

L'alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$

Stéphane Lamy

*Ecole Normale Supérieure de Lyon, UMPA UMR 5669 46, Allée d'Italie,
F-69364 Lyon Cedex 07, France*

Communicated by J. Tits

Received January 20, 1999

Via une action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur un arbre, nous classifions les sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. En particulier nous montrons que l'alternative de Tits est vérifiée. D'autre part nous obtenons une reformulation de la notion de fonction de Green pour un automorphisme de type Hénon. © 2001 Academic Press

Letting $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ act on a tree, we classify the subgroups of $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ and show that the Tits alternative is true. Further we get another formulation for the notion of a Green function of an Hénon type automorphism. © 2001 Academic Press

1. INTRODUCTION

Cet article constitue l'exposé détaillé des résultats annoncés dans la note [7].

Il est bien connu que le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan complexe peut s'écrire comme un produit amalgamé. Plus précisément suivant [5] nous noterons:

$$E = \{(x, y) \rightarrow (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, P \in \mathbb{C}[X]\};$$

$$A = \{(x, y) \rightarrow (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2);$$

$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\};$$

$$S = A \cap E.$$

Nous appellerons E le groupe des automorphismes élémentaires; bien sûr A est le groupe des automorphismes affines. On a alors $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_S E$. Par la suite nous commettrons systématiquement l'abus d'écriture consistant à noter $f = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ pour désigner un élément $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (au lieu de $f: (x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$).



Suivant une démarche utilisée par Wright [12] (dans le cadre des sous-groupes abéliens), nous nous proposons d'étudier les sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ en utilisant la théorie de Bass-Serre [9], qui permet de faire agir $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur un certain arbre. L'idée est que des questions du type “ f et g commutent-ils?” ou “ f et g engendrent-ils un groupe libre?” seront plus faciles à traiter en considérant les actions de f et g sur l'arbre.

Friedland et Milnor [5] ont classifié les éléments de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ à conjugaison près. Étant donné $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on a l'alternative:

1. f est conjugué à un élément de E ;
2. f est conjugué à une composée d'applications de Hénon généralisées, i.e.,

$$\varphi f \varphi^{-1} = g_m \circ \cdots \circ g_1,$$

où $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, $g_i = (y, P_i(y) - \delta_i x)$ avec $\delta_i \in \mathbb{C}^*$, et $P_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2 . Nous dirons respectivement que f est de type élémentaire ou de type Hénon.

Cette alternative peut être reformulée de la manière suivante: pour $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on définit le degré dynamique $d(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (d^\circ g^n)^{1/n}$ où $d^\circ g^n$ est le degré ordinaire de g^n . L'avantage du degré dynamique est qu'il est invariant par conjugaison, et on a:

$$d(g) = 1 \Leftrightarrow g \text{ est conjugué à un élément de } E.$$

$$d(g) \geq 2 \Leftrightarrow g \text{ est de type Hénon.}$$

L'article est organisé de la manière suivante.

D'après la théorie de Bass-Serre [9], à tout produit amalgamé on peut associer canoniquement un arbre. Dans la section 2 nous rappelons cette construction, et de nouveau nous reformulons l'alternative ci-dessus, cette fois en termes de sous-arbre fixé. Nous introduisons également certaines écritures normales, qui seront utiles lors des calculs. Enfin, nous énonçons notre théorème principal, et en déduisons immédiatement l'alternative de Tits.

Dans la section 3 nous nous intéressons aux automorphismes de degré 1. Nous montrons d'abord que, sauf pour certaines rotations exceptionnelles, l'arbre qui est laissé fixe par l'action d'un automorphisme f de degré 1 est borné; cela interdit en particulier une relation $f \circ g = g \circ f$ avec $d(g) \geq 2$. De même si on regarde les groupes dont tous les éléments sont de degré 1, nous montrons que sauf “cas exceptionnels” (de même nature que ci-dessus), ce sont à conjugaison près des sous-groupes de E ou A .

Nous passons ensuite dans la section 4 au cas des groupes contenant des éléments de type Hénon. Nous caractérisons les couples f, g de tels

automorphismes qui engendrent un groupe libre, puis nous montrons que le centralisateur d'un automorphisme de degré ≥ 2 est un produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La preuve du théorème principal est ensuite achevée.

Enfin dans la section 5 nous faisons le lien avec le point de vue développé par exemple par Bedford, Smillie et Sibony [1, 2, 10]: nous caractérisons les automorphismes qui ont même fonction de Green, ainsi que les automorphismes qui laissent un bassin d'attraction invariant. C'est la résolution de ces questions de nature dynamique qui était la motivation première de ce travail.

2. PRÉLIMINAIRES ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Le début de cette section est essentiellement une retranscription d'une construction de [9] adaptée à notre cas particulier.

On construit un arbre simplicial \mathcal{F} de la manière suivante: on pose l'ensemble des sommets égal à l'union disjointe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]/A$ et de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]/E$, et l'ensemble des arêtes égal à $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]/S$. Tous ces quotients doivent être compris comme des classes à gauche; les classes de $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ se notent respectivement gA , gE et gS . Par définition, l'arête hS relie les sommets fA et gE si $hS \subset fA$ et $hS \subset gE$ (et donc $fA = hA$ et $gE = hE$). Nous avons ainsi construit un graphe \mathcal{F} (Fig. 1); et dire que A et E sont amalgamés le long de S revient à dire que \mathcal{F} est un arbre (voir [9]).

Cet arbre est le seul (à isomorphisme près) à vérifier la propriété suivante: il existe une action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur \mathcal{F} , tel que le domaine fondamental de cette action soit un segment, i.e., une arête avec ses deux sommets, avec E et A les stabilisateurs des sommets de ce segment (et donc S est le stabilisateur de ce segment). Cette action est en fait simplement la translation à gauche: $g(hS) = (g \circ h)S$.

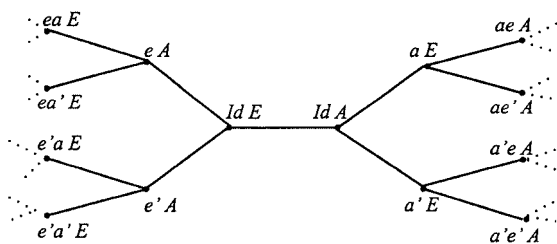


FIG. 1. Quelques sommets de l'arbre \mathcal{F} ($a, a' \in A \setminus E$; $e, e' \in E \setminus A$).

Il existe une métrique naturelle sur l'ensemble des sommets de \mathcal{T} : si p, q sont deux sommets, $\text{dist}(p, q) \in \mathbb{N}$ est le nombre d'arêtes du chemin sans aller-retour reliant p à q . Nous verrons dès la section 3 que la translation à gauche induit une représentation *fidèle* de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ dans les isométries de \mathcal{T} , ce qui nous conduira par la suite à confondre un élément f de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec l'isométrie qu'il induit sur \mathcal{T} .

D'autre part on voit que si l'action de f laisse deux sommets fixes, le chemin qui les relie est fixé également; on peut ainsi parler du sous-arbre fixé par f , que l'on note $\text{Fix}(f)$ (ne pas confondre avec les points fixes de f en tant qu'automorphisme de $\mathbb{C}^2 \dots$). On a vu que, par construction, E était le stabilisateur de $\text{Id}E$. Cela implique immédiatement que pour tout $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, gEg^{-1} est le stabilisateur de gE (*idem* avec A et S).

Considérons maintenant f avec $\text{Fix}(f) = \emptyset$. Il existe un ensemble de sommets qui réalisent la borne inférieure $\inf_p \text{dist}(p, fp)$; ces sommets définissent une géodésique infinie sur laquelle f agit par translation (voir [9, p. 88]). On note $\text{Géo}(f)$ cette géodésique, et $\text{lg}(f)$ ("longueur de f ") la borne $\inf_p \text{dist}(p, fp)$. A noter que l'action de f induit naturellement une orientation sur $\text{Géo}(f)$; cependant cette notion de géodésique orientée ne nous servira pas avant la section 5.

Terminologie. Pour un élément f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ il est ainsi équivalent de dire que f est de type élémentaire (i.e., est conjugué à un automorphisme élémentaire), que $d(f) = 1$ et que $\text{Fix}(f)$ est non vide. De même sont équivalents: f est de type Hénon, $d(f) \geq 2$ et $\text{Fix}(f)$ est vide (Figs. 2, 3). Dans le texte nous emploierons les trois terminologies.

