C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 883-886, 1999
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Les automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^3$ préservant une forme quadratique

Stéphane LAMY

Département de mathématiques, Université de Bretagne occidentale, 6, avenue Victor-le-Gorgeu, B.P. 809, 29285 Brest cedex, France
Courriel : stephane.lamy@univ-brest.fr

(Reçu le 1er mars 1999, accepté le 8 mars 1999)

Résumé. Nous donnons une description du groupe orthogonal non linéaire sur $\mathbf{C}^3$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^3$ preserving a quadratic form

Abstract. *We give a description of the non-linear orthogonal group on* $\mathbf{C}^3$. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Introduction

Dans l'étude du groupe Aut[$\mathbf{C}^n$] des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^n$, le cas $n = 2$ est très particulier. On dispose en effet d'un théorème de structure qui décrit Aut[$\mathbf{C}^2$] comme le produit amalgamé de deux de ses sous-groupes, à savoir les groupes affine et élémentaire. On note A_n le groupe affine en dimension n, et E_n le groupe des automorphismes élémentaires, i.e. qui sont de la forme :

$$e : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\alpha_1 x_1 + f_1, \ldots, \alpha_n x_n + f_n),$$

où $\alpha_i \in \mathbf{C}^*, f_i \in \mathbf{C}[x_{i+1}, \ldots, x_n]$. On a donc Aut[$\mathbf{C}^2$] = $A_2 *_\cap E_2$, où $*_\cap$ dénote le produit amalgamé suivant l'intersection. Ce résultat ne semble pas pouvoir s'étendre en dimension supérieure. En effet, d'une part, il est facile de voir que $\langle A_3, E_3 \rangle$ n'est pas le produit amalgamé de A_3 et E_3, par exemple dans [1] est explicitée la relation :

$$(x, z, y) \circ (x + y^2, y, z) \circ (x, z, y) \circ (x - z^2, y, z) = \mathrm{Id}.$$

D'autre part, la question de savoir si Aut[$\mathbf{C}^3$] = $\langle A_3, E_3 \rangle$ est encore ouverte, cependant le sentiment général est que cette égalité est fausse et un bon candidat à être un contre-exemple est l'automorphisme

Note présentée par Étienne GHYS.

suivant dû à Nagata :

$$N : (x, y, z) \longmapsto (x - 2y(y^2 + xz) - z(y^2 + xz)^2, y + z(y^2 + xz), z).$$

On remarque que $Q \circ N = Q$, où $Q(x, y, z) = y^2 + xz$, en fait $N = \exp(Q \cdot D)$, où D est la dérivation localement nilpotente définie par $D = -2y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$.

Dans [2] Drensky et Yu considèrent les automorphismes de type Nagata de la forme $\exp(\delta \cdot D)$, où $\delta \in \mathbf{C}[z, Q] = \ker(D)$ et posent la question : est-ce que le groupe « orthogonal non linéaire » $\mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$, i.e. le groupe constitué des $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^3]$ tels que $Q \circ \varphi = Q$, est engendré par le groupe orthogonal linéaire et les automorphismes de type Nagata ?

Dans cette Note on se propose de décrire le groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$ et de répondre (par la négative) à la question de [2] ; l'idée principale étant de voir un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$ comme une famille à paramètre d'automorphismes de $\mathbf{C}^2$. Dans la suite on notera (u, v) les coordonnées dans $\mathbf{C}^2$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathbf{C}^3$.

2. Structure du groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$

Le théorème de structure pour $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ énoncé dans l'introduction est en fait valable pour n'importe quel corps k (*voir* [4] pour une preuve moderne). On va travailler avec $k = \mathbf{C}$ et avec $k = \mathbf{C}(t)$, le corps des fractions rationnelles.

