C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 807-810, 1999
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Problèmes de densité d'orbites pour des groupes d'automorphismes de $\mathbf{C}^2$

Stéphane LAMY

Centre de Recerca Matemática, Universitat Autónoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Espagne
Courriel : lamy@crm.es

(Reçu le 2 août 1999, accepté le 17 août 1999)

Résumé. Nous nous intéressons à la dynamique des sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, et plus spécifiquement à l'existence éventuelle d'orbites denses. Nous établissons tout d'abord un résultat de densité locale sous des conditions génériques sur les parties linéaires. Nous montrons ensuite qu'à contrario un sous-groupe $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ de type fini et ne contenant pas d'automorphisme à dynamique élémentaire n'admet jamais d'orbite dense globale. © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Problems of orbits density for automorphisms groups of $\mathbf{C}^2$

Abstract. *Our main interest here is the dynamics of subgroups of* $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, *and more specifically the possible existence of dense orbits. First, we state a local result: density arises under generic assumptions on linear parts. However, next we prove that a subgroup* $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ *finitely generated and containing no automorphism with elementary dynamics never admits a global dense orbit.* © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Ce travail fut initialement motivé par la question suivante : existe-t-il un groupe engendré par deux automorphismes f et g de type Hénon (*voir* plus loin la définition) et admettant une orbite dense dans $\mathbf{C}^2$ tout entier ? Notre stratégie pour tenter de produire un exemple était de commencer par regarder le problème localement, en supposant que f et g avaient un point fixe commun. Considérons par exemple le cas de deux applications de type Hénon admettant chacune l'origine comme point fixe attractif. Il semblait raisonnable d'espérer sous des conditions génériques sur les parties linéaires une densité locale, et en effet nous avons pu établir un tel résultat en toute généralité (théorème 1). Dans notre exemple cette densité se propage au moins à chacun des bassins d'attraction associés à f et g ; cependant le théorème 3 affirme que cette zone de densité reste asymptotiquement confinée le long d'un nombre fini de directions. Ainsi mis à part quelques cas triviaux (par exemple si $g = f \circ \ell$, où ℓ est linéaire) la question de départ reçoit une réponse négative.

Note présentée par Étienne GHYS.

Nous nous proposons dans cette Note d'énoncer nos résultats accompagnés d'une idée de preuve ; pour le détail des démonstrations nous renvoyons le lecteur à [6].

2. Densité locale

Nous commençons donc par énoncer un théorème local. Dans un travail en préparation J. Rebelo et F. Loray démontrent un résultat voisin, avec cependant des motivations assez différentes.

THÉORÈME 1. – *Soient* $f, g \in \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ *deux difféomorphismes locaux à l'origine de* $\mathbf{C}^2$. *On suppose que les parties linéaires de* f *et* g *engendrent un sous-groupe dense de* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$. *Alors le pseudo-groupe engendré par* f *et* g *est localement à orbites denses.*

Cet énoncé appelle quelques commentaires.

Précisons tout d'abord la notion de densité locale. Si V est un voisinage de l'origine sur lequel $f^{\pm 1}$ et $g^{\pm 1}$ sont bien définis, et si $z \in V$, alors la V-pseudo-orbite de z est l'ensemble des points w tels qu'il existe une suite finie $x_0 = z, x_1, \ldots, x_n = w$ avec

$$\forall\, 0 \leq i < n, \ \ x_i \in V \ \text{ et } \ x_{i+1} = h(x_i), \ \text{ où } \ h = f^{\pm 1} \ \text{ ou } \ g^{\pm 1}.$$

Nous dirons que le pseudo-groupe engendré par f et g est localement à orbites denses si pour tout $z \in V \setminus \{0\}$ l'adhérence de la V-pseudo-orbite de z est un voisinage de l'origine.

Ce théorème est calqué sur un énoncé similaire en dimension 1 démontré dans [1] (*voir* également [4]). Cependant la preuve ne se généralise pas immédiatement, le principal obstacle étant qu'en dimension 2 le groupe des parties linéaires $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ n'est plus commutatif.

Remarquons d'ailleurs qu'en dimension 2 il n'est pas évident a priori que l'hypothèse de densité des parties linéaires soit raisonnable : il existe en effet des couples de matrices qui engendrent des groupes discrets (groupes de Schottky), et cette propriété est stable par perturbation. Cependant, le lemme de Zassenhauss (*voir* [3]) assure que si deux matrices proches de l'identité engendrent un groupe non nilpotent, alors elles engendrent un groupe non discret. Raffinant ce résultat nous obtenons :

PROPOSITION 2. – *Il existe un voisinage* W *de* $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ *dans* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ *et une partie de mesure pleine* $W' \subset W$ *tel que pour tout couple de matrices* $(A, B) \in W'$, *le groupe engendré par* A *et* B *soit dense dans* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$.