Remarquons qu'un automorphisme affine est de type élémentaire (c'est la triangulation des matrices).

Enfin, nous dirons qu'un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est de degré 1 si tous ses éléments sont de type élémentaire.

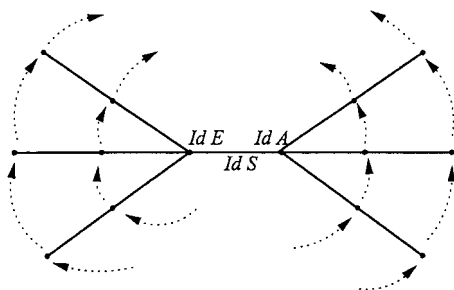
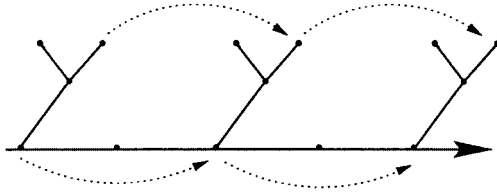


FIG. 2. Action d'un élément f avec $\text{Fix}(f) = \{\text{Id}S\}$.

FIG. 3. Action d'un élément f avec $\text{Fix}(f) = \emptyset$ et $\text{lg}(f) = 2$.

La proposition suivante regroupe quelques propriétés immédiates:

PROPOSITION 2.1. (1) Pour g de type Hénon $\text{lg}(g)$ est toujours pair, car un sommet de type φE (resp. φA) est toujours envoyé par g sur un sommet de type φE (resp. φA).

(2) Si $d(g) \geq 2$, et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\text{Géo}(g^n) = \text{Géo}(g)$ et $\text{lg}(g^n) = |n| \cdot \text{lg}(g)$.

(3) Si $d(f) = 1$ et $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, alors $\text{Fix}(\varphi f \varphi^{-1}) = \varphi \cdot \text{Fix}(f)$.

(4) De même, si $d(g) \geq 2$, $\text{Géo}(\varphi g \varphi^{-1}) = \varphi \cdot \text{Géo}(g)$.

Nous revenons maintenant sur la notion de produit amalgamé. Dire que $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_S E$ c'est dire que chaque f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ admet une décomposition de la forme $f = a_n \circ e_n \circ \dots \circ a_1 \circ e_1$ où $a_i \in A \setminus S$, $e_i \in E \setminus S$ (éventuellement f commence par un e_i ou finit par un a_i), et cette écriture est unique à ceci près qu'on peut faire des changements du type $(a_i \circ s^{-1}) \circ (s \circ e_i)$ au lieu de $a_i \circ e_i$ (où $s \in S$). En particulier la "taille" de f , i.e., le nombre de e_i et de a_i nécessaires pour écrire f , est bien définie (ici par exemple c'est $2n$). On dit que f est cycliquement réduit si f est de taille minimale dans sa classe de conjugaison. On voit qu'un inconvénient de la notion de produit amalgamé est que l'on n'a pas immédiatement une écriture unique pour chaque élément de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (comme dans le cas d'un produit libre). Cependant si on se donne $(a_i)_{i \in I}$ et $(e_j)_{j \in J}$ des systèmes de représentants des classes à gauche A/S et E/S , on récupère une écriture unique pour chaque élément de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, ainsi que pour chaque sommet et arête de \mathcal{T} .

Étant donnés de tels systèmes, considérons l'ensemble M des mots obtenus en juxtaposant alternativement un nombre fini de a_i et de e_j :

$$M = \left\{ a_{i_0} e_{j_1} \dots e_{j_n} a_{i_n}; \text{ où les } a_{i_k}, e_{j_k} \text{ sont non triviaux} \right. \\ \left. \text{sauf éventuellement } a_{i_0} \text{ et } a_{i_n} \right\}.$$

On a alors une bijection [9, p. 9]:

$$M \times S \rightarrow \text{Aut}[\mathbb{C}^2] \\ (a_{i_0} e_{j_1} \dots e_{j_n} a_{i_n}, s) \rightarrow a_{i_0} \circ e_{j_1} \circ \dots \circ a_{i_n} \circ s.$$

D'où les bijections:

$$M \rightarrow \text{arêtes de } \mathcal{F};$$

$$M^e \rightarrow \text{sommets de type } \varphi A \text{ de } \mathcal{F};$$

$$M^a \rightarrow \text{sommets de type } \varphi E \text{ de } \mathcal{F},$$

où M^e (resp. M^a) désigne l'ensemble des mots dans M dont le dernier élément (non trivial) est un e_j (resp. un a_i).

Tout ceci est utile en pratique car, suivant Wright [12], on peut expliciter des systèmes de représentants (a_i) et (e_j) très simples. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et pour tout $P \in Y^2\mathbb{C}[Y] \setminus \{0\}$ (i.e., P est un polynôme non nul avec $P(0) = P'(0) = 0$), on définit:

$$a(\lambda) = (\lambda x + y, x);$$

$$e(P) = (x + P(y), y).$$

Alors les $(a(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{C}}$ (resp. les $(e(P))_{P \in Y^2\mathbb{C}[Y] \setminus \{0\}}$) forment un système de représentants des classes à gauche non triviales A/S (resp. E/S). Ainsi un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ s'écrit de manière unique comme une composition de $a(\lambda)$ et de $e(P)$ (corrigée par un automorphisme $s \in S$ composé à droite): on dira que c'est l'écriture normale de φ . De même on parlera d'écriture normale pour les sommets et arêtes de \mathcal{F} .

EXEMPLE 2.2. Considérons l'application de Hénon $g = (y, y^2 + \delta x)$. On a

$$g = a(0) \circ e(y^2) \circ (\delta x, y).$$

L'automorphisme g correspond à une arête gS et à deux sommets gE, gA qui admettent respectivement comme écriture normale $a(0)e(y^2)S, a(0)E, a(0)e(y^2)A$.

Remarque 2.3. (1) Étant donné g de type Hénon, il est équivalent de dire que g est cycliquement réduit et que $\text{Géo}(g)$ contient l'arête IdS . En effet il est clair que $\text{dist}(IdE, gE) = \text{dist}(IdA, gA)$ si et seulement si $IdS \subset \text{Géo}(g)$, et dans ce cas cette distance est égale à la taille de g .

(2) Tous les $a(\lambda)$ et $e(P)$ fixent l'origine dans \mathbb{C}^2 , on en déduit que $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ fixe 0 si et seulement s'il s'écrit $f = a_{i_0} \circ e_{j_1} \circ \cdots \circ a_{i_n} \circ s$ avec $s(0) = 0$, i.e. $s = (a_1x + b_1y, b_2y)$.

Nous énonçons maintenant notre théorème principal, dont la preuve fera l'objet des deux sections suivantes:

THÉORÈME 2.4. *Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. L'une des possibilités suivantes, qui s'excluent mutuellement, est réalisée:*

- (1) *G est un groupe de degré 1 conjugué à un sous-groupe de E ou de A .*
- (2) *G est un groupe de degré 1 mais n'est pas conjugué à un sous-groupe de E ou de A . Alors G est abélien.*
- (3) *G contient des éléments de type Hénon, et ceux-ci ont tous même géodésique. Alors G est résoluble.*
- (4) *G contient deux éléments de type Hénon avec des géodésiques différentes. Alors G contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

On en déduit immédiatement le

COROLLAIRE 2.5. *Le groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ vérifie l'alternative de Tits: si G est un sous-groupe de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ alors l'une des deux possibilités suivantes est réalisée.*

- (1) *G contient un groupe résoluble d'indice fini;*
- (2) *G contient un groupe libre non abélien.*

Preuve. Dans les cas (2), (3) et (4) du théorème le résultat est clair. Reste le cas 1 où l'on se ramène à un sous-groupe de E ou de A . Les groupes dérivés de E se calculent facilement:

$$E^{(1)} = [E, E] = \{(x + P(y), y + \gamma); P \in \mathbb{C}[X], \gamma \in \mathbb{C}\};$$

$$E^{(2)} = \{(x + P(y), y); P \in \mathbb{C}[X]\};$$

$$E^{(3)} = \{Id\}.$$

Ainsi E est résoluble; d'autre part A peut évidemment être vu comme un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$ grâce au morphisme de groupe injectif suivant:

$$A \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$$

$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut à l'aide de l'alternative de Tits dans le cadre des groupes linéaires, voir par exemple [6] pour une présentation de ce théorème difficile. ■

A noter qu'il existe des groupes opérant fidèlement sur un arbre mais ne vérifiant pas l'alternative de Tits. On trouvera dans [11] l'exemple d'un tel groupe: il s'agit d'un groupe infini, de type fini, dont tous les éléments sont d'ordre fini (je remercie E. Ghys pour cet exemple).

