

# SOUS-GROUPE NORMAL ENGENDRÉ PAR UN AUTOMORPHISME POLYNOMIAL DU PLAN

JEAN-PHILIPPE FURTER ET STÉPHANE LAMY

RÉSUMÉ. Nous étudions le sous-groupe normal  $\langle f \rangle_N$  engendré par un élément  $f \neq \text{id}$  dans le groupe  $G$  des automorphismes polynomiaux de déterminant Jacobien 1 du plan affine complexe. D'une part si  $f$  a longueur au plus 8 en termes de la structure de produit amalgamée classique sur  $G$ , nous montrons que  $\langle f \rangle_N = G$ . D'autre part si  $f$  est un élément suffisamment générique de longueur au moins 14, nous montrons que  $\langle f \rangle_N \neq G$ .

Ceci est une traduction de l'article *Normal subgroup generated by a plane polynomial automorphism*, Transformation Groups, 2010.

## INTRODUCTION

Notons  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine complexe et soit  $G$  le sous-groupe des automorphismes de déterminant Jacobien 1. Dans ce papier, nous nous intéressons aux sous-groupes normaux de  $G$  engendrés par un seul élément.

Il est aisé de vérifier que  $G$  est égal au sous-groupe dérivé de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  et également que  $G$  est égal à son propre groupe dérivé (voir proposition 10). Il est plus difficile de décider si  $G$  est un groupe simple ou non. Il ne semble pas exister de morphisme naturel dont le noyau donnerait un sous-groupe normal propre de  $G$ . Cependant, dans une courte note publiée en 1974 et qui semble avoir été depuis quelque peu oubliée, V. I. Danilov [4] prouve que  $G$  n'est pas simple. Il utilise des résultats dûs à P. Schupp [19], à savoir la théorie de la petite simplification dans le contexte d'un produit amalgamé. Pour être précis : Danilov montre que le sous-groupe normal engendré par l'automorphisme  $(ea)^{13}$  où  $a = (y, -x)$  et  $e = (x, y + 3x^5 - 5x^4)$  est un sous-groupe strict de  $G$ . En fait il écrit  $(ea)^{12}$ , la raison étant qu'il utilise une définition légèrement erronée de la classique condition  $C'(1/6)$  (voir paragraphe 3.1).

Nous introduisons maintenant la notion de longueur algébrique d'un automorphisme afin de pouvoir énoncer notre principal résultat. Le théorème de Jung, Van der Kulk et Nagata affirme que  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est le produit amalgamé sur leur intersection des groupes affines  $A$  et élémentaire  $E$  (voir 1.1). Soit  $f$  un élément de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Si  $f$  n'est pas dans l'amalgame  $A \cap E$ , sa longueur algébrique  $|f|$  est définie comme le plus petit entier  $m$  tel que  $f$  s'exprime comme une composition  $f = g_1 \dots g_m$ , où chaque  $g_i$  est dans l'un des facteurs ( $A$  ou  $E$ ) de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Si  $f$  est dans l'amalgame, par convention nous posons  $|f| = 0$  (voir [20], §1.3).

Le sous-groupe normal engendré par un élément  $f$  de  $G$  sera noté  $\langle f \rangle_N$ . Bien sûr  $\langle f \rangle_N$  reste inchangé si l'on remplace  $f$  par l'un de ses conjugués dans  $G$ . On peut donc supposer que  $f$  est de longueur algébrique minimale dans sa classe de conjugaison (voir paragraphe 1.4). Si  $|f| \neq 1$ , ceci revient à dire que  $|f|$  est paire (en effet, si  $|f|$  est paire, il est clair que  $f$  est strictement cycliquement réduit au sens du paragraphe 3.1). C'était par exemple le cas pour

---

*Date:* April 2010.

Le second auteur, en détachement de l'Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, France, bénéficiait d'un financement Marie Curie "IEF Fellowship".

l'automorphisme  $(ea)^{13}$  mentionné plus haut, qui a longueur 26.

Voici les deux principaux résultats de notre papier :

**Théorème 1.** *Si  $f \in G$  satisfait  $|f| \leq 8$  et  $f \neq \text{id}$ , alors  $\langle f \rangle_N = G$ .*

**Théorème 2.** *Si  $f \in G$  est un élément générique de longueur paire  $|f| \geq 14$ , alors le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  (ou a fortiori dans  $G$ ) est différent de  $G$ .*

Ici la généricité signifie que si l'on écrit  $f^{\pm 1} = a_1 e_1 \dots a_l e_l$ , où  $l \geq 7$ ,  $a_1, \dots, a_l \in A \setminus E$  et  $e_i = (x + P_i(y), y)$ , alors il existe un entier  $D$  tel que pour tout  $l$ -uplet  $d_1, \dots, d_l$  d'entiers  $\geq D$ , on peut choisir  $(P_1, \dots, P_l)$  génériques (au sens de la géométrie algébrique, i.e. hors d'un fermé de Zariski) dans l'espace affine  $\prod_{1 \leq i \leq l} \mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$ , où l'on a noté  $\mathbb{C}[y]_{\leq d} = \{P \in \mathbb{C}[y]; \deg P \leq d\}$ .

Les théorèmes 1 et 2 correspondent dans le texte aux théorèmes 32 et 45. Dans ces deux derniers énoncés nous utilisons une notion géométrique de longueur liée à la théorie de Bass-Serre (voir paragraphe 1.2), ce qui nous permet d'obtenir des énoncés plus naturels. Ainsi, le théorème 45 couvre le cas des automorphismes vérifiant la condition de généricité (C2) (voir définition 27). La preuve que cette condition est en effet générique est repoussée en annexe. Cependant pour convaincre le lecteur qu'une telle hypothèse est nécessaire, nous donnons maintenant des exemples d'automorphismes de longueur paire arbitrairement grande et engendrant des groupes normaux égaux à  $G$ .

**Exemple 3.** Considérons les trois automorphismes

$$a = (y, -x), \quad e_1 = (x + P(y), y), \quad e_2 = (x + Q(y), y),$$

où  $P$  (resp.  $Q$ ) est un polynôme pair (resp. impair) de degré  $\geq 2$ , et posons  $f = ae_1(ae_2)^n$ , où  $n \geq 1$ . Si  $u = -\text{id}$ , nous avons  $au = ua$ ,  $e_2u = ue_2$  et  $e_1u = ue_1^{-1}$ , ainsi le commutateur  $[f, u] = fuf^{-1}u^{-1}$  est égal à

$$[f, u] = ae_1(ae_2)^n u (ae_2)^{-n} (ae_1)^{-1} u^{-1} = ae_1 u e_1^{-1} a^{-1} u^{-1} = ae_1^2 a^{-1}.$$

Comme  $[f, u] \in \langle f \rangle_N$ , nous obtenons  $e_1^2 \in \langle f \rangle_N$ , et donc  $\langle f \rangle_N = G$  d'après le théorème 1 (ou le lemme 30 ci-dessous).

Une motivation pour ce travail était la question toujours ouverte de la simplicité du groupe de Cremona  $\text{Cr}_2$ , i.e. le groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{C}^2$ . La question est par exemple posée dans [7], et Gizatullin donne plusieurs critères qui prouveraient que  $\text{Cr}_2$  est simple. Récemment Blanc [2] a prouvé que  $\text{Cr}_2$  est simple en tant que groupe algébrique de dimension infinie. A ce propos, mentionnons également que Shafarevich affirme que le groupe  $\text{Aut}_1[\mathbb{C}^n]$  des automorphismes de l'espace affine  $\mathbb{C}^n$  ayant déterminant Jacobien 1 est simple en tant que groupe algébrique de dimension infinie, pour tout  $n \geq 2$  (voir [21, Th. 5] et [22, Th. 5]). Cependant, il est connu que ces deux papiers contiennent des imprécisions importantes (voir [10, 11]), ainsi le statut actuel de ces questions n'est pas clair pour nous.

Après avoir étudié le cas polynomial, notre sentiment est que  $\text{Cr}_2$ , en tant que groupe abstrait, pourrait fort bien ne pas être simple non plus. En effet, il est connu depuis Iskovskikh [8] que  $\text{Cr}_2$  admet une présentation comme le quotient d'un produit amalgamé par le sous-groupe normal engendré par un unique élément. Posons  $H_1 = (\text{PGL}(2) \times \text{PGL}(2)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , i.e. le groupe des transformations birationnelles qui s'étendent en des automorphismes de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , et notons  $H_2$  le groupe des transformations qui préservent le pinceau des droites verticales  $x = cte$ . Notons  $\tau = (y, x) \in H_1 \setminus H_2$  et  $e = (1/x, y/x) \in H_2 \setminus H_1$ ; alors  $\text{Cr}_2$  est égal au quotient

$$(H_1 *_{H_1 \cap H_2} H_2) / \langle f \rangle_N$$

où  $f = (\tau e)^3$ . Pour prouver que  $\text{Cr}_2$  n'est pas simple il suffirait de trouver un élément  $g$  dans le produit amalgamé de  $H_1$  et  $H_2$  (qui devrait correspondre à une transformation birationnelle suffisamment générale) tel que le sous-groupe normal  $\langle f, g \rangle_N$  soit propre. Ceci est similaire aux résultats obtenus dans le présent papier; le problème semble cependant considérablement plus ardu dans le contexte birationnel.

Avant de clore sur ce sujet, mentionnons la jolie réinterprétation du résultat d'Iskovskikh par Wright (voir [27, Th. 3.13]). Soit  $H_3 = \text{PGL}(3)$  le groupe des transformations birationnelles qui s'étendent en des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ . Wright prouve que le groupe  $\text{Cr}_2$  est le produit libre des  $H_1, H_2, H_3$  amalgamés le long de leurs intersections deux à deux dans  $\text{Cr}_2$ .

Dans ce papier nous faisons le choix de travailler sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, même si la majeure partie des résultats pourrait s'adapter sur un corps quelconque. Notons cependant que dans le cas d'un corps fini le résultat de non simplicité est presque immédiat. Soit  $\mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q = p^n$  éléments, où  $p$  est premier et  $n \geq 1$ . Soit  $\text{Aut}[\mathbb{F}_q^2]$  le groupe des automorphismes du plan affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^2 = \mathbb{F}_q^2$  et soit  $\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2]$  le sous-groupe normal constitué des automorphismes de déterminant Jacobien 1. Si  $X$  est un ensemble fini, notons  $\mathfrak{Per}(X)$  (resp.  $\mathfrak{Per}^+(X)$ ) le groupe des permutations (resp. permutations paires) de  $X$ . Comme le morphisme naturel  $\phi : \text{Aut}[\mathbb{F}_q^2] \rightarrow \mathfrak{Per}(\mathbb{F}_q^2)$  induit un morphisme non constant  $\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2] \rightarrow \mathfrak{Per}(\mathbb{F}_q^2)$  (considérer les translations !), il est clair que  $\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2]$  n'est pas simple.