Idée de démonstration. – Tout d'abord il est nécessaire que pour tout $(A, B) \in W'$ le groupe multiplicatif engendré par $\det(A)$ et $\det(B)$ soit dense dans $\mathbf{C}^*$. D'autre part, il est assez facile de voir que l'algèbre de Lie réelle engendrée par deux matrices génériques (i.e. contenues dans un certain ouvert dense) de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ est égale à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Ainsi, le problème se ramène à exhiber deux matrices génériques dans l'algèbre de Lie du groupe $\overline{\langle A, B \rangle}$ (qui est bien un groupe de Lie *réel* par le théorème de Cartan). Ceci se fait en prenant des commutateurs dans le groupe $\langle A, B \rangle$, produisant ainsi des matrices de plus en plus proches de l'identité, jusqu'à pouvoir utiliser la réciproque locale de l'application exponentielle.

Venons-en maintenant à la preuve du théorème. Notre démarche consiste à construire dans l'adhérence du pseudo-groupe engendré par f et g un flot complexe conjugué au flot linéaire $(x, y) \to (x + ty, y)$. Donnons une idée de la manière dont nous obtenons ce flot. Quitte à prendre un sous-groupe, et quitte à conjuguer, la densité des parties linéaires nous permet de supposer que

$$f(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y),$$

$$g(x, y) = \mathrm{D}g(0)(x, y) + \varphi(x, y) \ \text{ avec } \mathrm{D}g(0) \text{ proche de } \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{ où } |\beta| > r > 0.$$

On construit alors une suite $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de difféomorphismes locaux en posant $g_0 := g$ et

$$g_i' = f^{-1}\, g_i\, f\, g_i^{-1},$$
$$g_{i+1} = f^{-n_i}\, g_i'\, f^{n_i}.$$

La première opération (commutateur) rapproche fortement la partie linéaire de l'identité tout en perturbant légèrement la partie non linéaire. Au contraire, la deuxième opération (conjugaison) augmente le coefficient supérieur droit de la partie linéaire (de telle sorte qu'on a encore $|\beta| > r$) et diminue fortement la partie non linéaire. Ainsi, pour un bon choix des n_i (et quitte à prendre une sous-suite) cette suite converge uniformément au voisinage de l'origine vers une application linéaire $(x, y) \to (x + \beta y, y)$. En changeant le difféomorphisme g qui initialise la récurrence on peut de plus supposer que le complexe β est de module arbitrairement petit. Finalement, par passage à la limite on obtient un flot réel, en conjuguant par f on obtient un deuxième flot réel, et finalement le flot complexe annoncé. En faisant agir le pseudo-groupe $\langle f, g\rangle$ on récupère alors facilement la densité locale.

3. Non densité globale des orbites

Rappelons la classification des éléments du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ des automorphismes polynômiaux de $\mathbf{C}^2$. Le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ est le produit amalgamé des groupes affine et élémentaire (ce dernier étant le groupe des automorphismes dont la deuxième coordonnée ne dépend que de y). De ce résultat fondamental Friedland et Milnor [2] ont déduit que tout automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ se ramène par conjugaison à l'un des deux modèles suivants :

1. $e : (x, y) \longrightarrow (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma)$ avec $\alpha,\ \beta \in \mathbf{C}^*$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $P \in \mathbf{C}[X]$;
2. $g : (x, y) \longrightarrow g_n \circ \cdots \circ g_1(x, y)$, où chaque g_i est un automorphisme de Hénon généralisé

$$g_i : (x, y) \longrightarrow (y, P_i(y) - \alpha_i x),\quad \alpha_i \in \mathbf{C}^*,\quad P_i \in \mathbf{C}[X],\quad \deg(P_i) \geq 2.$$

Nous dirons respectivement que φ (avant conjugaison) est *de type élémentaire* ou *de type Hénon*. En contraste avec le théorème 1 nous nous proposons de montrer le résultat global suivant :

THÉORÈME 3. – *Soit $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ un groupe de type fini dont tous les éléments (sauf l'identité) sont de type Hénon. Alors il existe un ouvert $U \subset \mathbf{C}^2$ tel que :*