3. ÉTUDE DES AUTOMORPHISMES DE TYPE ÉLÉMENTAIRE

Nous allons dans un premier temps étudier les automorphismes de degré 1, et en particulier caractériser les automorphismes f admettant un arbre $\text{Fix}(f)$ non borné. De tels automorphismes vont apparaître ou bien lorsque nous prendrons le commutateur de deux automorphismes de type Hénon qui ont même géodésique (cas (3) du théorème), ou bien quand nous considérerons des automorphismes qui fixent un bout de l'arbre (ce sera la situation dans le cas (2)). Dans un deuxième temps nous étudierons les sous-groupes de degré 1, ce qui correspond aux cas (1) et (2) du théorème 2.4.

Notons qu'il n'est pas tout à fait évident *a priori* qu'il existe bien des automorphismes (autres que l'identité) qui fixent un sous-arbre non borné de \mathcal{T} . Le lemme suivant va nous permettre de produire des exemples de tels automorphismes.

LEMME 3.1. Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, avec $d(f) = 1$ et $d(g) \geq 2$. Supposons que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$.

Preuve. Soit p un sommet dans $\text{Fix}(f)$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$f(g^n(p)) = g^n(f(p)) = g^n(p)$$

i.e., $g^n(p) \in \text{Fix}(f)$. Ainsi pour tout n l'arbre $\text{Fix}(f)$ contient le chemin reliant $g^{n-1}(p)$ à $g^n(p)$, et chacun de ces chemins contient $\lg(g)$ arêtes de $\text{Géo}(g)$. Le résultat est alors clair (Fig. 4). ■

Remarquons maintenant que pour certains automorphismes très simples le lemme ci-dessus est efficace:

EXEMPLE 3.2. Si $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre, alors il est facile de construire des exemples de g avec $d(g) \geq 2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Le lemme 3.1 s'applique donc: $\text{Fix}(f)$ est un sous-arbre de \mathcal{T} de diamètre infini, car il contient $\text{Géo}(g)$.

- Si $\alpha = \beta$ et $\alpha^n = 1$, il suffit de prendre $g = (y, y^{n+1} + x)$.

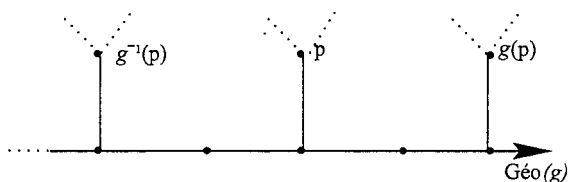


FIG. 4. $\text{Fix}(f)$ contient les $g^n(p) \Rightarrow \text{Fix}(f)$ contient $\text{Géo}(g)$.

• Si $\alpha \neq \beta$ alors il existe $p, q \geq 2$ tels que $\alpha^p = \beta$, $\beta^q = \alpha$. Posons $g_1 = (y, y^p + x)$, $g_2 = (y, y^q + x)$, alors $g = g_1 \circ g_2$ convient.

Le sens de la proposition suivante est de montrer que les exemples 3.2 sont les seuls (à conjugaison près). C'est là un résultat crucial pour la preuve du théorème 2.4, et il est à noter que ce résultat ne découle pas directement de la théorie de Bass-Serre mais est au contraire très particulier au groupe $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. En fait on s'aperçoit que si $\text{Fix}(f)$ est borné alors $\text{Fix}(f)$ est petit (de diamètre au plus 6), ce qui autorise une preuve calculatoire:

PROPOSITION 3.3. *Soit f dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré 1. Alors $\text{Fix}(f)$ est de diamètre infini si et seulement si f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre.*

Preuve. Puisque $d(f) = 1$, en conjuguant on se ramène à $f \in E$. A conjugaison dans E près f est alors d'un des quatre types suivant (cf. [5]):

- (1) $(\alpha x, \beta y)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$;
- (2) $(x + 1, \beta y)$ ou $(\beta x, y + 1)$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$;
- (3) $(\beta^d x + \beta^d y^d, \beta y)$ avec $d \geq 1$, $\beta \in \mathbb{C}^*$;
- (4) $(\beta^d x + \beta^d y^d q(y^r), \beta y)$ avec $d \geq 1$, q non constant de plus haut coefficient $+1$, β racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité.

Nous étudions maintenant chacun des cas, en suivant plus ou moins un ordre croissant de complexité pour $\text{Fix}(f)$.

Dans le cas (4), et dans le cas (3) avec $d \geq 2$, même en conjuguant dans $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ on ne peut pas baisser le degré de f (lemme 6-7 de [5]). En particulier f n'est pas conjugué à un élément de S , donc $\text{Fix}(f)$ est réduit à un seul sommet (de type φE).

Dans tous les cas restant on a $f \in S$, donc $\text{Fix}(f)$ contient l'arête $\text{Id}S$. Rappelons que $\text{Fix}(f)$ est un arbre, donc si f fixe une autre arête il fixe également tout le chemin reliant cette arête à $\text{Id}S$ (Fig. 5). L'idée est maintenant, en utilisant les écritures normales, de donner les équations que doit vérifier f pour fixer une arête voisine de $\text{Id}S$. Par exemple on a:

$$f \text{ fixe l'arête } a(\lambda)S \Leftrightarrow f \in a(\lambda)Sa(\lambda)^{-1} \Leftrightarrow a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) \in S.$$

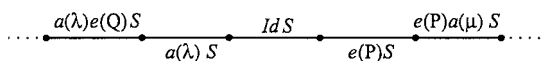


FIG. 5. Écritures normales des arêtes voisines de $\text{Id}S$.

Plaçons-nous dans le cas (3) avec $d = 1$, i.e., $f = (\beta x + \beta y, \beta y)$. On calcule:

$$\begin{aligned} a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) &= (y, x - \lambda y) \circ (\beta x + \beta y, \beta y) \circ (\lambda x + y, x) \\ &= (\beta x, \beta y + \beta x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(P)^{-1}fe(P) &= (x - P(y), y) \circ (\beta x + \beta y, \beta y) \circ (x + P(y), y) \\ &= (\beta x + \beta y + \beta P(y) - P(\beta y), \beta y). \end{aligned}$$

On voit que f ne fixe aucune arête de la forme $a(\lambda)S$, car $(\beta x, \beta y + \beta x) \notin S$. D'autre part f ne peut fixer une arête $e(P)S$ que si $P(\beta y) = \beta P(y)$. Dans ce cas β est une racine de l'unité, et on remarque que $e(P)^{-1}fe(P) = f$. Ainsi par le calcul précédent $a(\lambda)^{-1}e(P)^{-1}fe(P)a(\lambda) \notin S$, ce qui revient à dire que f ne fixe pas d'arête de la forme $e(P)a(\lambda)S$. Finalement $\text{Fix}(f)$ ne contient que l'arête IdS si β n'est pas une racine de l'unité, et contient IdS plus des arêtes de la forme $e(P)S$ si β est racine. Ainsi $\text{Fix}(f)$ est de diamètre inférieur où égal à 2.

Passons au cas (2), i.e., $f = (x + 1, \beta y)$ (le cas $f = (\beta x, y + 1)$ se déduit par conjugaison par (y, x)). On a:

$$a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, \lambda(1 - \beta)x + y + 1).$$

Donc f fixe $a(\lambda)S$ si $\lambda = 0$ ou si $\beta = 1$ et dans les deux cas on a $a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, y + 1)$. En conjuguant par $e(Q)^{-1}$ on obtient:

$$e(Q)^{-1} \circ (\beta x, y + 1) \circ e(Q) = (\beta x + \beta Q(y) - Q(y + 1), y + 1).$$

Cet automorphisme ne peut être dans S que si $\beta = 1$ et $Q(y) = ay^2$, et on a alors $e(Q)^{-1} \circ (x, y + 1) \circ e(Q) = (x - 2ay - a, y + 1)$. Une troisième conjugaison donne:

$$a(\mu)^{-1} \circ (x - 2ay - a, y + 1) \circ a(\mu) = (x + 1, y - 2ax - a - \mu)$$

et cet automorphisme ne peut être dans S , pour tout choix de μ . Ainsi f ne fixe aucune arête de la forme $a(\lambda)e(Q)a(\mu)S$. Regardons maintenant les arêtes $e(P)S$:

$$e(P)^{-1}fe(P) = (x + 1 + P(y) - P(\beta y), \beta y).$$

On voit que f fixe $e(P)S$ dès que $P(y) = P(\beta y)$ et on a alors $e(P)^{-1}fe(P) = f$; on est ainsi ramené aux calculs précédents. On conclut là-encore que $\text{Fix}(f)$ est de diamètre fini. C'est dans le cas $\beta = 1$ que ce diamètre est maximal; les calculs ci-dessus montrent que dans ce cas $\text{Fix}(f)$ contient des arêtes de la forme $a(\lambda)e(Q)S, a(\lambda)S, IdS, e(P)S,$

$e(P)a(\mu)S$ et $e(P)a(\mu)e(Q)S$: on voit que $\text{Fix}(f)$ est de diamètre 6.