Un élément du groupe $\mathrm{Aut}[k^n]$ peut être vu comme un élément du groupe $\mathrm{Aut}(k[x_1, \ldots, x_n])$ des k-automorphismes de l'algèbre $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ainsi, on peut considérer un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}(t)^2]$ comme un automorphisme de $\mathbf{C}^2$ dont les coefficients dépendent rationnellement de t, ou bien comme un élément du groupe $\mathrm{Aut}_t(\mathbf{C}(t)[u, v])$ des $\mathbf{C}(t)$-automorphismes de l'algèbre $\mathbf{C}(t)[u, v]$. On dira qu'un élément de $\mathrm{Aut}_t(\mathbf{C}(t)[x_1, \ldots, x_n])$ est un automorphisme de $\mathbf{C}^n$ à paramètre rationnel ; de même, les éléments du groupe $\mathrm{Aut}_t(\mathbf{C}[t][x_1, \ldots, x_n])$ seront appelés automorphimes à paramètre polynomial. Si F est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n])$, on définit le groupe $F_{(t)}$ (resp. $F_{[t]}$) des automorphismes de F à paramètre rationnel (resp. polynomial) comme le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_t(\mathbf{C}(t)[x_1, \ldots, x_n])$ (resp. $\mathrm{Aut}_t(\mathbf{C}[t][x_1, \ldots, x_n])$) constitué des φ_t vérifiant $\varphi_{t_0} \in F$ pour tout $t_0 \in \mathbf{C}$ (dans le cas rationnel on ne considère que les t_0 en dehors d'un nombre fini de pôles). On note H le sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ constitué des automorphismes de déterminant jacobien ± 1 qui commutent avec $-\mathrm{Id}$, et on pose $A_H = A_2 \cap H$, $E_H = E_2 \cap H$.

PROPOSITION 1. – *On a les décompositions en produit amalgamé :*

$$H = A_H *_\cap E_H \text{ et } H_{(t)} = A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}.$$

Démonstration. – Tout d'abord d'après [6], pp. 14 on a $A_H *_\cap E_H = \langle A_H, E_H \rangle$. Reste à voir que A_H et E_H engendrent bien H. Pour cela on reprend la récurrence de la preuve du théorème de structure pour $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ (*cf*. [4]). Soit $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, quitte à composer (à gauche) par un automorphisme de la forme $(u + \alpha v, v)$ on peut supposer $\deg(g_1) \neq \deg(g_2)$, et en composant éventuellement par (v, u) on se ramène à $\deg(g_1) > \deg(g_2)$. On montre alors que $\deg(g_1) = \deg(g_2) \times n$, et on compose par $(u + \beta v^n, v)$ pour baisser le degré. On remarque que si g commute avec $-\mathrm{Id}$, i.e. si g_1 et g_2 ont tous leurs monomes de degré impair, alors n est aussi impair. Ainsi, par récurrence on écrit $g = m \circ s$, où $s \in A_2 \cap E_2$, $\det(\mathrm{Jac}(m)) = \pm 1$ et m commute avec $-\mathrm{Id}$, d'où le résultat. La preuve dans le cas à paramètre rationnel est similaire (en travaillant sur le corps $\mathbf{C}(t)$). □

Un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$ induit un automorphisme sur chaque quadrique $V_\lambda = \{y^2 + xz = \lambda\}$ ($\lambda \in \mathbf{C}$). Les automorphismes de telles surfaces sont classifiées dans [3] et [5]. On note E_G le groupe des automorphismes de type Nagata qui sont en plus élémentaires, i.e. les automorphismes de la forme $\exp(\delta \cdot D)$, où $\delta \in \mathbf{C}[z]$, et $G \subset \mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$ le groupe engendré par $\mathrm{O}(3, \mathbf{C})$ et E_G.

PROPOSITION 2 (Gizatullin–Danilov, Makar-Limanov). – *Le groupe G_λ des automorphismes de la surface V_λ ($\lambda \neq 0$) est engendré par les restrictions à V_λ de $\mathrm{O}(3, \mathbf{C})$ et E_G. De plus, $G = \mathrm{O}(3, \mathbf{C}) *_\cap E_G$ et le morphisme de restriction $G \to G_\lambda$ est un isomorphisme.*

La proposition dit en particulier que tout automorphisme de V_λ s'étend en un automorphisme de $\mathbf{C}^3$ qui préserve Q. On a exclut le cas $\lambda = 0$ car alors le groupe associé est un peu plus gros : il contient les transformations $(x, y, z) \mapsto (\mu^2 x, \mu y, z)$.

