Fix}(f)$ est non borné. La preuve provient essentiellement du même calcul que ci-dessus :

PROPOSITION 2. – *Soient f, g dans* $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ *de type élémentaire et Hénon respectivement. On suppose que* $\mathrm{Fix}(f) \cap \text{Géo}(g)$ *est non borné.*

Alors f et g^2 commutent (et donc $\text{Géo}(g) \subset \mathrm{Fix}(f)$*).*

Esquisse de démonstration du théorème. – Dans le cas 2, la théorie de Serre dit que G fixe non pas un sommet (c'est le cas 1) mais un bout de l'arbre. Ainsi, tous les éléments de G ont un arbre fixe non borné, et la proposition 1 s'applique. En fait, on peut montrer que $G = \bigcup H_i$, où les H_i forment une suite croissante de sous-groupe finis cycliques, en particulier G est abélien. On pourra trouver dans [10] un exemple explicite d'un tel sous-groupe G.

Dans le cas 3, on montre que G est engendré par au plus trois automorphismes, à savoir $G = \langle h, f, \varphi \rangle$ avec h de type Hénon, f qui fixe $\text{Géo}(h)$ et φ qui agit sur $\text{Géo}(h)$ par symétrie centrale autour d'un sommet. Il est alors facile de calculer les groupes dérivés de G, en particulier le troisième groupe dérivé de G est trivial.

Enfin, dans le cas 4, on montre qu'il existe n tel que $\langle g_1^n, g_2^n \rangle = \langle g_1^n \rangle * \langle g_2^n \rangle$. On montre d'abord, à l'aide de la proposition 2, que $\text{Géo}(g_1) \cap \text{Géo}(g_2)$ est borné (disons de diamètre d), on peut ainsi choisir n tel que $\lg(g_1^n) > d$ et $\lg(g_2^n) > d$. On conclut alors à l'aide du lemme « ping-pong » classique dans ce genre de problème (*voir* [5]).

3. Lien avec le point de vue dynamique

Suivant [1], [2], [8], à chaque composée d'applications de Hénon $g = g_m \circ \cdots \circ g_1$ est associée une fonction de Green G_g^+ continue et plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^2$:

$$G_g^+ = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mathrm{d}(g)^n} \log^+ \|g^n\|,$$

où $\mathrm{d}(g)$ est le degré de g. Cette fonction mesure la vitesse à laquelle un point de $\mathbf{C}^2$ se dirige vers l'infini par itération positive de g, en particulier les points à trajectoire positive bornée sont exactement les zéros de G_g^+. Le bord des zéros de G_g^+ est noté J_g^+, c'est l'ensemble de Julia (positif) de g. On a des notions symétriques en utilisant les itérations négatives. On peut étendre ces définitions aux applications de type Hénon (de la forme $f = \varphi g \varphi^{-1}$) en posant simplement :

$$G_f^+ := G_g^+ \circ \varphi^{-1}.$$

On montre que les notions de fonction de Green et de géodésique infinie (orientée) sont équivalentes :

PROPOSITION 3. – *Soient f, g des morphismes de type Hénon. Alors*

$$G_f^+ = G_g^+ \iff \text{Géo}(f) = \text{Géo}(g) \textit{ (avec les mêmes orientations).}$$

Le sens $\Leftarrow$ découle de la description précise que l'on a obtenue dans le cas 3 du théorème.

Pour le sens $\Rightarrow$ l'idée est de montrer que le commutateur $h = fgf^{-1}g^{-1}$ est de type élémentaire ; en effet, il est alors facile de montrer que le groupe $\langle f, g \rangle$ est résoluble, d'où $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ (cas 3 du théorème). On suppose donc h de type Hénon, et on obtient une contradiction car les propriétés élémentaires des fonctions de Green impliquent que h doit respecter les niveaux de G_f^+ (i.e. $G_f^+ \circ h = G_f^+$), ce qui implique que les ensembles de Julia de h (positif et négatif) sont tous deux inclus dans un même niveau $\{G_f^+ = c\}$. Alors, ou bien $c > 0$, et la contradiction vient du fait que $\{G_f^+ = c\}$ est lisse, ou bien $c = 0$ et on applique un théorème de rigidité dû à N. Sibony [8] qui dit que $G_f^+ = G_h^+$, et on aurait $G_f^+ \circ h = \mathrm{d}(h) \cdot G_f^+$ avec $\mathrm{d}(h) \geq 2$.

Un problème voisin est le suivant : considérons w un point fixe contractant pour un morphisme f de type Hénon. On associe à w son bassin d'attraction $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^2 \; ; \; f^n(z) \to w\}$. On peut alors chercher à calculer le stabilisateur de Σ, i.e. le sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constitué des g tels que $g(\Sigma) = \Sigma$. La proposition suivante précise un résultat de [3] :

PROPOSITION 4. – *Le stabilisateur de* Σ *est constitué des automorphismes qui fixent* w *et qui laissent* Géo(f) *globalement invariante (i.e les automorphismes de type Hénon qui ont même géodésique que* f*, et des automorphimes de type élémentaire qui fixent* Géo(f)*).*

La preuve se fait avec des arguments similaires à ceux utilisés pour la proposition 3, en utilisant le fait que le bord de Σ est exactement le bord des zéros de G_f^+ (*voir* [2]).

Remerciements. Je remercie Dominique Cerveau qui m'a non seulement proposé le problème, mais également indiqué l'existence des deux points de vue utilisés ici ([7], [10] d'une part et [1], [2], [8] d'autre part).

Références bibliographiques

[1] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$, Inven. Math. 103 (1991) 69–99.
[2] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ II, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991) 657–679.
[3] Cerveau D., Sur la linéarisation de certains sous-groupes de difféomorphismes polynomiaux du plan et les domaines de Fatou–Bieberbach, Prépublication IRMAR, 1997.
[4] Friedland S., Milnor J., Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Erg. Th. Dynam. Sys. 9 (1989) 67–99.
[5] de la Harpe P., Free groups in linear groups, Enseign. Math. 29 (1983) 129–144.
[6] Lamy S., L'alternative de Tits pour $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, Prépublication IRMAR (à paraître).
[7] Serre J.-P., Arbres, amalgames, SL2, Astérisque 46, 1977.
[8] Sibony N., Dynamique des applications holomorphes à plusieurs variables, État de la recherche Soc. Math. France, Publ. ENS Lyon, 1997.
[9] Sidki S., On a 2-generated infinite 3-group: the presentation problem, J. Algebra 110 (1987) 13–23.
[10] Wright D., Abelian subgroups of $\mathrm{Aut}_k(k[X,Y])$ and applications to actions on the affine plane, Illin. J. Math. (1979) 579–635.