Étudions enfin le cas (1), i.e., $f = (\alpha x, \beta y)$. Comme précédemment on calcule:

$$\begin{aligned} a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) &= (\beta x, \lambda(\alpha - \beta)x + \alpha y); \\ e(P)^{-1}fe(P) &= (\alpha x + \alpha P(y) - P(\beta y), \beta y). \end{aligned}$$

Donc f fixe $a(\lambda)S$ si $\alpha = \beta$ ou si $\lambda = 0$, dans les deux cas on a $a(\lambda)^{-1}fa(\lambda) = (\beta x, \alpha y)$. D'autre part f fixe $e(P)S$ si $P(\beta y) = \alpha P(y)$, ce qui implique $\alpha = \beta^n$, où n est le degré de P . De plus on remarque qu'alors $e(P)^{-1}fe(P) = f$.

Donc $e(Q)^{-1}a(\lambda)^{-1}fa(\lambda)e(Q) \in S$ implique $\beta = \alpha^m$ où $m = \text{degré de } Q$. Il est clair enfin que l'existence de $n, m \geq 2$ tels que $\alpha^m = \beta$ et $\alpha = \beta^n$ implique que α et β sont des racines de l'unité de même ordre. On est ainsi dans le cadre des exemples 3.2, et nous avons vu que ceux-ci possèdent un arbre fixé non borné. ■

Remarque 3.4. Les calculs de la preuve ci-dessus (dans le cas 1) permettent de préciser quelles arêtes appartiennent à $\text{Fix}(f)$ quand ce dernier est non borné. Soit $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre, et soit $\varphi S = a(\lambda_1)e(P_1) \cdots a(\lambda_n)e(P_n)S$ une arête. On distingue deux cas:

(1) $\alpha = \beta$: $\varphi S \in \text{Fix}(f)$ si et seulement si les P_j vérifient $P_j(\alpha x) = \alpha P_j(x)$ (les λ_i peuvent être choisis arbitrairement). Cela revient à dire que f commute avec chaque $a(\lambda_i)$ et $e(P_j)$.

(2) $\alpha \neq \beta$: $\varphi S \in \text{Fix}(f)$ si et seulement si les λ_i sont tous nuls et les P_j vérifient $P_{2k+1}(\alpha y) = \beta P_{2k+1}(y)$ et $P_{2k}(\beta y) = \alpha P_{2k}(y)$, ce qui revient à dire que $e(P_{2k+1})$ (resp. $e(P_{2k})$) commute avec $(\beta x, \alpha y)$ (resp. $(\alpha x, \beta y)$).

On a des résultats analogues quand l'écriture de φ commence par un $e(P)$ ou finit par un $a(\lambda)$.

Remarque 3.5. Il est maintenant clair que l'action de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sur l'arbre \mathcal{T} est fidèle. En effet soit $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui agit sur l'arbre comme l'identité. D'après la proposition 3.3 f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre, et par la remarque précédente une telle rotation ne fixe tout l'arbre que si elle est égale à l'identité. A noter que pour certain produit amalgamé l'action induite n'est pas fidèle, par exemple dans $SL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ la matrice $-Id$ agit comme l'identité sur l'arbre associé.

COROLLAIRE 3.6. Soit $f = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre, et soit g de degré ≥ 2 . On suppose $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$. Alors il existe $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ tel que

- $\varphi g \varphi^{-1}$ soit cycliquement réduit;
- $\varphi f \varphi^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ ou $(\beta x, \alpha y)$.

Preuve. Il suffit de prendre φ tel que $\varphi^{-1}S \in \text{Géo}(g)$. En effet $\varphi^{-1}.\text{Géo}(\varphi g \varphi^{-1}) = \text{Géo}(g)$, d'où $\text{Id}S \in \text{Géo}(\varphi g \varphi^{-1})$ et on applique la remarque 2.3. De plus $\varphi f \varphi^{-1}$ est encore diagonal par la remarque 3.4. ■

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant:

LEMME 3.7. Soient $f_1, f_2 \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, avec $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2)$ non borné. Alors f_1 et f_2 commutent; de plus ils admettent chacun un unique point fixe qui leur est commun.

Preuve. En conjuguant on peut supposer que f_1 et f_2 sont dans E (puisqu'ils fixent tous deux un sommet de type φE , et même, en fait, une infinité de tels sommets). Alors le commutateur $h := f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}$ est de la forme $(x + P(y), y + \gamma)$; de plus $\text{Fix}(h)$ est non borné donc h est d'ordre fini par la proposition 3.3. On en déduit que $h = \text{Id}$.

Les automorphismes f_1 et f_2 ayant par hypothèse des arbres fixés associés non bornés, ils sont chacun conjugués à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre. En particulier ils ont un unique point fixe dans \mathbb{C}^2 , et comme ils commutent leurs points fixes coïncident. ■

Nous allons maintenant étudier les sous-groupes de degré 1 de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On pourrait avoir envie de dire qu'un tel groupe doit être conjugué à un sous-groupe de A ou E . Nous allons voir que c'est faux en général (exemple de Wright), mais vrai en rajoutant certaines hypothèses. Nous utiliserons les trois lemmes suivants:

LEMME 3.8. Soit G un sous-groupe de degré 1, et soient $f, g \in G$. Alors $\text{Fix}(g) \cap \text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Preuve. L'idée est de considérer $p \in \text{Fix}(g \circ f)$, et q le milieu du chemin reliant p à $f(p)$. Alors $q \in \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$ (voir [9, Proposition 26, p. 89]). ■

LEMME 3.9. Soient X un arbre, et X_1, \dots, X_n des sous-arbres deux à deux non disjoints. Alors $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$.

Preuve. Voir [9, Lemme 10, p. 91].

LEMME 3.10. Soient X un arbre, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-arbres de X , tel que:

$$(1) X_i \cap X_j \neq \emptyset \quad \forall i, j \in I;$$

(2) Il existe Y un sous-arbre borné de X , tel que $\forall i \in I, X_i \subset Y$. Alors $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur le diamètre n de Y . Si $n = 0$ (i.e., si Y est réduit à un seul sommet), alors pour tout i on a $X_i = Y$ et donc $\bigcap_i X_i = Y$. Si $n \geq 1$, alors ou bien il existe un sommet terminal de Y (i.e., un sommet qui n'appartient qu'à une seule arête) contenu dans tous les X_i , ce qui termine la démonstration, ou bien il n'en existe pas et on continue le raisonnement avec $Y' := Y \setminus \{\text{sommets et arêtes terminaux de } Y\}$, $X'_i := X_i \cap Y'$. ■

Nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 3.11. Soit G un sous-groupe de degré 1 de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite:

(1) G est de type fini;

(2) G contient un élément f avec $\text{Fix}(f)$ borné.

Alors G est conjugué à un sous-groupe de A ou de E .