*Remarque 4.* Si  $q$  est impair (i.e. la caractéristique  $p$  de  $\mathbb{F}_q$  est impaire), on peut facilement vérifier que  $\phi(\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2]) = \mathfrak{Per}^+(\mathbb{F}_q^2)$ . En effet,  $\phi$  est surjective (voir [16]), donc  $\phi(\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2])$  est un sous-groupe normal de  $\mathfrak{Per}(\mathbb{F}_q^2)$ . Cependant, si le cardinal de  $X$  n'est pas égal à 4, il est bien connu que  $\mathfrak{Per}^+(X)$  est le seul sous-groupe normal non trivial de  $\mathfrak{Per}(X)$  (voir par exemple [18, ex. 3.21, p. 51]). Par conséquent, il suffit de montrer que  $\phi(\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2]) \subseteq \mathfrak{Per}^+(\mathbb{F}_q^2)$ . Mais d'une part  $\text{Aut}_1[\mathbb{F}_q^2]$  est engendré par les automorphismes élémentaires  $(x + P(y), y)$  et  $(x, y + Q(x))$ , où  $P \in \mathbb{C}[y]$ ,  $Q \in \mathbb{C}[x]$  sont des polynômes arbitraires. D'autres part, il est immédiat de vérifier que ces automorphismes induisent des permutations paires de  $\mathbb{F}_q^2$ .

Pour finir, nous voudrions souligner le rôle que jouent les translations pour obtenir nos résultats. Soient  $\text{Aut}^0[\mathbb{C}^2]$  le groupe des automorphismes fixant l'origine et  $J_n$  le morphisme de groupe naturel associant à un élément de  $\text{Aut}^0[\mathbb{C}^2]$  son  $n$ -jet à l'origine (pour  $n \geq 1$ ). Pour  $n \geq 2$ , le noyau de  $J_n$  est un sous-groupe normal non trivial de  $G^0 = G \cap \text{Aut}^0[\mathbb{C}^2]$ , ainsi ce dernier groupe n'est pas simple. Bien sûr pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  un morphisme tel que  $J_n$  n'existe pas. Ceci explique le rôle prééminent joué par les translations dans notre papier (voir lemmes 7 et 16).

*Remarque 5.* Il résulte de [1] que l'image de  $J_n$  est exactement le groupe des  $n$ -jets des endomorphismes polynomiaux fixant l'origine et dont le déterminant Jacobien est une constante non nulle. Le lecteur trouvera un énoncé précis dans [6, Proposition 3.2].

L'article est organisé comme suit.

Dans la section 1 nous rassemblons les résultats liés à la théorie de Bass-Serre dont nous avons besoin : ceci inclut des définitions et des faits basiques mais aussi des calculs assez complexes, comme ceux intervenant dans la caractérisation des tripodes (paragraphe 1.7). C'est aussi l'endroit où nous énonçons précisément la condition (C2) apparaissant dans l'énoncé du théorème 45.

La section 2 est consacrée à la preuve du théorème 1. C'est la partie la plus élémentaire du papier; de la section 1 nous utilisons seulement le lemme 7.

Dans la section 3 nous introduisons les R-diagrammes. Cette technique de théorie combinatoire des groupes a été développée par Lyndon et Schupp en relation avec la condition de petite simplification  $C'(1/6)$  (voir 3.1). Un point intéressant dans notre travail est que nous utilisons les R-diagrammes dans un contexte complètement opposé (courbure positive).

Dans la section 4 nous prouvons le théorème 2, en utilisant simultanément les théories de Bass-Serre et de Lyndon-Schupp.

Nous discutons brièvement dans la section 5 les cas non couverts par les théorèmes 1 et 2, à savoir le cas des automorphismes de longueur 10 ou 12.

Finalement, en annexe nous prouvons que la condition (C2) est bien générique et nous produisons des exemples explicites d'automorphismes satisfaisant cette condition.

## 1. L'ARBRE DE BASS-SERRE

1.1. **Généralités.** Le théorème classique de Jung, van der Kulk et Nagata affirme que le groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est le produit amalgamé des groupes **affine**

$$A = \{(\alpha x + \beta y + \gamma, \delta x + \varepsilon y + \zeta); \alpha, \dots, \varepsilon \in \mathbb{C}, \alpha\varepsilon - \beta\delta \neq 0\}$$

et **élémentaire**

$$E = \{(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha\beta \neq 0, P \in \mathbb{C}[y]\}$$

le long de leur intersection (voir [9, 23, 17]). Ceci est résumé dans l'énoncé suivant :

**Théorème 6.**  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2] = A *_{A \cap E} E$ .

Une preuve géométrique de ce théorème et de nombreuses références peuvent être trouvées dans [13]. Mentionnons que les éléments de  $E$  sont souvent qualifiés d'automorphismes **triangulaires**.

La théorie de Bass-Serre ([20]) associe un arbre simplicial à tout produit amalgamé. Dans notre contexte, notons  $\mathcal{T}$  l'arbre en question. Par définition, les sommets de  $\mathcal{T}$  sont l'union disjointe des classes à gauche modulo  $A$  (sommets de *type A*) et modulo  $E$  (sommets de *type E*). Les arêtes de  $\mathcal{T}$  sont les classes à gauche modulo  $(A \cap E)$ . Enfin, si  $\phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , l'arête  $\phi(A \cap E)$  relie les sommets  $\phi A$  et  $\phi E$ . Comme  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est engendré par  $A$  et  $E$ ,  $\mathcal{T}$  est connexe. La structure amalgamée garantit que  $\mathcal{T}$  ne contient pas de boucle, ainsi il s'agit bien d'un arbre.

Le groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  agit naturellement sur  $\mathcal{T}$  par multiplication à gauche : pour tout  $g, \phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , on pose  $g.\phi A = (g\phi)A$ ,  $g.\phi E = (g\phi)E$  et  $g.\phi(A \cap E) = (g\phi)(A \cap E)$ . Il s'avère que cette action induit un plongement de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  dans le groupe des isométries simpliciales de  $\mathcal{T}$  (voir [12, remarque 3.5]). Cette action est transitive sur l'ensemble des arêtes, sur l'ensemble des sommets de type  $A$  et sur l'ensemble des sommets de type  $E$ . Le stabilisateur d'un sommet  $\phi A$  (resp. d'un sommet  $\phi E$ , resp. d'une arête  $\phi(A \cap E)$ ) est le groupe  $\phi A \phi^{-1}$  (resp.  $\phi E \phi^{-1}$ , resp.  $\phi(A \cap E) \phi^{-1}$ ).

Suivant [26, 12], on peut définir des systèmes de représentants des classes à gauche non triviales  $A/A \cap E$  et  $E/A \cap E$  en posant :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= (\lambda x + y, -x), \quad \lambda \in \mathbb{C}; \\ e(Q) &= (x + Q(y), y), \quad Q(y) \in y^2\mathbb{C}[y] \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

A noter que le signe moins dans l'expression de  $a(\lambda)$  n'apparaissait pas dans [26, 12]. Nous l'introduisons ici afin d'obtenir des automorphismes de déterminant Jacobien 1 (voir paragraphe 1.4).

Tout élément  $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  s'écrit alors de manière unique  $g = ws$  où  $w$  est un produit de facteurs de la forme  $a(\lambda)$  ou  $e(Q)$ , deux facteurs successifs étant de forme différente, et  $s \in A \cap E$  (voir e.g. [20, chap. I, 1.2, th. 1]). De même, toute arête (resp. sommet de type  $A$ , resp. sommet de type  $E$ ) s'écrit de façon unique  $w(A \cap E)$  (resp  $wA$ , resp.  $wE$ ) où  $w$  est de la même forme que ci-dessus.

Nous appelons **chemin** (orienté) une suite finie d'arêtes consécutives dans  $\mathcal{T}$ . Pour noter un chemin nous énumérons ses sommets séparés par  $-$ . Par exemple le chemin  $\mathcal{P}$  de deux arêtes contenant les sommets  $\text{id}A, \text{id}E, eA$ , où  $e \in E \setminus A$  sera noté  $\mathcal{P} = \text{id}A - \text{id}E - eA$ . Si seul le type des sommets est pertinent, nous dirons par exemple que  $\mathcal{P}$  est de type  $A - E - A$ .

Si deux sommets de  $\mathcal{T}$  sont fixés par un automorphisme de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , alors le chemin qui les relie est lui aussi fixé. Par conséquent, le sous-ensemble de  $\mathcal{T}$  fixé par un automorphisme est soit vide soit un sous-arbre. A conjugaison près, ce sous-ensemble a été calculé pour tout automorphisme dans [12, preuve de la proposition 3.3]. En particulier, il a été déterminé pour la translation  $(x+1, y)$ . Le lemme suivant, technique mais facile, est une légère variation de ce calcul. Comme dans la référence mentionnée, cet énoncé va s'avérer crucial. Nous donnons la preuve pour le confort du lecteur.

**Lemme 7.** *Le sous-arbre de  $\mathcal{T}$  fixé par la translation  $(x+c, y)$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ , est exactement l'union des chemins*

$$\text{id}E - e(P)A - e(P)a(\lambda)E - e(P)a(\lambda)e(Q)A$$

où  $P \in y^2\mathbb{C}[y]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $Q(y) = \alpha y^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

*A noter que (exceptionnellement) nous permettons que  $P$  soit nul. Dans ce cas, le chemin devrait plutôt être écrit*

$$\text{id}E - \text{id}A - a(\lambda)E - a(\lambda)e(Q)A.$$

*En particulier, le sous-arbre fixé ne dépend pas de  $c$ , a diamètre 6 et contient la boule fermée de rayon 2 centrée en  $\text{id}E$ , i.e. l'union des chemins*

$$\text{id}E - e(P)A - e(P)a(\lambda)E, \quad P \in y^2\mathbb{C}[y], \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Preuve.* Si  $P, Q \in y^2\mathbb{C}[y]$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  nous avons

$$\begin{aligned} (x+c, y) \circ e(P) &= e(P) \circ (x+c, y); \\ (x+c, y) \circ a(\lambda) &= a(\lambda) \circ (x, y+c); \\ (x, y+c) \circ e(Q) &= e(Q) \circ f; \end{aligned}$$

où  $f = (x+Q(y) - Q(y+c), y+c)$ , ainsi

$$(x+c, y)e(P)a(\lambda)e(Q) = e(P)a(\lambda)e(Q)f.$$

On en déduit que le sommet  $e(P)a(\lambda)e(Q)A$  est fixé par  $(x+c, y)$  si et seulement si  $f \in A$ , i.e.  $\deg(Q(y) - Q(y+c)) \leq 1$ , i.e.  $\deg(Q) \leq 2$ . Si  $Q = \alpha y^2$ , ce sommet est fixé. Comme le sommet  $\text{id}E$  est clairement lui aussi fixe, nous obtenons que le chemin suivant est fixé :

$$\text{id}E - e(P)A - e(P)a(\lambda)E - e(P)a(\lambda)e(Q)A.$$

Si  $Q = \alpha y^2$ , où  $\alpha \neq 0$  et  $\mu \in \mathbb{C}$ , il reste à montrer que le sommet  $e(P)a(\lambda)e(Q)a(\mu)E$  n'est pas fixe. Or, un calcul facile donne

$$(x+c, y)e(P)a(\lambda)e(Q)a(\mu) = e(P)a(\lambda)e(Q)a(\mu)g,$$

où  $g = (x - c, 2\alpha cx + y + \mu c - \alpha c^2) \notin E$ .  $\square$

**1.2. Longueurs algébrique et géométrique.** Nous utiliserons deux notions distinctes de longueur sur  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

La **longueur algébrique** a été définie dans l'introduction : si  $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  n'est pas dans la partie amalgamée,  $|g|$  est définie comme le plus petit entier  $m$  tel que  $g$  puisse s'écrire comme une composition  $g = g_1 \dots g_m$  où chaque  $g_i$  est dans l'un des facteurs de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Si  $g$  est dans la partie amalgamée, nous posons  $|g| = 0$ .