PROPOSITION 3. – *Il existe un morphisme $\sigma : H_{(t)} \to G_{(t)}$ qui induit un isomorphisme entre $H_{[t]}/\langle -\mathrm{Id} \rangle$ et $G_{[t]}$.*

Démonstration. – On note $p : (u, v) \mapsto (u^2, uv, -v^2)$ la paramétrisation de V_0, $p^* : \mathbf{C}[x, y, z] \mapsto \mathbf{C}[u, v]$ le morphisme d'algèbres induit par p, et « p^{*-1} » la réciproque partielle définie en posant $p^{*-1} : u^{2n}, u^{2n+1}v, uv^{2n+1}, v^{2n} \mapsto x^n, x^n y, y(-z)^n, (-z)^n$. En imposant à σ de vérifier la relation $\sigma(\varphi) = p^{*-1} \circ \varphi \circ p^*$ on définit σ sans ambiguïté sur $A_{H,(t)}$ et $E_{H,(t)}$, et donc sur $H_{(t)}$.

On a ainsi construit un morphisme de groupe σ entre $H_{(t)}$ et $G_{(t)}$ de noyau $\langle -\mathrm{Id} \rangle$. Nous allons maintenant montrer que σ se restreint, comme annoncé, aux automorphismes à paramètre polynomial. En effet, soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in G_{[t]}$. On a

$$p^*(\psi_1)p^*(\psi_3) + p^*(\psi_2)^2 = p^*(\psi_1\psi_3 + \psi_2^2) = p^*(y^2 + xz) = 0,$$

donc $p^*(\psi_1)p^*(\psi_3)$ est un carré dans $\mathbf{C}[t][u, v]$. Or $\mathbf{C}[t][\psi_1, \psi_2, \psi_3] = \mathbf{C}[t][x, y, z]$, donc en appliquant p^* on obtient $\mathbf{C}[t][p^*(\psi_1), p^*(\psi_2), p^*(\psi_3)] = \mathbf{C}[t][u^2, uv, v^2]$. En particulier, $p^*(\psi_1)$ et $p^*(\psi_3)$ n'ont pas de facteur commun et sont donc des carrés :

$$p^*(\psi_1) = f_t(u, v)^2, \quad p^*(\psi_3) = g_t(u, v)^2.$$

Alors $\varphi : (u, v) \mapsto (f_t(u, v), g_t(u, v))$ est un antécédent de ψ par σ. □

PROPOSITION 4. – *Il existe un isomorphisme*

$$G_{(t)} \xrightarrow{\tau} Aut_Q(\mathbf{C}(Q)[x, y, z])$$

qui induit un isomorphisme entre les groupes $G_{[t]}$ et $Aut_Q[\mathbf{C}^3]$.

Démonstration. – Étant donné $f_t \in G_{(t)}$, on associe à f_t un élément $\tau(f_t)$ de $\mathrm{Aut}_Q(\mathbf{C}(Q)[x, y, z])$ en substituant Q au paramètre t :

$$\tau(f_t) : (x, y, z) \longmapsto f_Q(x, y, z).$$

L'application τ ainsi construite est clairement un morphisme de groupes. Nous allons maintenant construire une réciproque à τ. Tout d'abord on considère le morphisme

$$x, y, z \overset{p_\lambda^*}{\longmapsto} u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2,$$

qui se factorise en un isomorphisme entre $\mathbf{C}[x, y, z]/(y^2 + xz = \lambda)$ et $\mathbf{C}[u^2 - \frac{\lambda}{v^2}, uv, -v^2]$. En prenant par exemple $\lambda = 1$ on voit que le groupe G (resp. $G_{(t)}$) s'identifie avec les automorphismes de l'algèbre $\mathbf{C}[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$ (resp. $\mathbf{C}(t)[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$). Maintenant, soit $\varphi \in \mathrm{Aut}_Q(\mathbf{C}(Q)[x, y, z])$. On associe à φ via p_t^* un automorphisme de $\mathbf{C}(t)[u^2 - \frac{t}{v^2}, uv, -v^2]$ (ici t n'est plus un complexe mais une variable). On se ramène à l'algèbre associée à V_1 par la conjugaison :