Preuve. Supposons d'abord G de type fini, i.e. $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, $g_i \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On note $X_i = \text{Fix}(g_i)$. Le lemme 3.8 dit alors que les X_i sont deux à deux non disjoints, et donc par le lemme 3.9 leur intersection globale contient au moins un sommet P . Ce sommet P s'écrit φA ou φE (avec $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$), et G est inclu dans le stabilisateur de P , i.e., $G \subset \varphi A \varphi^{-1}$ ou $\varphi E \varphi^{-1}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas (2): il existe $f \in G$ avec $\text{Fix}(f)$ borné. Pour chaque $g \in G$ on note maintenant $X_g = \text{Fix}(g) \cap \text{Fix}(f)$. Si $g_1, g_2 \in G$, le lemme 3.8 appliqué trois fois (aux couples (g_1, f) , (g_2, f) et (g_1, g_2)) implique que $X_{g_1} \cap X_{g_2} \neq \emptyset$. On est alors exactement dans les conditions du lemme 3.10 puisque chaque élément de la famille $(X_g)_{g \in G}$ est contenu dans l'arbre borné $\text{Fix}(f)$. Ainsi G est encore inclu dans le stabilisateur d'un sommet P (où $P \in \bigcap_{g \in G} X_g$). ■

Pour ce qui concerne l'existence de sous-groupes de degré 1 qui ne soient pas conjugués à un sous-groupe de E ou de A , nous renvoyons à [12] où un exemple explicite est construit. Nous nous contentons d'énoncer la proposition suivante qui caractérise de tels sous-groupes:

PROPOSITION 3.12. *Soit G un sous-groupe de degré 1 qui n'est pas conjugué à un sous-groupe de A ou de E . Alors:*

- (1) G est abélien;
- (2) G est égal à l'union d'une famille croissante de groupes H_i , $i \in \mathbb{N}$, où chaque H_i est conjugué à un groupe cyclique fini engendré par une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre;
- (3) chaque élément de G admet un seul point fixe (en tant qu'automorphisme de \mathbb{C}^2) et ce point fixe est le même pour tous les éléments de G ;
- (4) l'action de G fixe un bout de l'arbre \mathcal{T} .

Preuve. Comme G n'est pas conjugué à un sous-groupe de A ou de E , il ne fixe aucun sommet. Par la proposition 3.11 on en déduit que chaque élément de G admet un arbre fixe non borné, i.e., est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre. De plus, si $f, g \in G$ alors $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$ est non borné, en effet sinon on pourrait appliquer le lemme 3.10 avec $Y = \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g)$, $X_{g_i} = \text{Fix}(g_i) \cap Y$, ce qui contredirait le fait que G n'est inclus dans le stabilisateur d'aucun sommet. Par le lemme 3.7, on obtient (1) et (3).

Montrons maintenant l'assertion (2). Toujours d'après la proposition 3.11 le groupe G n'est pas de type fini. De plus remarquons que si $f, g \in G$ sont de même ordre alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n = g$. En effet sinon on peut supposer (en conjuguant) $f, g \in E$ et on pourrait trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^m \circ g = (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma) \neq \text{Id}$$

avec $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$. Mais ceci est impossible car α et β doivent être des racines du même ordre (donc $\alpha = \beta = 1$) et $f^m \circ g$ doit être d'ordre fini. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que n_i soit l'ordre d'un élément de G . Définissons H_i comme le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre inférieur ou égal à n_i . Ce groupe H_i est fini et contient un élément f_i (non nécessairement unique) d'ordre maximal. Reste à voir que f_i engendre H_i . Soit $g \in H_i$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f_i^n et g soient de même ordre. Par le raisonnement ci-dessus on a donc $f_i^{n'} = g$ pour un certain $n' \in \mathbb{N}$.

Il est clair enfin que $\text{Fix}(f_{i+1}) \subset \text{Fix}(f_i)$, de plus $\bigcap_i \text{Fix}(f_i)$ est vide, ce qui donne (4) (voir [9, pp. 92–93]). ■

4. LES AUTOMORPHISMES DE TYPE HÉNON

Étant donné $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 nous cherchons maintenant à caractériser les f qui commutent avec g , ou au contraire les f tels que f

et g ne soient liés par aucune relation. Pour préciser la position relative de deux géodésiques (associées à des automorphismes) nous utiliserons la

PROPOSITION 4.1. *Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec $d(g) \geq 2$ et $d(f) = 1$. On suppose $\text{Géo}(g) \cap \text{Fix}(f)$ non borné. Par la proposition 3.3 on peut écrire $\varphi f \varphi^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre, et alors:*

- (1) *Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha^n = \beta$, $\beta^n = \alpha$ et $\text{lg}(g) = 2 \pmod{4}$, alors $gfg^{-1} = \varphi^{-1}(\beta x, \alpha y)\varphi = f^n$ (et donc f et g^2 commutent);*
- (2) *Dans tous les autres cas f et g commutent.*

En particulier $\text{Géo}(g) \subset \text{Fix}(f)$.

Preuve. En conjuguant par φ nous pouvons supposer $f = (\alpha x, \beta y)$, et donc $f(0) = 0$. Rappelons que $\text{Fix}(gfg^{-1}) = g.\text{Fix}(f)$, ainsi:

$$\text{Géo}(g) \cap \text{Fix}(f) \text{ non borné} \Rightarrow \text{Fix}(gfg^{-1}) \cap \text{Fix}(f) \text{ non borné.}$$

On en déduit par le lemme 3.7 que gfg^{-1} fixe 0, et donc g fixe 0 également.

On peut ainsi écrire $g = m \circ s$, où $m = a(\lambda_m) \circ e(P_n) \circ \dots \circ a(\lambda_1) \circ e(p_1)$ et $s = (a_1x + b_1y, b_2y)$ (plus précisément on peut supposer m de cette forme quitte à conjuguer). Quitte à conjuguer à nouveau, les arêtes mS et $msa(\lambda_n)S$ sont dans $\text{Fix}(f)$, et on a $msa(\lambda_n)S = ma(\mu_n)S$ où μ_n est tel que $a(\mu_n)^{-1}sa(\lambda_n) \in S$.

Si $\alpha = \beta$ alors f commute avec s (immédiat) et avec m (rem. 3.4), donc avec g .

Si $\alpha \neq \beta$ alors dans l'écriture ci-dessus on a $\mu_n = \lambda_n = 0$ (rem. 3.4), d'où $s = (a_1x, b_2y)$. Ainsi f commute encore avec s . De plus, encore par la remarque 3.4, on a $g \circ (\alpha x, \beta y) \circ g^{-1} = (\alpha x, \beta y)$ (resp. $(\beta x, \alpha y)$) quand $\text{lg}(g) = 0 \pmod{4}$ (resp. $2 \pmod{4}$). Enfin, dans le deuxième cas, on vérifie qu'il existe n tel que $\alpha^n = \beta$ et $\beta^n = \alpha$. ■

COROLLAIRE 4.2. *Soient f et g deux automorphismes de type Hénon. Alors ou bien $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$, ou bien $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ est borné (éventuellement vide).*

Preuve. Supposons que $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ soit non borné. Alors quitte à prendre des puissances de f et g (ce qui ne change pas les géodésiques), on peut supposer que $\text{lg}(f) = \text{lg}(g)$, $\text{lg}(f) = 0 \pmod{4}$ et que f et g induisent la même orientation sur $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$. L'automorphisme fg^{-1} fixe alors un nombre infini de sommets de $\text{Géo}(g)$, donc la proposition 4.1 affirme que g et fg^{-1} commutent, et on a alors

$$g(fg^{-1})f^{-1} = (fg^{-1})gf^{-1} = Id$$

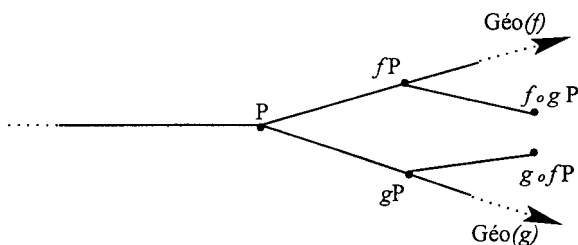


FIG. 6. $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$ et $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ non borné $\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$.

i.e., f et g commutent et en regardant l'action sur l'arbre on voit facilement que $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ (Fig. 6). ■

Si on se donne $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon avec $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$, on déduit de la proposition 3.3 qu'il existe une relation entre f et g . En effet $fgf^{-1}g^{-1}$ fixe $\text{Géo}(g)$, donc il existe n tel que $(fgf^{-1}g^{-1})^n = \text{Id}$. Nous étudions maintenant le cas $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$:

PROPOSITION 4.3. *Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 , avec $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$. On suppose $\text{lg}(f) > N$ et $\text{lg}(g) > N$ où N est le diamètre de $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$.*

Alors f et g engendrent un groupe libre, de plus les éléments (sauf l'identité) de $\langle f, g \rangle$ sont de degré ≥ 2 .

Preuve. Il faut vérifier que pour tout h défini par

$$h = f^{n_p} \circ g^{m_p} \circ \dots \circ f^{n_1} \circ g^{m_1}$$

avec les n_i et les m_i dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $d(h) \geq 2$ (et donc en particulier $h \neq \text{Id}$). Pour cela, il suffit de vérifier que h ne fixe aucun sommet de \mathcal{T} .