La **longueur géométrique** est définie par  $\text{lg}(g) = \inf_{v \in \mathcal{T}} \text{dist}(g.v, v)$ , où  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$  et  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  est la distance simpliciale sur  $\mathcal{T}$ .

Par le lemme 8 on a presque toujours  $\text{lg}(g) = \min\{|\phi g \phi^{-1}|; \phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]\}$ , la seule exception étant quand  $g$  est conjugué à un automorphisme élémentaire qui n'est pas conjugué à un élément dans la partie amalgamée.

**1.3. Éléments elliptiques et hyperboliques.** Les éléments  $g$  de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  se répartissent en deux classes en fonction de leur action sur  $\mathcal{T}$ .

Si  $\text{lg}(g) = 0$  (i.e.  $g$  admet au moins un point fixe dans  $\mathcal{T}$ ), nous dirons que  $g$  est **elliptique**. Ceci correspond au cas où  $g$  est conjugué à un élément dans l'un des facteurs ( $A$  ou  $E$ ) de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . Comme tout élément de  $A$  est conjugué à un élément de  $E$ , ceci revient à dire que  $g$  est triangularisable (i.e. conjugué à un automorphisme triangulaire).

Si  $\text{lg}(g) > 0$ ,  $g$  est dit **hyperbolique**. Ceci correspond au cas où  $g$  est conjugué à une composée d'applications de Hénon généralisées  $h_1 \dots h_l$  (voir [5]). Rappelons qu'une application de Hénon généralisée est un automorphisme de la forme

$$h = (y, ax + P(y)) = (y, x) \circ (ax + P(y), y),$$

où  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $P(y)$  est un polynôme de degré au moins 2. De façon équivalente,  $g$  est conjuguée à un automorphisme de la forme

$$f = a_1 e_1 \dots a_l e_l.$$

où chaque  $a_i \in A \setminus E$  et chaque  $e_i \in E \setminus A$ .

L'ensemble des points  $v \in \mathcal{T}$  satisfaisant  $\text{dist}(g.v, v) = \text{lg}(g)$  définit une droite géodésique dans  $\mathcal{T}$  que nous noterons  $\text{Géo}(g)$ , sur laquelle  $g$  agit comme une translation de longueur  $\text{lg}(g)$ . On vérifie facilement que  $\text{lg}(g) = \text{lg}(f) = |f| = 2l$  et que la géodésique de  $f$  est constituée du chemin  $\text{id}A - a_1 E - a_1 e_1 A - \dots - a_1 e_1 \dots a_l e_l A$  et de ses translatés par les  $f^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Si  $g = \phi f \phi^{-1}$  avec  $\phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , on a bien sûr  $\text{Géo}(g) = \phi(\text{Géo}(f))$ .

La preuve du lemme suivant est facile et laissée au lecteur. A noter que ces deux paires de conditions équivalentes correspondent aux notions d'éléments strictement et faiblement cycliquement réduits rappelées au paragraphe 3.1.

**Lemme 8.** Soit  $g \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  un élément hyperbolique.

(1) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $|g| = \text{lg}(g)$ ; (ii)  $\text{Géo}(g)$  contient les sommets  $\text{id}A$  et  $\text{id}E$ .

(2) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(iii)  $|g| \leq \text{lg}(g) + 1$ ; (iv)  $\text{Géo}(g)$  contient le sommet  $\text{id}A$  ou  $\text{id}E$ .

**1.4. Le groupe  $G$ .** Dans ce paragraphe nous prouvons deux propriétés basiques de  $G$ . Posons  $A_1 = A \cap G$  et  $E_1 = E \cap G$ . Du théorème 6 on déduit facilement le résultat suivant :

**Proposition 9.**  $G = A_1 *_{A_1 \cap E_1} E_1$ .

*Preuve.* Par [20, chap. I, n° 1.1, Prop. 3], il suffit de prouver que tout  $g \in G$  est une composition d'automorphismes affine et triangulaire de déterminant Jacobien 1. Nous savons que  $g$  peut s'écrire comme une composée de  $a(\lambda)$  et de  $e(Q)$ , avec un terme correcteur  $s \in A \cap E$ . Remarquons que les  $a(\lambda)$  et les  $e(Q)$  sont des automorphismes de déterminant Jacobien 1, ainsi  $s$  est également de déterminant Jacobien 1 ce qui termine la preuve.  $\square$

En corollaire de cette proposition toute la discussion du paragraphe précédent s'applique à  $G$ . En particulier on peut faire le même choix de  $a(\lambda)$  et  $e(Q)$  pour écrire arêtes et sommets, ainsi il existe une bijection naturelle entre les arbres associés respectivement à  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  et  $G$ .

**Proposition 10.** *Le groupe  $G$  est le sous-groupe des commutateurs du groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , et est aussi égal à son propre groupe des commutateurs.*

*Preuve.* Au vu de la proposition 9, il suffit de vérifier que le sous-groupe des commutateurs de  $G$  contient  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  ainsi que tous les automorphismes triangulaires de la forme  $(x + P(y), y)$ . Or d'une part il est bien connu que  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  est égal à son propre groupe des commutateurs; d'autre part tout automorphisme triangulaire  $(x + \lambda y^n, y)$ , avec  $n \geq 2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , est le commutateur de  $(x + \lambda(1 - b)^{-1}y^n, y)$  et  $(bx, b^{-1}y)$ , où  $b \neq 1$  est une racine  $n$ -ième de l'unité. Enfin, toute translation  $(x + c, y)$  est le commutateur de  $(-x, -y)$  et  $(x - \frac{c}{2}, y)$ .  $\square$

**1.5. Couleur.** Nous introduisons maintenant la notion de **couleur** d'un chemin de type  $A - E - A$ . Cette notion sera utile pour préciser les hypothèses de généricité dont nous aurons besoin. Notons que tout chemin de type  $A - E - A$  peut s'écrire  $\mathcal{P} = \psi e_1 A - \psi E - \psi e_2 A$ , où  $\psi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  et  $e_1, e_2 \in E$ .

**Définition 11.** La **couleur** de  $\mathcal{P}$  est la double classe  $(A \cap E)e_1^{-1}e_2(A \cap E)$ .

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du choix des  $e_1, e_2$ . La couleur est clairement invariante sous l'action de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . En fait, étant donnés deux chemins de type  $A - E - A$  on pourrait montrer que l'on peut envoyer l'un sur l'autre (par un élément de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ ) si et seulement s'ils ont même couleur. Cependant nous n'aurons pas besoin de ce fait. En guise d'illustration de la notion de couleur, mentionnons que la couleur du chemin  $e(P)A - e(P)a(\lambda)E - e(P)a(\lambda)e(Q)A$  apparaissant dans le lemme 7 est  $(A \cap E)e(Q)(A \cap E)$ .

Si  $P \in \mathbb{C}[y]$  et si la couleur de  $\mathcal{P}$  est égale à la double classe  $(A \cap E)e(P)(A \cap E)$ , nous dirons que  $P$  représente la couleur de  $\mathcal{P}$ . Le lemme suivant implique que cette notion est indépendante de l'orientation du chemin. La preuve en est facile et est laissée au lecteur.

**Lemme 12.** *Soient  $P, Q \in \mathbb{C}[y]$  des polynômes de degré  $\geq 2$ . Alors  $P$  et  $Q$  représentent la même couleur si et seulement s'il existe  $\alpha, \dots, \varepsilon$  avec  $\alpha\beta \neq 0$  tel que  $Q(y) = \alpha P(\beta y + \gamma) + \delta y + \varepsilon$ .*

*Remarque 13.* Notons que tout chemin de type  $A - E - A$  peut être envoyé par un automorphisme sur un chemin de la forme  $\text{id}A - \text{id}E - e(P)A$ . On vérifie facilement que les sommets  $e(P)A$  et  $e(Q)A$  sont égaux si et seulement s'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que  $Q(y) = P(y) + \alpha y + \beta$ .

**Exemple fondamental 14.** Soit  $g$  un automorphisme hyperbolique de longueur géométrique  $\text{lg}(g) = 2l$ . On a vu que  $g$  est conjugué à un automorphisme de la forme  $f = a_1 e_1 \dots a_l e_l$  où chaque  $a_i \in A \setminus E$  et chaque  $e_i \in E \setminus A$ . Alors, la géodésique de  $g$  (ou de  $f$ ) supporte  $l$  couleurs  $(A \cap E)e_i(A \cap E)$  ( $1 \leq i \leq l$ ) qui se répètent de façon périodique.

### 1.6. Couleur générale.

**Définition 15.** Un polynôme  $P \in \mathbb{C}[y]$  de degré  $d \geq 5$  est dit **général** s'il satisfait :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \deg(P(y) - \alpha P(\beta y + \gamma)) \leq d - 4 \implies \alpha = \beta = 1 \text{ et } \gamma = 0.$$

La couleur  $(A \cap E)e(P)(A \cap E)$  est dite **générale** si  $P$  est général. Le lemme 12 implique que cette notion ne dépend pas du choix du représentant  $P$ .

**Lemme 16.** Soit  $Q \in y^2\mathbb{C}[y]$  un polynôme général. Le stabilisateur du chemin  $\mathcal{P} = e(Q)A - \text{id}E - \text{id}A$  est égal à  $\{(x + \beta y + \gamma, y); \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}$ . De plus, si  $\beta \neq 0$ , l'automorphisme  $(x + \beta y + \gamma, y)$  ne fixe aucun chemin contenant strictement  $\mathcal{P}$ .

*Preuve.* On sait que  $f \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  fixe le chemin  $\text{id}E - \text{id}A$  si et seulement si  $f \in A \cap E$ . Dans ce cas, il existe des constantes  $\alpha, \dots, \zeta$ , avec  $\alpha \varepsilon \neq 0$  telles que  $f = (\alpha x + \beta y + \gamma, \varepsilon y + \zeta)$ . Comme  $f e(Q) = e(Q)g$ , où  $g = (\alpha x + \beta y + \alpha Q(y) - Q(\varepsilon y + \zeta), \varepsilon y + \zeta)$ , le sommet  $e(Q)A$  est fixé par  $f$  si et seulement si  $g \in A$ , i.e.  $\deg(\alpha Q(y) - Q(\varepsilon y + \zeta)) \leq 1$ . Le polynôme  $Q$  étant général, ceci est équivalent à  $\alpha = \varepsilon = 1$  et  $\zeta = 0$ .