1. *l'adhérence dans $\mathbf{CP}^2$ du complémentaire de U contient un nombre fini de points de $\mathbf{CP}^1_\infty$ (la droite à l'infini) ;*
2. *pour tout $z \in U$, l'orbite de z par G est fermée dans $\mathbf{C}^2$.*

Notons que l'hypothèse « tous les éléments de g sont de type Hénon » n'est pas très restrictive : ceci découle de la structure de produit amalgamé de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ (*voir* [5]). La preuve du théorème repose sur la :

PROPOSITION 4. – *Soit $g \in \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ de type Hénon. Il existe $p \in \mathbf{CP}^1_\infty$, tel que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ il existe un ouvert $U \subset \mathbf{C}^2$ vérifiant :*

1. *$\overline{U^c} \cap \mathbf{CP}^1_\infty = \{p\}$, où $\overline{U^c}$ est l'adhérence dans $\mathbf{CP}^2$;*
2. *for all $z \in U$ and all $k \in \mathbf{N}^*$, $\|g^k(z)\| > m^k \|z\|$.*

Idée de démonstration. – Même si ce résultat est un peu fastidieux à établir rigoureusement il est assez clair. En effet, l'automorphisme g effondre la droite à l'infini sur un seul point, sauf un point d'indétermination qui correspond à p. Ainsi, la proposition formalise le fait que g possède un point fixe superattractant à l'infini, et que le bassin d'attraction associé contient la droite à l'infini moins un point.

Maintenant, soit $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ un groupe vérifiant les hypothèses du théorème 3. Si pour tous $i \neq j$ les points d'indétermination de $g_i^{\pm 1}$ et $g_j^{\pm 1}$ sont distincts, alors la proposition 4 permet de mettre en place un argument de type « ping-pong ». On montre facilement qu'un élément $g \in G$ envoie un point z d'autant plus loin que sa longueur de décomposition par rapport au système $(g_1, \ldots, g_n)$ est grande.

Dans le cas général l'idée est similaire mais nécessite quelques préliminaires techniques. On montre qu'il existe des familles finies (a_i) et (e_j) d'automorphismes respectivement affine et élémentaire telles que tout élément $g \in G$ s'écrive :

$$g = (a_{i_n} \circ e_{j_n}) \circ \cdots \circ (a_{i_1} \circ e_{j_1}) \circ a_{i_0}.$$

Toutes les applications de type Hénon $a_{i_k} \circ e_{j_k}$ admettent le même point d'indétermination p à l'infini, et effondre la droite à l'infini en un point différent de p. Nous sommes ainsi à nouveau dans les conditions d'un « ping-pong ». De plus, les familles (a_i) et (e_j) étant finies (c'est le point délicat de la preuve), le nombre de tels $g \in G$ qui admettent une décomposition de longueur n donnée est fini. Ainsi, comme précédemment chaque boule compacte ne contient qu'un nombre fini de points de l'orbite de z par G (pour $z \in \mathbf{C}^2$ loin d'un nombre fini de directions d'indétermination).

En conclusion, un groupe $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ pourra admettre simultanément des zones de densité, des zones à orbites discrètes et des zones à dynamique chaotique (correspondant aux ensembles de Julia des éléments du groupe).

Remerciements. Je remercie vivement Dominique Cerveau qui m'a proposé ce problème, Frank Loray à qui je dois l'idée de la preuve du théorème 1 et Étienne Ghys qui m'a indiqué l'existence du lemme de Zassenhauss.

Références bibliographiques

[1] Cerveau D., Densité des feuilles de certaines équations de Pfaff à deux variables, Ann. Inst. Fourier 33 (1983) 185–194.
[2] Friedland S., Milnor J., Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Erg. Th. and Dynam. Sys. 9 (1989) 67–99.
[3] Ghys É., Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité, Bol. Soc. Bras. Mat. 24 (1993) 137–178.
[4] Il'yashenko Yu.S., The topology of phase-portraits of analytic differential equations on the complex projective plane, Sel. Math. Sov. 5 (1986) 141–199 (Traduction d'un article paru dans Trudy Sem. Petrovsk. 4 (1978) 83–136).
[5] Lamy S., L'alternative de Tits pour $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$, Prépublication IRMAR, 1998.
[6] Lamy S., Problèmes de densité d'orbites pour des groupes d'automorphismes de $\mathbf{C}^2$, Prépublication IRMAR, 1999.