Soit donc Q un sommet de \mathcal{T} . On introduit les notations suivantes: on pose $\text{dist}_f(Q)$ la distance de Q à $\text{Géo}(f)$ (même chose pour g), et \mathcal{T}_f (resp. \mathcal{T}_g) le sous-arbre de \mathcal{T} constitué des sommets P vérifiant $\text{dist}_f(P) \leq \text{dist}_g(P)$ (resp. $\text{dist}_f(P) \geq \text{dist}_g(P)$). Le résultat s'obtient alors par récurrence sur p , à l'aide des deux assertions suivantes. On prend $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et on pose $Q' = (f^n \circ g^m)Q$.

(1) Si $Q \in \mathcal{T}_f$, alors $Q' \in \mathcal{T}_f$ et $\text{dist}_f(Q') > \text{dist}_f(Q)$. En effet l'hypothèse $\text{lg}(g) > N$ implique $g^m(Q) \in \mathcal{T}_g$ avec en plus une inégalité stricte:

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) < \text{dist}_f(g^m(Q)).$$

L'hypothèse $\text{lg}(f) > N$ assure alors $Q' = f^n \circ g^m(Q) \in \mathcal{T}_f$. De plus on a

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) = \text{dist}_g(Q) \geq \text{dist}_f(Q)$$

(l'égalité est claire, l'inégalité vient de $Q \in \mathcal{F}_f$). Donc

$$\begin{aligned} \text{dist}_f(g^m(Q)) &> \text{dist}_f(Q) \Rightarrow \text{dist}_f(f^n \circ g^m(Q)) \\ &> \text{dist}_f(f^n(Q)) = \text{dist}_f(Q). \end{aligned}$$

(2) Si $Q \in \mathcal{F}_g$ et $Q' \in \mathcal{F}_g$, alors $\text{dist}_g(Q') < \text{dist}_g(Q)$. Il est clair que $g^m(Q) \notin \mathcal{F}_g$ (car sinon $f^n \circ g^m(Q) \in \mathcal{F}_f$); autrement dit

$$\text{dist}_g(g^m(Q)) > \text{dist}_f(g^m(Q))$$

et le résultat se déduit grâce aux relations

$$\begin{aligned} \text{dist}_g(Q) &= \text{dist}_g(g^m(Q)); \\ \text{dist}_f(g^m(Q)) &= \text{dist}_f(f^n \circ g^m(Q)) \geq \text{dist}_g(f^n \cdot g^m(Q)). \end{aligned}$$

Remarque 4.4. La preuve ci-dessus est essentiellement un “ping-pong”, technique classique dans ce genre de problème (voir [6]). Cependant il nous a semblé intéressant de payer le prix de quelques calculs supplémentaires pour obtenir que *tous* les éléments de G sont de type Hénon. En particulier dans la section 5 nous utiliserons le fait que $d(\text{fgf}^{-1}g^{-1}) \geq 2$.

On obtient immédiatement les deux corollaires:

COROLLAIRE 4.5. Soient f, g de type Hénon. Si $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$, alors $\langle g, f \rangle$ contient un groupe libre non abélien.

Preuve. En notant N le diamètre de $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$, il suffit de prendre n tel que $\text{lg}(f^n) > N$ et $\text{lg}(g^n) > N$. On a alors $\langle f^n, g^n \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 4.6. Soient f, g de type Hénon. Si $g \circ f = f \circ g$, alors $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$.

Nous allons maintenant calculer le centralisateur d'un automorphisme g de type Hénon, que nous noterons

$$\text{Cent}(g) = \{f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]; f \circ g = g \circ f\}.$$

LEMME 4.7. Soit $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 . On note

$$H = \{f \in \text{Cent}(g); d(f) = 1\}.$$

Alors H est conjugué à un groupe engendré par une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre.

Preuve. Remarquons que pour chaque $f \in H$ l'arbre $\text{Fix}(f)$ est non borné car il contient $\text{Géo}(g)$ (lemme 3.1); donc f est d'ordre fini par la proposition 3.3. De plus l'ordre de f est borné par le degré (dynamique) de g . En effet f induit une permutation sur l'ensemble des points fixes (dans \mathbb{C}^2) de g , qui est de cardinal égal au degré de g en comptant les multiplicités (voir [5]). Soit $f_0 \in H$ d'ordre maximal parmi les éléments de H . Nous reprenons maintenant les arguments de la preuve de la proposition 3.12. Si $h \in H$ alors l'ordre de f_0 est un multiple de l'ordre de h , de plus si h_1 et h_2 sont deux éléments de H de même ordre, alors il existe n et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_1^n = h_2$ et $h_2^m = h_1$. Finalement $H = \langle f_0 \rangle$ ce qui est le résultat attendu. ■

PROPOSITION 4.8. *Soit $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 . Alors $\text{Cent}(g)$ est engendré par deux éléments h et f satisfaisant:*

(1) $d(h) \geq 2$ et $\text{Géo}(g) = \text{Géo}(h)$;

(2) f est conjugué à une rotation $(\alpha x, \beta y)$ avec α, β racines de l'unité de même ordre;

(3) Il existe n tel que $f \circ h = h \circ f^n$.

En particulier $\text{Cent}(g)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est l'ordre de f .

Preuve. L'automorphisme f est donné par le lemme 4.7, et parmi les automorphismes de degré ≥ 2 de $\text{Cent}(g)$ (qui ont tous même géodésique, cor. 4.6) on choisit h qui minimise $\text{lg}(h)$. Soit $\varphi \in \text{Cent}(g)$ de degré ≥ 2 , alors $\text{lg}(h)$ divise $\text{lg}(\varphi)$ (faire une division euclidienne), donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi \circ h^q$ soit de degré 1, i.e., $\varphi \circ h^q \in \langle f \rangle$ et donc on a bien $\varphi \in \langle h, f \rangle$.

L'entier n est donné par la proposition 4.1, et est donc égal à 1 ou à $(p + 1)/2$. ■

Remarque 4.9. (1) Cette situation contraste avec le cas des automorphismes de degré 1 qui ont tous un centralisateur non dénombrable.

(2) L'entier n de la proposition est la plupart du temps égal à 1, i.e., le groupe $\text{Cent}(g)$ est souvent isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ou même à \mathbb{Z}).

(3) Attention, la réciproque du corollaire 4.6 est fautive. Par exemple, si on note $g = (y, y^2 + x)$ et $f = (jx, j^2y)$ où j est une racine cubique de l'unité, alors g et $g \circ f$ sont deux automorphismes de type Hénon qui ont même géodésique mais qui ne commutent pas.

Pour finir la preuve du théorème 2.4 il reste à traiter le cas des sous-groupes dont tous les éléments de type Hénon ont même géodésique. Ces sous-groupes sont toujours résolubles comme le montre la

PROPOSITION 4.10. *On se donne Γ une géodésique infinie, telle que $\Gamma = \text{Géo}(g)$ pour un certain $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. Alors il existe un unique sous-*

groupe G de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, maximal pour la propriété: "tous les éléments de type Hénon de G admettent Γ comme géodésique". De plus G est résoluble, et contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} d'indice fini.

Preuve. Si G existe il contient déjà toutes les puissances de g . Montrons d'abord que tout ϕ candidat à être dans G doit laisser Γ globalement invariante. En effet supposons $\phi(\Gamma) \neq \Gamma$, alors on aurait $d(\phi \circ g \circ \phi^{-1}) \geq 2$ avec $\text{Géo}(\phi \circ g \circ \phi^{-1}) = \phi\Gamma \neq \Gamma$, ce qui est contraire à la propriété exigée de G .

On est ainsi conduit à poser G égal au groupe des automorphismes qui laissent Γ globalement invariante; nous allons montrer que G est résoluble. Pour cela, cherchons des générateurs pour G . On distingue dans G trois sous-ensembles qui forment une partition:

- (1) L'ensemble T_Γ des automorphismes qui agissent sur Γ par translation (non triviale);
- (2) le groupe F_Γ des automorphismes qui fixent Γ ;
- (3) l'ensemble S_Γ des automorphismes qui agissent sur Γ par symétrie autour d'un sommet.