La seconde assertion découle de l'observation suivante :

$$(x + \beta y + \gamma, y)a(\lambda)E = a(\lambda - \beta)E.$$

En effet, comme  $(x + \beta y + \gamma, y)e(Q) = e(Q)(x + \beta y + \gamma, y)$ , on a aussi

$$(x + \beta y + \gamma, y)e(Q)a(\lambda)E = e(Q)a(\lambda - \beta)E.$$

Les sommets  $a(\lambda)E$  et  $e(Q)a(\lambda)E$  sont donc fixés par  $(x + \beta y + \gamma, y)$  si et seulement si  $\beta = 0$ .  $\square$

*Remarque 17.* Le lemme 16 peut être vu comme une réciproque partielle au lemme 7. Plus précisément, on obtient que si  $\phi$  fixe un chemin général long de 4 arêtes et centré en  $\text{id}E$ , alors  $\phi = (x + c, y)$  (ici par général on entend que la couleur supportée par les deux arêtes centrales du chemin est générale; voir Définition 11 et ci-dessous).

Remarquons aussi que comme  $(x, y + c) = a(0) \circ (x - c, y) \circ a(0)^{-1}$ , le sous-arbre de  $\mathcal{T}$  fixé par  $(x, y + c)$  est l'image par  $a(0)$  du sous-arbre fixé par  $(x - c, y)$ . En particulier, il contient la boule fermée de rayon 2 centrée en  $a(0)E$ . De plus, si  $\phi$  fixe un chemin général de longueur 4 et centré en  $a(0)E$ , on peut écrire  $\phi = (x, y + c)$ .

Nous utilisons maintenant la notion de couleur générale pour prouver un résultat technique qui sera utile dans la preuve du théorème 45. Considérons un automorphisme hyperbolique  $f$  et  $g = \phi f \phi^{-1} \neq f$  un conjugué de  $f$ . Notre but est de montrer que si  $f$  est suffisamment général alors  $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$  est un chemin de longueur au plus 4. Plus précisément, nous voulons classer tous les types possibles de tels chemins.

**Définition 18.** Nous dirons qu'un automorphisme hyperbolique de longueur géométrique  $2l$  satisfait la condition (C1) si les  $l$  couleurs supportées par sa géodésique (voir exemple 14) sont générales et distinctes.

Dans l'annexe nous montrons que cette condition est générique dans un sens naturel.

**Proposition 19.** Soient  $f$  et  $g = \phi f \phi^{-1}$  deux automorphismes conjugués et distincts satisfaisants la condition (C1). Si l'intersection  $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$  contient au moins une arête alors ce chemin est de type :

$$A - E, E - A - E, A - E - A, \text{ ou } E - A - E - A - E.$$

*Preuve.* Sans perte de généralité on peut supposer que  $\mathcal{P}' = \text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g) = \text{Géo}(f) \cap \phi(\text{Géo}(f))$  contient un chemin de type  $A - E - A$ , car sinon  $\mathcal{P}'$  est au plus un chemin de type  $E - A - E$ .

Notons  $v$  le sommet central de type  $E$  d'un tel sous-chemin de  $\mathcal{P}'$ . Comme  $\phi^{-1}(v) \in \text{Géo}(f)$ , il existe un entier  $k$  tel que  $\text{dist}(f^k(v), \phi^{-1}(v)) = \text{dist}((\phi f^k)(v), v) < \text{lg}(f) = 2l$ . En remplaçant  $\phi$  par  $\phi f^k$ , on ne change pas  $g$ , mais on a à présent  $\text{dist}(\phi(v), v) < 2l$ . Par la condition (C1), la géodésique de  $f$  supporte  $l$  couleurs distinctes qui se répètent périodiquement. Par conséquent,  $\text{dist}(\phi(v), v) \in 2l\mathbb{Z}$  et finalement on obtient  $\phi(v) = v$ , ainsi  $\phi$  est elliptique.

Posons  $\mathcal{P} = \phi^{-1}(\mathcal{P}') = \text{Géo}(f) \cap \phi^{-1}(\text{Géo}(f))$ . De façon équivalente, on peut définir  $\mathcal{P}$  comme le chemin maximal tel que  $\mathcal{P} \subseteq \text{Géo}(f)$  et  $\phi(\mathcal{P}) \subseteq \text{Géo}(f)$ .

Le chemin  $\mathcal{P}$  contient un chemin de type  $A - E - A$  dont le sommet central est  $v$ . Sans perte de généralité, on peut conjuguer et supposer que ce sous-chemin est de la forme  $e(Q)A - \text{id}E - \text{id}A$ . En particulier  $v = \text{id}E$ .

On distingue deux sous-cas, suivant si  $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \phi(\mathcal{P})$  préserve ou non l'orientation induite par  $\text{Géo}(f)$ .

Si  $\phi$  préserve l'orientation, alors  $\phi$  fixe  $\mathcal{P}$  point par point. On peut supposer que  $\mathcal{P}$  est strictement plus grand que  $e(Q)A - \text{id}E - \text{id}A$ , sinon il n'y a rien à montrer. Alors, par les lemmes 7 et 16, on obtient  $\phi = (x + \gamma, y)$ . Comme les couleurs de  $\text{Géo}(f)$  sont générales, le lemme 7 implique que  $\mathcal{P}$  est de la forme  $e(Q)a(\lambda)E - e(Q)A - \text{id}E - \text{id}A - a(\mu)E$ , ainsi il est de type  $E - A - E - A - E$ .

Si  $\phi$  ne préserve pas l'orientation, alors  $\phi$  fixe seulement le sommet  $v$  dans  $\text{Géo}(f)$ . On peut montrer que  $\phi$  est forcément une involution (voir lemme 20 ci-dessous). Ceci implique que  $\mathcal{P}$  contient un nombre pair d'arêtes et est centré en  $v$ . Comme les  $l$  couleurs supportées par  $\text{Géo}(f)$  sont distinctes,  $\mathcal{P}$  contient seulement une couleur, ainsi il est de type  $A - E - A$  ou  $E - A - E - A - E$ .  $\square$

**Lemme 20.** *Soit  $\mathcal{P}$  un chemin de type  $A - E - A$  supportant une couleur générale. Si  $\phi \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  échange les deux extrémités de  $\mathcal{P}$  alors  $\phi^2 = \text{id}$ .*

*Preuve.* Sans perte de généralité, on peut conjuguer et supposer que le chemin  $\mathcal{P}$  est de la forme  $e(Q)A - \text{id}E - \text{id}A$  (voir remarque 13). Notons que  $\phi_1 = e(Q) \circ (-x, y)$  est une involution qui échange les deux sommets  $e(Q)A$  et  $\text{id}A$ . Ainsi  $\phi_1 \phi$  fixe le chemin  $\mathcal{P}$  point par point, et  $Q$  étant général le lemme 16 implique  $\phi = \phi_1 \circ (x + \beta y + \gamma, y)$ . Remarquons que  $\phi_1 \circ (x + \beta y + \gamma, y) = (x + \beta y + \gamma, y)^{-1} \circ \phi_1$ , ainsi

$$\phi^2 = \phi_1 \circ (x + \beta y + \gamma, y) \circ (x + \beta y + \gamma, y)^{-1} \circ \phi_1 = \text{id}. \quad \square$$

**Exemple 21.** Nous montrons maintenant que tous les cas permis par la proposition 19 peuvent être réalisés. Dans les exemples qui suivent on suppose que  $\text{Géo}(f)$  contient le chemin  $a(0)E - \text{id}A - \text{id}E - e(Q)A - e(Q)a(\mu)E$  où  $Q$  est un polynôme général et on choisit  $\phi$  tel que le chemin  $\mathcal{P}$  soit de divers types.

(1) Exemples avec  $\phi$  fixant au moins une arête :

- $\phi = (x + P(y), y)$  avec  $\deg P \geq 2$ ,  $\mathcal{P} = \text{id}A - \text{id}E$ ;
- $\phi = (\alpha x, \beta y)$  avec  $\alpha\beta \neq 0$  et  $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ ,  $\mathcal{P} = a(0)E - \text{id}A - \text{id}E$ ;
- $\phi = (x + by, y)$  avec  $b \neq 0$ ,  $\mathcal{P} = \text{id}A - \text{id}E - e(Q)A$ ;
- $\phi = (x + c, y)$  avec  $c \neq 0$ ,  $\mathcal{P} = a(0)E - \text{id}A - \text{id}E - e(Q)A - e(Q)a(\mu)E$ .

(2) Exemples avec  $\phi$  renversant l'orientation :

- $\phi = (y, x)$  échange  $a(0)E$  et  $\text{id}E$ ,  $\mathcal{P} = a(0)E - \text{id}A - \text{id}E$ ;

- $\phi = (-x + Q(y), y)$  échange  $\text{id}A$  et  $e(Q)A$ ,  $\mathcal{P}$  est de longueur 4 ou 2 suivant si  $\mu = 0$  ou non.

(3) Exemple avec  $\phi$  hyperbolique :

- $\phi = e(Q)a(\mu)u$  avec  $u = (-x, -y)$  envoie  $\mathcal{P} = a(0)E - \text{id}A - \text{id}E$  sur  $\phi(\mathcal{P}) = \text{id}E - e(Q)A - e(Q)a(\mu)E$  (le lecteur pourra vérifier que  $a(\mu)ua(0) = (x - \mu y, y) \in A \cap E$ ).

### 1.7. Couleurs indépendantes et tripodes.

**Définition 22.** Une famille de polynôme  $P_i \in \mathbb{C}[y]$  ( $1 \leq i \leq l$ ) est dite **indépendante** si étant donné  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$  avec  $\alpha_k \beta_k \neq 0$  et  $i_k \in \{1, \dots, l\}$ , pour  $1 \leq k \leq 3$ , on a :

$$\deg \sum_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k P_{i_k}(\beta_k y + \gamma_k) \leq 1 \implies i_1 = i_2 = i_3.$$

La famille de couleurs  $(A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$  ( $1 \leq i \leq l$ ) est dite **indépendante** si la famille  $P_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ) est indépendante. Le lemme 12 implique que cette notion ne dépend pas du choix des représentants  $P_i$ .

**Définition 23.** Trois chemins  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$  dans l'arbre  $\mathcal{T}$  définissent un **tripode** si

- Pour tout  $i \neq j$ ,  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$  contient au moins une arête;
- L'intersection  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$  est égale à un sommet  $v$ .

Les trois chemins  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$  sont appelés les **branches** du tripode. Le sommet  $v$  est appelé le **centre** du tripode.

Si on a un centre de type  $E$ , on peut considérer les trois couleurs associées aux trois chemins de type  $A - E - A$  contenant le centre et inclus dans le tripode. Dans cette situation nous dirons que l'une quelconque de ces couleurs est un **mélange** des deux autres.