$$P(u,v) \in \mathbf{C}(t)\left[u^2 - \frac{t}{v^2}, uv, -v^2\right] \longmapsto \frac{1}{\alpha^2} P(\alpha u, \alpha v) \in \mathbf{C}(t)\left[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2\right],$$

où $\alpha^4 = t$. Ainsi, à φ on associe un automorphisme de $\mathbf{C}(t)[u^2 - \frac{1}{v^2}, uv, -v^2]$, i.e. un élément φ_t de $G_{(t)}$, par la discussion ci-dessus. On vérifie que ceci définit bien une réciproque à τ ; en fait, pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$ (en dehors d'un nombre fini de pôles), φ_λ est l'unique élément dans G qui coïncide avec φ sur V_λ. Enfin, il est clair que si $\varphi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbf{C}^3]$, alors φ_λ est défini pour tout λ, i.e. φ_t est à coefficients polynomiaux. □

3. Le contre-exemple

Dans la section précédente nous avons construit deux morphismes :

$$H_{[t]} \xrightarrow{\sigma} G_{[t]} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}_Q[c^3].$$

On remarque que O(3,**C**) est dans l'image de $A_{H,[t]}$ par $\tau \circ \sigma$; en fait, O(3,**C**) est exactement l'image de A_H. D'autre part, les automorphismes de type Nagata $\exp(\delta(Q,z) \cdot D)$ proviennent des élémentaires de la forme $(u - v\delta(t, -v^2), v)$.

Nous allons maintenant exhiber un élément de $H_{[t]}$ qui n'est pas dans le groupe engendré par $A_{H,[t]}$ et $E_{H,[t]}$, en appliquant $\tau \circ \sigma$ nous obtenons ainsi un contre-exemple à la question de Drensky et Yu. On pose

$$f_t : (u,v) \longmapsto \left(u - \frac{v^3}{t}, v\right) \circ (u, v + t^2 u) \circ \left(u + \frac{v^3}{t}, v\right).$$

On vérifie que f_t est bien à coefficients polynomiaux :

$$f_t(u,v) = (u - 3v^2(ut + v^3) - 3vt(ut + v^3)^2 - t^2(ut + v^3)^3, v + t(ut + v^3)).$$

Si f_t admet une autre décomposition elle est de la forme :

$$f_t : (u,v) \longmapsto \left(u - \frac{v^3}{t}, v\right) \circ s \circ s^{-1} \circ (u, v + t^2 u) \circ s' \circ s'^{-1} \circ \left(u + \frac{v^3}{t}, v\right),$$

où $s, s' \in A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$. Si $s = (\alpha u + \beta v, \gamma v)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}(t)$ et $\alpha\gamma = \pm 1$, alors

$$\left(u - \frac{v^3}{t}, v\right) \circ s = \left(\alpha u + \beta v - \frac{\gamma^3 v^3}{t}, \gamma v\right),$$

qui est encore à coefficients non polynomiaux.

Remerciements. Je remercie Dominique Cerveau qui m'a proposé ce problème.

Références bibliographiques

[1] Alev J., A note on Nagata's automorphism, in Automorphisms of affine spaces (Curaçao) Van den Essen (ed.), Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 215–221.
[2] Drensky V., Yu J.-T., Exponential automorphisms of polynomial algebras, Commun. in Algebra 26 (9) (1998) 2977–2985.
[3] Gizatullin M.H., Danilov V.I., Automorphisms of affine surfaces II, Isz. Akad. Nauk SSSR 41 (1977) 51–98.
[4] McKay J.H., Wang S.S., An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables, J. Pure and Appl. Alg. 40 (1986) 245–257.
[5] Makar-Limanov L.G., On groups of automorphisms of class of surfaces, Israel J. Math. 69 (1990) 250–256.
[6] Serre J.-P., Arbres, Amalgames, SL_2, Astérisque 46 (1977).