On remarque que F_Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, en effet $F_\Gamma \subset \text{Cent}(g^2)$ (prop. 4.1) et on applique le lemme 4.7. Choisissons $h \in T_\Gamma$ qui minimise $\text{lg}(h)$, $f \in F_\Gamma$ qui engendre F_Γ et $\varphi \in S_\Gamma$ quelconque ($\varphi = \text{Id}$ si $S_\Gamma = \emptyset$). On a $G = \langle h, f, \varphi \rangle$. En effet si $\phi \in T_\Gamma$, on a $\text{lg}(h)$ qui divise $\text{lg}(\phi)$, d'où $\phi = h^n \circ f^q$. D'autre part si $\phi \in S_\Gamma$, ou bien ϕ et φ ont même centre, et $\phi \circ \varphi \in \langle f \rangle$, ou bien ϕ et φ n'ont pas même centre, et $\phi \circ \varphi \in T_\Gamma$. Dans les deux cas $\phi \in \langle h, f, \varphi \rangle$.

Montrons maintenant que G est résoluble. On a:

$$[T_\Gamma, F_\Gamma] \subset F_\Gamma,$$

$$[T_\Gamma, S_\Gamma] \subset T_\Gamma,$$

$$[F_\Gamma, S_\Gamma] \subset F_\Gamma,$$

où $[T_\Gamma, F_\Gamma]$ désigne l'ensemble des commutateurs de la forme $h_0 f_0 h_0^{-1} f_0^{-1}$ avec $h_0 \in T_\Gamma$ et $f_0 \in F_\Gamma$.

Donc $G^{(1)} = [G, G] \subset \langle T_\Gamma, F_\Gamma \rangle$, et $G^{(2)} \subset F_\Gamma$ est abélien.

Enfin G quotienté par le groupe fini $\langle f, \varphi \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Z} (le générateur étant la classe de h dans $G/\langle f, \varphi \rangle$). ■

Remarque 4.11. Si G est un groupe dont tous les éléments de degré ≥ 2 ont même géodésique Γ , et s'il existe $\varphi \in G$ qui agit par symétrie sur Γ , montrons alors que tous les éléments de G ont un déterminant jacobien de module 1.

Suivant la preuve de la proposition ci-dessus $G = \langle h, f, \varphi \rangle$ avec $\text{Géo}(h) = \Gamma$, $\Gamma \subset \text{Fix}(f)$. On remarque que $|\det D\varphi| = 1$, en effet $\varphi^2 \in \langle f \rangle$ et $|\det Df| = 1$. Mais on peut aussi écrire $G = \langle f, \varphi, \varphi \circ h \rangle$, et $\varphi \circ h$ agit par symétrie sur Γ . Ainsi les trois générateurs ont un déterminant jacobien de module 1.

Synthèse de la preuve du théorème 2.4. Les cas (1) et (2) ont été traités dans la section 3. Plus précisément, le cas (2) correspond aux “groupes de Wright” qui sont caractérisés par la proposition 3.12.

Le cas (3) est donné par la proposition 4.10, on voit que ces sous-groupes sont non seulement résolubles, mais en fait d’une forme très particulière. Enfin le cas (4) correspond au corollaire 4.5; à noter que ce résultat découle de la théorie de Bass-Serre, par contre les énoncés plus précis 4.2 et 4.3 sont particuliers à $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$.

Au passage nous avons également montré deux résultats annexes intéressants:

- (1) description des $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ avec $\text{Fix}(f)$ non borné (prop. 3.3);
- (2) description du centralisateur d’un automorphisme de type Hénon (prop. 4.8).

5. FONCTIONS DE GREEN ET DOMAINES DE FATOU–BIEBERBACH

Nous rappelons tout d’abord quelques définitions et résultats concernant la dynamique des automorphismes de degré ≥ 2 , pour plus de détails on pourra consulter [1, 2, 10].

Considérons $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon; nous avons vu que f s’écrit $f = \varphi g \varphi^{-1}$ où $\varphi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et g est une composition d’applications de Hénon généralisées. Nous noterons:

$$K_g^+ = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que la suite } \{g^n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée}\};$$

$$J_g^+ = \partial K_g^+ \text{ (} \partial \text{ dénote le bord topologique).}$$

L’ensemble $J_g^+ \subset \mathbb{C}^2$ est l’ensemble de Julia (positif) associé à g . On introduit également la fonction de Green associée à g :

$$G_g^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(g)^n} \log^+ \|g^n\|.$$

L'application G_g^+ est continue positive plurisousharmonique et satisfait les propriétés:

- $K_g^+ = \{G_g^+ = 0\}$;
- $G_g^+ \circ g = d(g).G_g^+$;
- G_g^+ est pluriharmonique sur $\mathbb{C}^2 \setminus K_g^+$.

Le courant de Green associé à g est le (1,1)-courant positif fermé de potentiel G_g^+ :

$$\mu_g^+ = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} G_g^+ = \frac{i}{\pi} \sum \frac{\partial^2 G_g^+}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Son support est exactement l'ensemble de Julia J_g^+ . Remarquons que $g^* \mu_g^+ = d(g). \mu_g^+$.

On obtient des notions symétriques en considérant les itérations négatives (on définit ainsi $K_g^-, J_g^-, G_g^-, \mu_g^-$). Il est intéressant de regarder le prolongement de g à $\mathbb{C}P^2$; on voit alors qu'il existe deux points particuliers sur la droite à l'infini. On a d'une part le point $p_- = [1:0:0]$ qui est un point d'indétermination, d'autre part le point $p_+ = [0:1:0]$ qui est fixe superattractant de bassin $\{G_g^+ > 0\}$ dans \mathbb{C}^2 . On définit la masse d'un courant T sur $\mathbb{C}P^2$ à l'aide de la forme de Kähler standard ω :

$$\|T\| = \int_{\mathbb{C}P^2} T \wedge \omega.$$

Le courant μ_g^+ (ou plus exactement son prolongement trivial à $\mathbb{C}P^2$) est de masse 1.

On peut étendre les définitions et propriétés ci-dessus à f en posant

$$G_f^+ = k.G_g^+ \circ \varphi^{-1} = k.\varphi^{-1*}G_g^+;$$

$$\mu_f^+ = k.\varphi^{-1*}\mu_g^+ = k.\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} (\varphi^{-1*}G_g^+),$$

où $k > 0$ est choisi de manière à avoir $\|\mu_f^+\| = 1$.

On a le résultat remarquable suivant (voir [10]):

THÉORÈME 5.1 (Sibony). *Soit T un courant positif fermé de type (1,1) dans $\mathbb{C}P^2$ de masse 1 et de support contenu dans $\overline{K_g^+}$. Alors $T = \mu_g^+$.*

Nous allons en déduire le résultat suivant:

PROPOSITION 5.2. *Soit f de type Hénon, et $h \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. On suppose que $G_f^+ \circ h = G_f^+$. Alors $d(h) = 1$.*

Preuve. Supposons $d(h) \geq 2$. On sait (voir [1]) que h admet un point périodique selle p et que J_h^+ (resp. J_h^-) est l'adhérence de la variété stable (resp. instable) associée à p . On déduit donc de la relation $G_f^+ \circ h = G_f^+$ que J_h^+ et J_h^- sont inclus dans un même niveau $\{G_f^+ = c\}$.

Si $c = 0$ alors le théorème de Sibony implique $\mu_h^+ = \mu_f^+$, d'où $h^* \mu_f^+ = d(h) \cdot \mu_f^+$. Or l'hypothèse $G_f^+ \circ h = G_f^+$ implique $h^* \mu_f^+ = \mu_f^+$, d'où une contradiction.

Si $c > 0$ on va encore aboutir à une contradiction. Tout d'abord l'ensemble P des points périodiques selle de h ne contient pas de point isolé, en effet l'adhérence de P est le support de la mesure d'équilibre $\mu_h^+ \wedge \mu_h^-$ (voir [3]), et le support de cette mesure n'est localement polaire en aucun point [1]. Maintenant G_f^+ est pluriharmonique au voisinage de p , donc localement G_f^+ est la partie réelle d'une fonction holomorphe φ . Quitte à bouger un peu p on peut supposer que φ est une submersion ou la puissance $n^{ième}$ d'une submersion au voisinage de p . Ainsi localement $\{G_f^+ = c\}$ est redressable sur un hyperplan réel ou sur n hyperplans réels concourants, qui ne contiennent en chaque point qu'une seule direction complexe. En particulier les deux variétés stable et instable associées à p ne peuvent être contenues dans le niveau $\{G_f^+ = c\}$. ■

Remarque 5.3. Il est peut-être bien connu que les niveaux de la fonction de Green sont lisses (sauf évidemment le niveau 0), ce qui rendrait immédiate la fin de la preuve ci-dessus. Cependant je ne connais pas de démonstration simple de ce fait.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal théorème de cette section: il s'agit d'établir une équivalence entre les notions de géodésique (orientée) et de fonction de Green associées à un automorphisme de type Hénon.