**Lemme 24.** Soient  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[y]$  des polynômes de degré  $\geq 2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $(A \cap E)e(P_3)(A \cap E)$  est un mélange de  $(A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$  ( $1 \leq i \leq 2$ );
- (2)  $\exists \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$  avec  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \neq 0$  tel que

$$P_3(y) = \alpha_1 P_1(\beta_1 y + \gamma_1) + \alpha_2 P_2(\beta_2 y + \gamma_2) + \delta y + \varepsilon.$$

*Preuve.* (1)  $\implies$  (2). Supposons qu'il existe un tripode admettant les 3 couleurs  $(A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ).

On peut supposer que le centre de ce tripode est  $\text{id}E$  et que l'une de ses branches est  $\text{id}E - \text{id}A$ . Soient  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \in \mathbb{C}[y]$  tels que les 2 autres branches s'écrivent  $\text{id}E - e(\tilde{P}_1)A$  et  $\text{id}E - e(\tilde{P}_2)A$ , et tel que  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E) = (A \cap E)e(\tilde{P}_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E) = (A \cap E)e(\tilde{P}_2)(A \cap E)$ . Par le lemme 12, pour  $1 \leq i \leq 2$ , il existe  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i$  avec  $\alpha_i \beta_i \neq 0$  tels que  $\tilde{P}_i = \alpha_i P_i(\beta_i y + \gamma_i) + \delta_i y + \varepsilon_i$ .

On a alors  $(A \cap E)e(P_3)(A \cap E) = (A \cap E)e(\tilde{P}_3)(A \cap E)$ , où  $\tilde{P}_3 = \tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ , ainsi (toujours par le lemme 12) on voit que  $P_3$  a la forme attendue.

(2)  $\implies$  (1). Posons  $\tilde{P}_1 = \alpha_1 P_1(\beta_1 y + \gamma_1)$ ,  $\tilde{P}_2 = -\alpha_2 P_2(\beta_2 y + \gamma_2)$  et  $\tilde{P}_3 = \tilde{P}_1 - \tilde{P}_2 = \alpha_1 P_1(\beta_1 y + \gamma_1) + \alpha_2 P_2(\beta_2 y + \gamma_2)$ . Par le lemme 12, on a  $(A \cap E)e(\tilde{P}_i)(A \cap E) = (A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$  pour  $1 \leq i \leq 3$ . Comme  $e(\tilde{P}_2)^{-1}e(\tilde{P}_1) = e(\tilde{P}_3) \notin A$ , les sommets  $e(\tilde{P}_1)A$  et  $e(\tilde{P}_2)A$  sont distincts. Considérons le tripode de centre  $\text{id}E$  et de branches  $\text{id}E - \text{id}A$ ,  $\text{id}E - e(\tilde{P}_1)A$  et  $\text{id}E - e(\tilde{P}_2)A$ . Ses trois couleurs sont  $(A \cap E)e(\tilde{P}_i)(A \cap E)$  pour  $1 \leq i \leq 3$ . Ceci montre que  $(A \cap E)e(P_3)(A \cap E)$  est un mélange de  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E)$ .  $\square$

*Remarque 25.* La seconde condition du lemme 24 peut s'écrire sous la forme symétrique suivante :

Pour  $1 \leq k \leq 3$ , il existe  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$  avec  $\alpha_k \beta_k \neq 0$  tel que

$$\deg \sum_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k P_k(\beta_k y + \gamma_k) \leq 1.$$

Par conséquent, le lemme suivant découle facilement du précédent.

**Lemme 26.** *Considérons trois couleurs représentées respectivement par  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[y]$ , qui sont des polynômes de degré  $\geq 2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Les trois couleurs  $(A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont indépendantes;*
- (2) *Pour tous  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$ , si  $(A \cap E)e(P_{i_3})(A \cap E)$  est un mélange de  $(A \cap E)e(P_{i_1})(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_{i_2})(A \cap E)$ , alors  $i_1 = i_2 = i_3$ .*

**Définition 27.** Nous dirons qu'un automorphisme hyperbolique de longueur géométrique  $2l$  satisfait la condition (C2) si les  $l$  couleurs supportées par sa géodésique (voir exemple 14) sont générales et indépendantes.

Dans l'annexe nous montrons que cette condition est générique en un sens naturel.

*Remarque 28.* On vérifie facilement que des couleurs indépendantes sont nécessairement distinctes. Par conséquent, la condition (C2) est plus forte que la condition (C1).

Par abus de langage nous dirons que trois automorphismes hyperboliques  $g_1, g_2, g_3$  définissent un **tripode** si leurs géodésiques  $\text{Géo}(g_1), \text{Géo}(g_2), \text{Géo}(g_3)$  définissent un tripode.

**Lemme 29.** *Tout tripode associé à trois conjugués d'un automorphisme hyperbolique  $f$  satisfaisant la condition (C2) admet des branches de longueur au plus 2.*

*Preuve.* Si le centre du tripode est de type  $A$ , par la proposition 19 il n'y a rien à montrer. Supposons donc que le centre du tripode est de type  $E$ . Sans perte de généralité on peut conjuguer et supposer que le centre est  $\text{id}E$ , et que  $\text{Géo}(f)$  contient les sommets  $\text{id}A$  et  $a(0)E$ . Notons  $g = ufu^{-1}$  et  $h = vfv^{-1}$  les deux conjugués de  $f$  mis en jeu dans le tripode.

Par la condition (C2) les trois couleurs centrées en  $\text{id}E$  contenues dans le tripode doivent être égales. En effet, si  $(A \cap E)e(P_i)(A \cap E)$ ,  $1 \leq i \leq l$  sont les  $l$  couleurs supportées par  $\text{Géo}(f)$ , alors il existe  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, l\}$  tels que ces trois couleurs soient  $(A \cap E)e(P_{i_k})(A \cap E)$ ,  $1 \leq k \leq 3$ . D'après la définition 22 et le lemme 24 (voir aussi la remarque 25), on obtient  $i_1 = i_2 = i_3$ , ainsi les trois couleurs sont égales.

Commençons par prouver que  $u$  peut être choisi de façon à fixer le centre  $\alpha = \text{id}E$  du tripode. Comme  $\alpha \in \text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g) = \text{Géo}(f) \cap u(\text{Géo}(f))$ , on obtient  $u^{-1}(\alpha) \in \text{Géo}(f)$ , ainsi il existe un entier  $k$  tel que  $\text{dist}(f^k(\alpha), u^{-1}(\alpha)) < \text{lg}(f) = 2l$ . En remplaçant  $u$  par  $uf^k$ , on ne change pas  $g$ , mais on a maintenant  $\text{dist}(u(\alpha), \alpha) < 2l$ . Par la condition (C1) (voir remarque 28), la géodésique de  $g$  supporte  $l$  couleurs distinctes qui se répètent périodiquement. Par conséquent,  $\text{dist}(u(\alpha), \alpha) \in 2l\mathbb{Z}$  et finalement on obtient  $u(\alpha) = \alpha$ . On prouve de la même façon que  $v$  peut être choisi fixant  $\alpha = \text{id}E$ . Autrement dit, on s'est ramené à  $u, v \in E$ .

Supposons maintenant qu'il existe une branche, disons  $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(h)$ , de longueur strictement supérieure à 2. Alors, d'après la proposition 19, cette branche a longueur 4, et admet pour milieu le point  $a(0)E$  (voir figure 1). Comme  $v$  fixe point par point le chemin général  $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(h)$ , par la remarque 17 on peut écrire  $v = (x, y + c)$ .

Soit  $e = e(P) = (x + P(y), y) \in E$  tel que le sommet  $eA \in \text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$ . Comme  $\text{Géo}(h) = v(\text{Géo}(f))$ , le sommet  $veA \in \text{Géo}(h)$  et finalement  $veA \in \text{Géo}(g) \cap \text{Géo}(h)$ .

Supposons que l'orientation induite par  $g$  sur  $\text{id}E - eA$  est opposée à celle induite par  $f$ , l'autre cas étant symétrique.

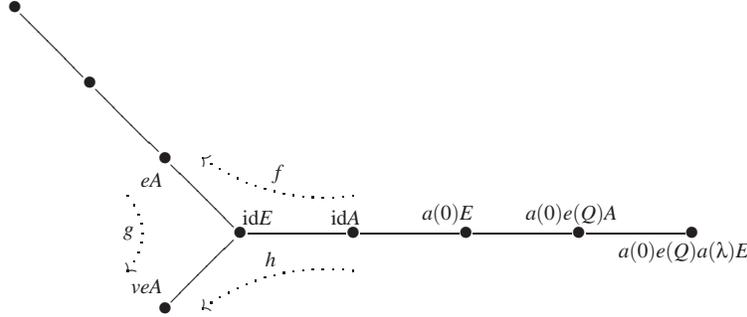


FIGURE 1.

Comme  $\text{Géo}(g) = u(\text{Géo}(f))$ ,  $u$  envoie le chemin  $\text{id}A - \text{id}E - eA$  sur le chemin  $eA - \text{id}E - veA$ .

D'une part  $u$  envoie  $\text{id}A$  sur  $eA$ , i.e.  $uA = eA$ , i.e.  $e^{-1}u \in A$ , i.e.  $e^{-1}u \in A \cap E$ . Comme  $e^{-1}u \in A \cap E$ , on peut l'écrire sous la forme  $s_1 s_2$ , où  $s_1 = (a_1 x, b_1 y + c_1)$ ,  $s_2 = (x + \beta y + \gamma, y) \in A \cap E$  et on a  $u = es_1 s_2$ .

D'autre part  $u$  envoie  $eA$  sur  $veA$ , i.e.  $ueA = veA$ , i.e.  $es_1 s_2 eA = veA$ . Comme  $s_2 e = es_2$ , on a  $es_1 s_2 eA = es_1 eA$ , ainsi  $es_1 eA = veA$ . Cette dernière égalité est équivalente à  $e^{-1}v^{-1}es_1 e \in A$ . On calcule

$$e^{-1}v^{-1}es_1 e = (a_1 x + a_1 P(y) + P(b_1 y + c_1) - P(b_1 y + c_1 - c), b_1 y + c_1 - c).$$

On devrait avoir  $\deg(a_1 P(y) + P(b_1 y + c_1) - P(b_1 y + c_1 - c)) \leq 1$ . Comme  $a_1 \neq 0$  et  $\deg(P(b_1 y + c_1) - P(b_1 y + c_1 - c)) < \deg P$ , ceci est impossible.  $\square$

## 2. LA PREUVE DU THÉORÈME 1

Nous commençons par traiter le cas d'un automorphisme de longueur algébrique  $\leq 1$ , i.e. un automorphisme triangulaire ou affine. Mentionnons que des résultats similaires dans le contexte des transformations birationnelles du plan sont prouvés dans [7] et [3].