THÉORÈME 5.4. *Soient $f, g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de type Hénon. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ avec les mêmes orientations;
- (2) il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = g^m$;
- (3) $G_g^+ = G_f^+$.

Preuve. Supposons $\text{Géo}(g) = \text{Géo}(f) = \Gamma$. En reprenant la preuve de la proposition 4.10 on voit qu'il existe deux automorphismes h et e tels que:

- h est de type Hénon et $\text{Géo}(h) = \Gamma$;
- e est d'ordre r et fixe Γ ;
- $f = h^{n_1} e^{p_1}$, $g = h^{n_2} e^{p_2}$, avec $n_1, n_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$.

Quitte à prendre les carrés de f et g on peut supposer n_1 et n_2 pairs, ainsi par la proposition 4.1 e commute avec h^{n_1} et h^{n_2} . En posant $n = m_2$ et $m = m_1$ on obtient:

$$f^n = g^m = h^{rn_1n_2}.$$

On a ainsi (1) \Rightarrow (2); d'autre part (2) \Rightarrow (3) est immédiat. Montrons (3) \Rightarrow (1). Supposons $G^+ := G_g^+ = G_f^+$. Si $\text{Géo}(f) \neq \text{Géo}(g)$ alors quitte à prendre des puissances de f et g (ce qui ne change pas G^+), on peut supposer que f et g engendrent un groupe libre dont tous les éléments (sauf Id) sont de degré ≥ 2 (prop. 4.3). En particulier $fgf^{-1}g^{-1}$ est de degré ≥ 2 . Les deux relations

$$G^+ \circ f = d(f).G^+$$

$$G^+ \circ g = d(g).G^+$$

impliquent $G^+ \circ fgf^{-1}g^{-1} = G^+$. Mais la proposition 5.2 implique alors $d(fgf^{-1}g^{-1}) = 1$, ce qui est contradictoire. ■

Remarque 5.5. Dans le même ordre d'idée il est possible de montrer que deux automorphismes de type Hénon ont même géodésique si et seulement s'ils ont même ensemble de Julia, ou encore si et seulement s'ils admettent la même mesure invariante; cependant la preuve requiert une étude plus poussée des notions de fonction et courant de Green, en particulier dans le cas où les points d'indétermination de g et g^{-1} sont confondus (voir [8, th. 2.24]).

Considérons maintenant $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ de degré ≥ 2 ; supposons que g possède un point périodique contractant p . Quitte à prendre une puissance et à conjuguer par une translation on se ramène à $p = 0$ point fixe contractant. Notons Σ le bassin d'attraction de 0: c'est un domaine de Fatou–Bieberbach, i.e., un domaine biholomorphe à \mathbb{C}^2 strictement inclus dans \mathbb{C}^2 . Nous nous proposons de calculer le groupe $\text{Aut}[\Sigma]$ des $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ qui laisse Σ invariant (i.e., $f(\Sigma) = \Sigma$). La proposition suivante précise un résultat de [4]:

PROPOSITION 5.6. *Avec les notations ci-dessus, $\text{Aut}[\Sigma]$ est constitué des automorphismes qui fixent 0 (dans \mathbb{C}^2) et qui laissent $\text{Géo}(g)$ globalement invariante. De plus $\text{Aut}[\Sigma]$ ne contient pas d'automorphisme qui agisse par symétrie sur $\text{Géo}(g)$. Finalement $\text{Aut}[\Sigma]$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. Pour montrer que tout élément dans $\text{Aut}[\Sigma]$ laisse invariante $\text{Géo}(g)$ il suffit de montrer que pour tout $f \in \text{Aut}[\Sigma]$ de type Hénon on a $\text{Géo}(f) = \text{Géo}(g)$ (voir preuve de la prop. 4.10). Pour cela, quitte à prendre des puissances de f et g il suffit de montrer que $d(fgf^{-1}g^{-1}) = 1$.

On remarque que fgf^{-1} admet un point fixe contractant $p = f(0)$ de bassin Σ , d'où $J_g^+ = J_{fgf^{-1}}^+ = \partial\Sigma$ (voir [2]). Alors par le théorème de Sibony $\mu_g^+ = k \cdot \mu_{fgf^{-1}}^+$ (avec $k > 0$), d'où $G_g^+ = k \cdot G_{fgf^{-1}}^+$ (en effet $\partial\bar{\partial}(G_g^+ - k \cdot G_{fgf^{-1}}^+) = 0$, on a ainsi une application pluriharmonique nulle sur Σ , donc nulle partout). Finalement on obtient la relation $G_g^+ \circ fgf^{-1}g^{-1} = G_g^+$, d'où $d(fgf^{-1}g^{-1}) = 1$ par la proposition 5.2.

Remarquons que f ne peut pas agir par symétrie sur $\text{Géo}(g)$; sinon, d'après la remarque 4.11 g aurait un déterminant jacobien de module 1 ce qui interdirait l'existence d'un point fixe contractant.

Montrons maintenant que tout $f \in \text{Aut}[\Sigma]$ fixe 0. On vient de voir que f laisse invariante $\text{Géo}(g)$, ce qui implique que f commute avec g^m pour un certain m (si $d(f) = 1$ alors $m = 2$ convient par la proposition 4.1; et si $d(f) \geq 2$ on a vu que $f^n = g^m$ pour certain n et m). Considérons $w \in \Sigma$, on a donc $f(w) \in \Sigma$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(f(w)) = 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{km}(f(w)) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(g^{km}(w)) = 0 \\ &\Rightarrow f(0) = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement supposons que $f(0) = 0$, et que f laisse $\text{Géo}(g)$ globalement invariante. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que f commute avec g^m , donc f laisse invariant K_g^+ , en particulier f agit sur les composantes connexes de l'intérieur de K_g^+ . Comme $f(0) = 0$, on en déduit que la composante connexe de K_g^+ contenant 0 est fixée par f , autrement dit Σ est fixé par f .

Le groupe des automorphismes qui fixent globalement $\text{Géo}(g)$ et qui préservent l'orientation de $\text{Géo}(g)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ (voir preuve de la prop. 4.10). Le groupe $\text{Aut}[\Sigma]$ étant un sous-groupe de ce groupe est donc bien un produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (en fait il est facile de voir que $n = 1$ ou p). ■

REMERCIEMENTS

Au cours de la rédaction de cet article de nombreuses discussions m'ont été profitables. Je remercie en particulier M. Nicolau, W. Dicks, N. Sibony et surtout D. Cerveau qui m'a proposé les problèmes étudiés dans la section 5. Quant à l'idée d'utiliser la théorie de Bass-Serre pour étudier les sous-groupes de $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, elle a été suggérée par E. Ghys.

RÉFÉRENCES

1. E. Bedford et J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : Currents, equilibrium measure and hyperbolicity, *Invent. Math.* **103** (1991), 69–99.

2. E. Bedford et J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . II. Stable manifolds and recurrence, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 657–679.
3. E. Bedford, J. Smillie, et M. Lyubish, Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112** (1993), 77–125.
4. D. Cerveau, Sur la linéarisation de certains sous-groupes de difféomorphismes polynomiaux du plan et les domaines de Fatou–Bieberbach, prépublication IRMAR, 1997.
5. S. Friedland et J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), 67–99.
6. P. de la Harpe, Free groups in linear groups, *Enseign. Math.* **29** (1983), 129–144.
7. S. Lamy, L'alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, *CRAS* **327** (1998), 537–540.
8. S. Lamy, Automorphismes polynomiaux du plan complexe: Étude algébrique et dynamique, Thèse de Ph.D., Toulouse, 2000.
9. J.-P. Serre, Arbres, Amalgames, SL_2 , *Astérisque* **46** (1977).
10. N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in “Dynamique et géométrie complexe,” Panor. Synth., Vol. 8, pp. 97–195, 1999.
11. S. Sidki, On a 2-generated infinite 3-group: The presentation problem, *J. Algebra* **110** (1987), 13–23.
12. D. Wright, Abelian subgroups of $\text{Aut}_k(k[x, y])$ and applications to actions on the affine plane, *Illinois J. Math.* **23** (1979), 579–635.