**Lemme 30.** *Si  $f \in G$  satisfait  $|f| \leq 1$  et  $f \neq \text{id}$ , alors  $\langle f \rangle_N = G$ .*

*Preuve.* Soient  $g, h \in G$ . Notons que si  $g$  ou  $h$  appartient à  $\langle f \rangle_N$ , alors il en est de même pour le commutateur  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Le fait que  $G = \langle f \rangle_N$  découle des observations suivantes :

- Si  $f \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  et  $f \neq \pm \text{id}$  on obtient  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \subseteq \langle f \rangle_N$ , en utilisant le fait que  $\{\pm \text{id}\}$  est le seul sous-groupe normal non trivial de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . En effet, si  $H$  est un sous-groupe normal de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  non inclus dans  $\{\pm \text{id}\}$ , on a  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = H \cup (-H)$  par simplicité de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Par conséquent, si  $g = (y, -x)$ , on obtient  $g \in H$  ou  $-g \in H$ , ainsi  $-\text{id} = g^2 = (-g)^2 \in H$  et finalement  $H = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

De plus, si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$[(x + \alpha, y + \beta), (-x, -y)] = (x + 2\alpha, y + 2\beta)$$

et donc  $A \subseteq \langle f \rangle_N$ .

Si  $b \neq 1$  est une racine  $n$ -ième de l'unité ( $n \geq 2$ ) et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$[(x + \lambda(1 - b)^{-1}y^n, y), (bx, b^{-1}y)] = (x + \lambda y^n, y)$$

ce qui prouve le lemme dans ce cas..

- Si  $f$  est une translation, alors en conjuguant par  $SL(2, \mathbb{C})$ , on voit que  $\langle f \rangle_N$  contient tous les translations. Ainsi il contient également le commutateur

$$[(x, y+1), (x+y^2, y)] = (x-2y+1, y)$$

et donc aussi l'automorphisme linéaire  $(x-2y, y)$ . On conclut à l'aide du cas précédent.

- Si  $f$  est un automorphisme affine qui n'est pas une translation, alors il existe une translation  $g$  qui ne commute pas avec  $f$ . Par conséquent, le commutateur  $[f, g]$  est une translation non triviale appartenant à  $\langle f \rangle_N$  et le cas précédent permet de conclure.
- Finalement si  $f = (ax + P(y), a^{-1}y + c)$  est un automorphisme triangulaire non affine, alors en remplaçant  $f$  par  $[f, g]$ , où  $g$  est un automorphisme triangulaire ne commutant pas avec  $f$ , on peut supposer  $a = 1$ . En remplaçant encore une fois  $f$  par  $[f, g]$ , où  $g$  est un automorphisme triangulaire ne commutant pas avec  $f$ , on se ramène au cas  $c = 0$ . Par conséquent,  $f$  peut être supposé de la forme  $(x + P(y), y)$ . Remarquons alors que le commutateur

$$[(x, y+1), (x + P(y), y)]$$

est un automorphisme triangulaire de la forme  $(x + R(y), y)$ , avec  $\deg R = \deg P - 1$ . Par récurrence sur le degré on obtient une translation non triviale  $(x + c, y)$  dans  $\langle f \rangle_N$ . Ce cas a déjà été traité.

□

**Corollaire 31.** *Si  $f \in G$  est elliptique (i.e. triangularisable) et  $f \neq \text{id}$ , alors  $\langle f \rangle_N = G$ .*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1. En fait nous allons prouver la version suivante, qui est plus forte :

**Théorème 32.** *Si  $f \in G$  satisfait  $\text{lg}(f) \leq 8$  et  $f \neq \text{id}$ , alors  $\langle f \rangle_N = G$ .*

*Preuve.* Le fait crucial que nous allons utiliser est la connaissance du sous-arbre fixé par une translation  $(x + c, y)$ . Nous savons qu'un tel sous-arbre est de diamètre 6, centré en  $\text{id}E$ , et qu'il contient la boule fermée de rayon 2 et de centre  $\text{id}E$  (voir le lemme 7). Par conséquent, étant donné un chemin arbitraire de type  $E - A - E - A - E$ , il existe un conjugué  $\psi$  de  $(x + 1, y)$  fixant ce chemin point par point.

Choisissons un tel chemin contenu dans la géodésique de  $f$  et posons  $g = \psi f \psi^{-1}$ . Alors si  $\text{lg}(f) = 2$  ou 4 il est clair que  $f \circ g^{-1}$  est elliptique, et l'on peut conclure grâce au corollaire 31. Si  $\text{lg}(f) = 6$  alors  $\text{lg}(f \circ g^{-1}) \leq 4$  et on est ramené au cas précédent.

Le cas où  $\text{lg}(f) = 8$  est plus subtil et va exiger un raffinement de ce même argument. Quitte à remplacer  $f$  par l'un de ses conjugués, on peut supposer que  $|f| = \text{lg}(f) = 8$ . On peut donc écrire (en remplaçant éventuellement  $f$  par  $f^{-1}$ )

$$f = e_1 a_1 e_2 a_2 e_3 a_3 e_4 a_4$$

où  $a_i \in A \setminus E$ ,  $e_j \in E \setminus A$ . Sans perte de généralité on peut de plus supposer que chaque  $e_j$  est de la forme  $e_j = e(P_j) = (x + P_j(y), y)$  et que  $\deg(e_1) \leq \deg(e_j)$  pour  $j = 2, 3, 4$ .

Nous savons que toute translation  $(x + c, y)$  fixe la boule fermée de rayon 2 et de centre  $\text{id}E$ . Notons par ailleurs que pour tout  $s \in A \cap E$ ,  $s(x + 1, y)s^{-1}$  est encore une translation de la forme  $(x + c, y)$ . Par conséquent, si l'on écrit  $e_1 a_1$  sous la forme  $e_1 a_1 = e(P)a(\lambda)s$  avec  $s \in A \cap E$ ,

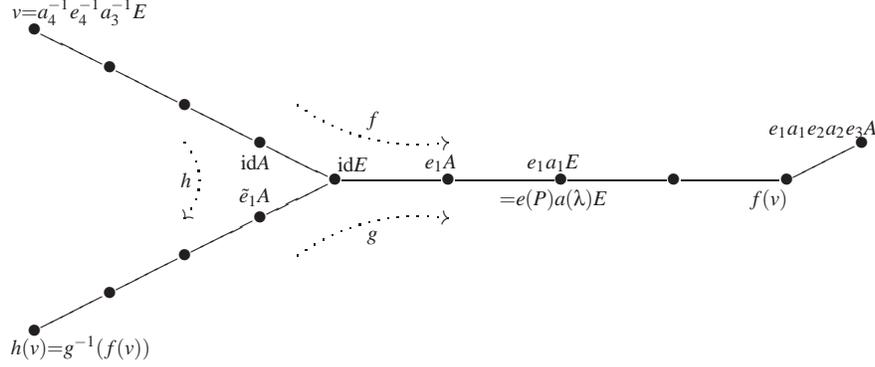


FIGURE 2. Preuve du théorème 32

l'automorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 a_1 (x+1, y) a_1^{-1} e_1^{-1} \\ &= (x+P(y), y) \circ (\lambda x+y, -x) \circ (x+c, y) \circ (-y, \lambda y+x) \circ (x-P(y), y) \\ &= (x+\lambda c+P(y-c)-P(y), y-c) \end{aligned}$$

fixe la boule fermée de rayon 2 et de centre  $e_1 a_1 E$ . Notons que  $\deg \tilde{e}_1 = \deg e_1 - 1$ . Considérons

$$g = \tilde{e}_1 f \tilde{e}_1^{-1} \text{ et } h = g^{-1} f.$$

Par construction les géodésiques  $\text{Géo}(g)$  et  $\text{Géo}(f)$  ont au moins 4 arêtes en commun. Par le lemme 7 nous savons qu'elles ont au plus 6 arêtes en commun. On peut alors vérifier (voir figure 2) que  $h$  envoie le sommet  $v = a_4^{-1} e_4^{-1} a_3^{-1} E$  sur un sommet à distance au plus 8 (et au moins 6) de  $v$ . Explicitement, on calcule

$$h = \tilde{e}_1 a_4^{-1} e_4^{-1} a_3^{-1} \tilde{e}_3 a_3 e_4 a_4$$

où  $\tilde{e}_3 = e_3^{-1} a_2^{-1} (x-1, y) a_2 e_3$  est un automorphisme triangulaire avec  $\deg(\tilde{e}_3) = \deg(e_3) - 1$ .

Si  $\deg(\tilde{e}_1) = \deg(\tilde{e}_3) = 1$  alors  $\text{lg}(h) = 4$ . Ceci correspond au cas où  $\text{Géo}(g)$  et  $\text{Géo}(f)$  partagent 6 arêtes. Notons que  $a_3^{-1} \tilde{e}_3 a_3$  et  $a_4 \tilde{e}_1 a_4^{-1}$  sont bien des automorphismes affines non triangulaires.

Si  $\deg(\tilde{e}_1) = 1$  et  $\deg(\tilde{e}_3) \geq 2$  alors  $\text{lg}(h) = 6$ . Dans ce cas  $\text{Géo}(g)$  et  $\text{Géo}(f)$  partagent 5 arêtes : les sommets  $\text{id}A$  et  $\tilde{e}_1 A$  coïncident.

Dans les deux cas ci-dessus on s'est donc ramené à la première partie de la preuve.

Finalement si  $\deg(\tilde{e}_1) \geq 2$  alors  $h$  admet une factorisation similaire à celle du  $f$  de départ à la différence près que le premier automorphisme triangulaire est de degré strictement plus petit. Par récurrence, on peut produire un élément de longueur 8 dans  $\langle f \rangle_N$  avec le premier automorphisme triangulaire de degré 2, et l'on conclut par l'argument précédent.  $\square$

### 3. R-DIAGRAMMES

**3.1. Généralités sur la théorie de la petite simplification.** Dans ce paragraphe nous considérons  $H = H_1 *_{H_1 \cap H_2} H_2$  un produit amalgamé général de deux facteurs. Bien évidemment notre motivation est d'appliquer la théorie au groupe  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  des automorphismes du plan.

Les définitions suivantes proviennent de [15], chap. V, §11 (p. 285). Si  $u$  est un élément de  $H$  non contenu dans la partie amalgamée  $H_1 \cap H_2$ , une **forme normale** de  $u$  est une suite

$x_1 \cdots x_m$  telle que  $u = x_1 \cdots x_m$ , où chaque  $x_i$  est dans un facteur de  $H$ , deux  $x_i$  successifs sont dans des facteurs différents de  $H$ , et aucun  $x_i$  n'est dans la partie amalgamée. La **longueur** de  $u$  est définie par  $|u| = m$ . Cette définition ne dépend pas de la forme normale choisie, mais seulement de  $u$ . Si  $u$  est dans la partie amalgamée de  $H$ , par convention nous posons  $|u| = 0$ .

Nous appelons **mot** la donnée d'un élément  $u \in H$  avec une factorisation  $u = u_1 \cdots u_k$ , où  $u_i \in H$  pour  $i = 1, \dots, k$ . Un mot  $u = u_1 \cdots u_k$  est sous **forme réduite** si  $|u_1 \cdots u_k| = |u_1| + \cdots + |u_k|$ .

Supposons que  $u$  et  $v$  sont des éléments de  $H$  avec formes normales  $u = x_1 \cdots x_m$  et  $v = y_1 \cdots y_n$ . Si  $x_m y_1$  est dans la partie amalgamée, nous dirons qu'il y a **simplification** entre  $u$  et  $v$ . De façon équivalente, ceci signifie que  $|uv| \leq |u| + |v| - 2$ . Si  $x_m$  et  $y_1$  sont dans un même facteur de  $H$  et si  $x_m y_1$  n'est pas dans la partie amalgamée, nous dirons qu'il y a **consolidation** entre  $u$  et  $v$ . De façon équivalente, ceci signifie que  $|uv| = |u| + |v| - 1$ .

Un mot est sous **forme semi-réduite**  $u_1 \cdots u_k$  s'il n'y a pas de simplification dans ce produit. Les consolidations sont par contre certainement permises.

Un mot  $u = x_1 \cdots x_m$  sous forme normale est **strictement** (resp. **faiblement**) **cycliquement réduit** si  $m \leq 1$  ou si  $x_m$  et  $x_1$  sont dans des facteurs différents de  $H$  (resp. le produit  $x_m x_1$  n'est pas dans la partie amalgamée). Ces deux notions correspondent aux deux couples de conditions équivalentes données dans le lemme 8

Un sous-ensemble  $R$  de  $H$  est **symétrisé** si tous les éléments de  $R$  sont faiblement cycliquement réduits et si pour tout  $r \in R$ , tous les conjugués faiblement cycliquement réduits de  $r$  et  $r^{-1}$  appartiennent à  $R$ .

Si  $f$  est strictement cycliquement réduit, nous notons  $R(f)$  l'ensemble symétrisé engendré par  $f$ , i.e. le plus petit ensemble symétrisé contenant  $f$ . Il est clair que  $R(f)$  est égal à l'ensemble des conjugués de  $f^{\pm 1}$  de longueur  $\leq |f| + 1$ .

Nous discutons maintenant brièvement de la condition  $C'(\lambda)$  (souvent utilisée pour  $\lambda = 1/6$ ). Nous n'avons pas besoin de cette notion pour notre construction, mais il s'agit du contexte originel où la notion de R-diagramme (voir paragraphe suivant) fut introduite. Soit  $R$  un sous-ensemble symétrisé de  $H$ . Un mot  $b$  est appelé une **pièce** (relativement à  $R$ ) s'il existe des éléments distincts  $r_1, r_2$  de  $R$  tels que  $r_1 = bc_1$  et  $r_2 = bc_2$  sous forme semi-réduite.

**Lemme 33.** *Si  $0 < \lambda < 1$  et  $\forall r \in R, |r| > 1/\lambda$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Si  $r \in R$  admet une écriture semi-réduite  $r = bc$ , où  $b$  est une pièce de  $R$ , alors  $|b| < \lambda|r|$ ;*
- (2)  *$\forall r_1, r_2 \in R$  tel que  $r_1 r_2 \neq 1$ ,  $|r_1 r_2| > |r_1| + |r_2| - 2\lambda \min\{|r_1|, |r_2|\} + 1$ .*

*Preuve.* L'équivalence s'obtient facilement à partir du fait suivant :

Soient  $r_1 = bc_1$  et  $r_2 = bc_2$  deux expressions semi-réduites avec  $b \neq 1$  et  $r_1 \neq r_2$ .

**Fait.** Il existe  $b', c'_1, c'_2$  tels que :

- a) On a  $r_1 = b'c'_1$  et  $r_2 = b'c'_2$ ;
- b) ces expressions sont semi-réduites;
- c) exactement une de ces expressions est réduite;
- d) l'expression  $(c'_1)^{-1}c'_2$  est réduite;
- e)  $|b'| \geq |b|$ .

□

**Définition 34.** Si les assertions équivalentes du lemme 33 sont satisfaites, on dit que  $R$  satisfait la condition  $C'(\lambda)$ .

La première assertion est celle utilisée par Lyndon et Schupp. La seconde est celle utilisée par Danilov, mais il oublie le  $+1$  dans la formule. Ceci conduit à la légère erreur dans son

énoncé que nous avons mentionnée dans l'introduction. Concluons ce paragraphe en rappelant l'un des principal théorèmes en théorie de la petite simplification (voir [15, Th. 11.2, p. 288]) :

**Théorème 35.** *Soit  $R$  un sous-ensemble symétrisé du produit amalgamé  $H$ . Supposons que  $R$  satisfait la condition  $C'(\lambda)$  avec  $\lambda \leq 1/6$ . Alors le sous-groupe normal engendré par  $R$  dans  $H$  est distinct de  $H$ .*

**3.2. Construction d'un R-diagramme.** L'idée d'associer des diagrammes planaires à un produit amalgamé de groupes apparaît dans [24].

En 1966, Lyndon parvient indépendamment à une construction similaire, et Weinbaum redécouvre le papier de van Kampen (voir [14, 25] et [15], p. 236). Pour les définitions basiques autour de la notion de **diagramme**, nous renvoyons le lecteur à [15], chap. V, §1, p. 235; nous ne donnons maintenant qu'un rappel rapide.

Un diagramme est un graphe planaire (ou plus généralement un graphe sur une surface orientable; nous considérerons des diagrammes sphériques dans le lemme 42). Les sommets sont répartis en deux types, **primaire** et **secondaire**. Toute arête joignant deux sommets donne lieu à deux arêtes orientées (en accord avec un choix de direction) que nous appellerons des **demi-segments**. Si  $e$  dénote l'un de ces demi-segments,  $e^{-1}$  réfèrera à l'autre (obtenu en renversant la direction de  $e$ ). Le terme 'arête' sera par la suite utilisé pour désigner certaines unions particulières de demi-segments (voir la remarque terminologique ci-dessous). Un demi-segment joint toujours deux sommets de types différents. Par définition, un **segment** désignera une succession de deux demi-segments particuliers que nous précisons ci-après. Si  $e_1, \dots, e_r$  sont les demi-segments aboutissant sur un sommet secondaire  $v$  et sont indicés dans le sens trigonométrique, alors par définition les segments passant par  $v$  sont les couples de demi-segments successifs  $e_i, e_{i+1}^{-1}$  ainsi que leurs inverses  $e_{i+1}, e_i^{-1}$ , pour  $1 \leq i \leq r$ , où  $i$  et  $i+1$  sont pris modulo  $r$ . Si deux demi-segments successifs  $e, e'$  définissent un segment, ce dernier sera noté  $ee'$ . Remarquons que les sommet initial et terminal d'un segment sont toujours primaire. Par convention, chaque segment (resp. demi-segment) a longueur 1 (resp.  $1/2$ ). Chaque demi-segment orienté  $e$  est étiqueté par un élément  $\phi(e)$  appartenant à l'un des facteurs de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ , avec les étiquettes sur des demi-segments successifs en un sommet secondaire appartenant à un même facteur. On demande l'égalité  $\phi(e^{-1}) = \phi(e)^{-1}$ . Cet étiquetage induit un étiquetage sur les segments, en posant  $\phi(ee') = \phi(e)\phi(e')$ . L'étiquette sur un demi-segment peut éventuellement être dans la partie amalgamée, mais si  $e, e'$  sont les deux demi-segments d'un segment, nous demanderons presque toujours que  $\phi(ee')$  ne soit pas dans la partie amalgamée (en fait, la seule exception à cette règle aura lieu lors de l'étape 4 de la preuve du théorème 36). Nous appelons **région** une composante connexe bornée du complément du graphe dans la surface. Un **cycle de bord** d'une région  $D$  est une collection de demi-segments qui parcourt le tour entier de  $D$  (disons dans le sens trigonométrique dans le cas du plan, ou d'une façon compatible avec l'orientation en général) avec sommet initial de type primaire. De façon analogue, un cycle de bord du diagramme est une collection de demi-segments qui parcourt la frontière du diagramme. Notons qu'un segment appartient nécessairement au bord d'une région et/ou au bord du diagramme.

Soit maintenant  $f$  un élément de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  et considérons  $R(f)$  l'ensemble symétrisé associé. Nous dirons qu'un diagramme est un  **$R(f)$ -diagramme** si pour toute région  $D$  et tout cycle de bord  $e_1 \dots e_s$  de  $D$ , on a  $\phi(e_1) \dots \phi(e_s) \in R(f)$ .

**Terminologie.** Notons que l'on utilise deux sortes de graphes dans cet article : les arbres de Bass-Serre et les diagrammes de Lyndon-Schupp. Dans le contexte d'un arbre de Bass-Serre nous avons déjà employé le terme *arête*, et nous avons appelé *chemin* l'union de plusieurs

arêtes. Dans le contexte des diagrammes de Lyndon-Schupp, nous avons des *segments* et des *demi-segments*. Nous appellerons *arête* dans ce contexte une composante connexe de l'intersection des frontières de deux régions, qui est donc une collection de demi-segments.

Le résultat suivant est l'ingrédient clef dans la preuve du théorème 2. Sa preuve occupe le reste de ce paragraphe.

**Théorème 36.** *Soit  $f \in G$  un élément de  $G$  strictement cycliquement réduit de longueur algébrique (paire)  $|f| \geq 2$ . Supposons que le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est égal à  $G$ . Alors il existe un  $R(f)$ -diagramme planaire  $M$  tel que :*

- (1)  $M$  est connexe et simplement connexe;
- (2) Le bord de  $M$  a longueur  $\frac{1}{2}$  ou 1;
- (3) Si  $e_1 e'_1 \dots e_t e'_t$  est un cycle de bord d'une région de  $M$ , alors  $t = |f|$  et  $\phi(e_1 e'_1) \dots \phi(e_t e'_t)$  est l'écriture réduite d'un conjugué strictement cycliquement réduit de  $f$ .

*Preuve.* Commençons par choisir un élément  $g \neq \text{id}$  avec  $\text{lg}(g) = 0$ . Par hypothèse on peut écrire

$$g = (\phi_1 f^{\pm 1} \phi_1^{-1}) \dots (\phi_n f^{\pm 1} \phi_n^{-1}).$$

avec  $\phi_i \in \text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

Supposons que  $g$  a été choisi de façon à ce que  $n$  soit minimal. Par le lemme 37, nous pouvons supposer que chaque  $\phi_i f^{\pm 1} \phi_i^{-1}$  peut s'écrire sous forme réduite  $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$  (i.e.  $|\psi_i r_i \psi_i^{-1}| = |\psi_i| + |r_i| + |\psi_i^{-1}|$ ) où  $r_i \in R(f)$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $|\psi_i| = 0$  si et seulement si  $\psi_i = \text{id}$ . Notons que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $r_i$  est strictement cycliquement réduit;
- b)  $|r_i| = |f|$ ;
- c)  $|r_i|$  est pair;
- d)  $|\psi_i r_i \psi_i^{-1}|$  est pair.

Dès que l'une de ces assertions est satisfaite, on a forcément  $\psi_i = \text{id}$  (car l'expression  $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$  est réduite).

Expliquons à présent la construction de  $M$ , que nous réalisons en quatre étapes :

Étape 1. Nous associons un diagramme à chaque  $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$ .

Pour notre construction nous choisissons un sommet primaire  $O$  qui jouera le rôle de point base. Soit  $r_i = x_1 \dots x_m$  une forme normale pour  $r_i$ .

- Supposons que  $r_i$  soit strictement cycliquement réduit, i.e.  $m = |f|$ .

Le diagramme associé à  $\psi_i r_i \psi_i^{-1} = r_i$  est la boucle de point base  $O$  constituée des  $2m$  demi-segments  $d_1, d'_1, \dots, d_m, d'_m$  tels que  $\phi(d_j d'_j) = x_j$  pour tout  $j$ .

- Supposons maintenant que  $r_i$  ne soit pas strictement cycliquement réduit, i.e.  $m = |f| + 1$ . Notons que dans ce cas  $(x_m x_1) x_2 \dots x_{m-1}$  est strictement cycliquement réduit.

Le diagramme associé à  $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$  est une boucle de point base un sommet  $v$  joint au point base  $O$  par un chemin :

Soit  $\psi_i = z_1 \dots z_k$  une forme normale pour  $\psi_i$ .

Le chemin  $Ov$  est constitué des  $2k$  demi-segments  $e_1, e'_1, \dots, e_k, e'_k$  tels que  $\phi(e_j e'_j) = z_j$  pour tout  $j$  et d'un demi-segment additionnel final  $e$ .

La boucle au point  $v$  est constituée des  $2m - 2$  demi-segments  $b, d_2, d'_2, \dots, d_{m-1}, d'_{m-1}, c$  tels que  $\phi(d_j d'_j) = x_j$  pour tout  $j$ .

Les trois demi-segments  $e, b, c$  qui se rencontrent au sommet secondaire  $v$  sont étiquetés de façon à satisfaire les conditions nécessaires (et compatibles)  $\phi(eb) = x_1$ ,  $\phi(ce^{-1}) = x_m$  et

$\phi(cb) = x_m x_1$ . On peut prendre par exemple  $\phi(b) = x_1$ ,  $\phi(c) = x_m$  et  $\phi(e) = \text{id}$ .

Étape 2. Le diagramme initial pour la composition

$$g = (\Psi_1 r_1 \Psi_1^{-1}) \cdots (\Psi_n r_n \Psi_n^{-1})$$

est obtenu en considérant l'union des diagrammes associés à chaque  $\Psi_i r_i \Psi_i^{-1}$ , lesquels sont disposés autour du point base  $O$  dans le sens trigonométrique. Ce diagramme initial satisfait déjà les propriétés (1) et (3).

Étape 3. Nous allons maintenant identifier certains demi-segments de  $M$  jusqu'à ce que la longueur du bord de  $M$  devienne  $\leq 2$ .

Notons que lors de ces identifications :

- Nous identifierons toujours un sommet primaire avec un sommet primaire et un sommet secondaire un sommet secondaire, préservant la distinction entre ces deux classes;
- L'étiquette d'un segment ne sera jamais dans la partie amalgamée;
- Le nombre  $n$  de régions de  $M$  restera inchangé et (1), (3) seront satisfaits à tout moment du processus;
- Si  $\alpha$  est un cycle de bord de  $M$ , alors  $\phi(\alpha)$  est un conjugué de  $g$ .

Par soucis de simplicité, les vérifications faciles mais fastidieuses du second point (à propos de l'étiquette des segments) seront omises dans les deux cas ci-dessous.

Si la longueur du bord de  $M$  est  $\geq 3$ , il doit nécessairement exister deux segments successifs  $ee'$  et  $ff'$  dans  $\partial M$  tels que les étiquettes  $\phi(ee')$  et  $\phi(ff')$  soient dans un même facteur de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . En effet, sinon tout cycle de bord  $\alpha = e_1 e'_1 \dots e_i e'_i$  de  $M$  aurait longueur paire  $i \geq 4$  et son étiquette  $\phi(\alpha) = \phi(e_1 e'_1) \dots \phi(e_i e'_i)$  serait un conjugué strictement cycliquement réduit de  $g$  : contradiction.

Nous pouvons donc considérer l'élément  $s = \phi(ee')\phi(ff')$  qui appartient à l'un des facteurs de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ .

**Case 1:** Supposons que  $s$  n'est pas dans la partie amalgamée.

Dans ce cas nous remplaçons l'étiquette sur le demi-segment  $e'$  par 1, et nous réajustons les étiquettes sur les autres demi-segments issus du sommet secondaire séparant  $e$  et  $e'$ . Autrement dit, pour chaque demi-segment  $g$  aboutissant à ce sommet secondaire, nous remplaçons son étiquette  $\phi(g)$  par  $\phi(ge')$ .

De façon analogue, nous remplaçons l'étiquette sur le demi-segment  $f$  par 1, et nous réajustons les étiquettes sur les autres demi-segments issus du sommet secondaire séparant  $f$  et  $f'$ .

Nous identifions alors les demi-segments (orientés)  $e'$  et  $f^{-1}$  (qui ont à présent mêmes étiquettes) (voir figure 3, où les  $\bullet$  sont des sommets primaires et les  $\circ$  sont des sommets secondaires).

**Case 2:** Supposons que  $s$  soit dans la partie amalgamée.

Remarquons tout d'abord que le diagramme ne contient pas de boucle de longueur  $\leq 2$  avec étiquette totale dans l'un des facteurs de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . En effet sinon une telle boucle  $\alpha$  serait un cycle de bord pour un sous-domaine strictement plus petit, et par le

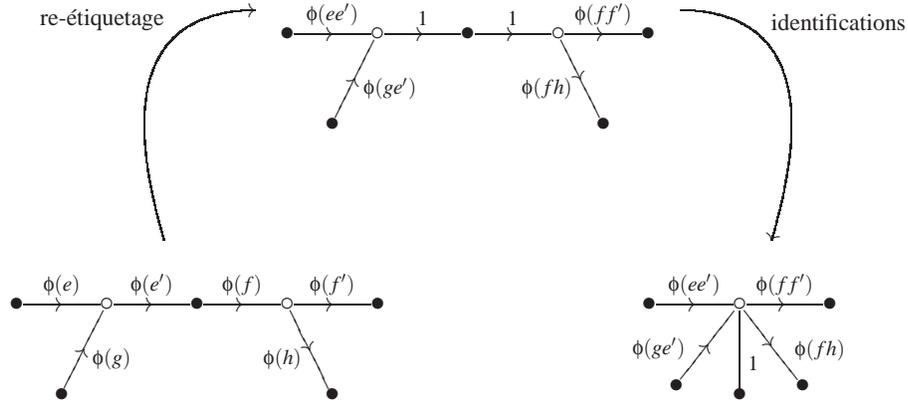


FIGURE 3. Changement d'étiquettes et identifications dans le cas 1.

lemme 38 ci-dessous,  $\phi(\alpha)$  serait un produit de strictement moins que  $n$  conjugués de  $f$ . Ceci viendrait contredire la minimalité de  $n$ .

Par conséquent, si  $u$  est le sommet initial de  $ee'$ ,  $v$  son sommet terminal (ainsi que le sommet initial de  $ff'$ ) et  $w$  le sommet terminal de  $ff'$ , alors les sommets  $u, v, w$  sont distincts.

Rappelons que  $\phi(f)\phi(f') = \phi(e')^{-1}\phi(e)^{-1}s$ . On change l'étiquetage de la façon suivante (voir figure 4):

- on remplace l'étiquette de  $f$  par  $\phi(e')^{-1}$ , et l'on ajuste les étiquettes sur les autres demi-segments issus du sommet secondaire séparant  $f$  et  $f'$ ;
- on remplace l'étiquette de  $f'$  par  $\phi(e)^{-1}$ ;
- pour chaque demi-segment  $g$  ayant  $w$  pour sommet initial, on remplace son étiquette  $\phi(g)$  par  $s\phi(g)$ .

Nous identifions alors les segments (orientés)  $e, e'$  et  $f'^{-1}, f^{-1}$  (qui ont à présent les mêmes étiquettes).

Notons qu'après avoir effectué l'identification du cas 1 (resp. du cas 2) la longueur du bord chute de 1 (resp. de 2). Notons également que si deux régions  $D_1$  et  $D_2$  partagent au moins un demi-segment, et si  $r_1, r_2$  sont deux cycles de bords de ces régions par rapport à un même point base, alors on ne peut avoir  $r_1 = r_2^{-1}$ . En effet sinon en supprimant ces deux régions du diagramme et en appliquant le lemme 38 on obtiendrait un nouvel élément de  $R(f)$  qui viendrait contredire la minimalité de  $n$ . En fait, par le lemme 39, deux régions du diagramme ne partagent jamais une arête de longueur plus grande que 4.

Étape 4. Par récurrence, l'étape précédente produit un diagramme  $M$  dont le bord a longueur  $\leq 2$ . Nous réalisons enfin une dernière identification pour obtenir un bord de longueur au plus 1. Si cette dernière identification correspond au cas 1 il n'y a pas de problème particulier. Cependant, si l'on se trouve dans le cas 2, alors nous ne pouvons plus supposer que les sommets  $u$  et  $w$  sont disjoints. C'est pourquoi nous modifions légèrement la procédure : nous conservons la nouvelle étiquette de  $f'$ , à savoir  $\phi(e)^{-1}s$ , et nous n'identifions que les demi-segments  $e'$  et  $f$ . Il est possible qu'après cette identification l'étiquette du segment  $ef'$  sur le bord de  $M$  soit

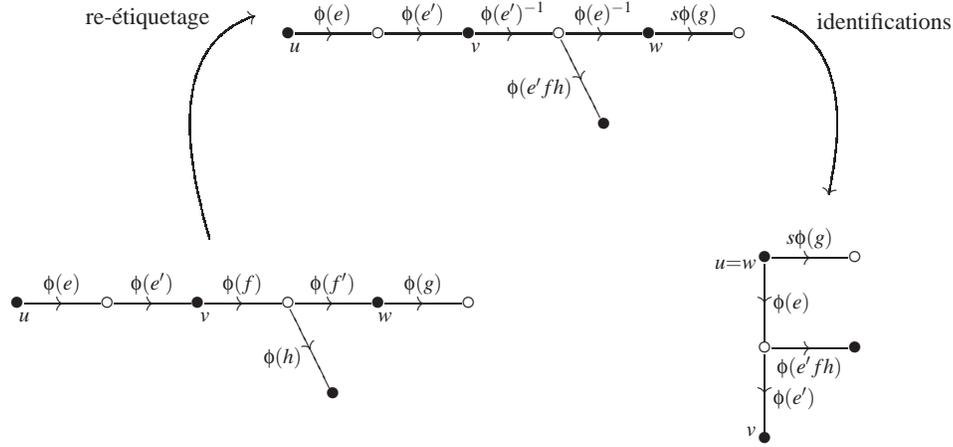


FIGURE 4. Changement d'étiquettes et identifications dans le cas 2.

dans la partie amalgamée : à part un désagrément de nature esthétique ceci ne causera pas de problème lors de la preuve du théorème 45.  $\square$

**Lemme 37.** *Tout conjugué de  $f$  (notation du théorème 36) peut s'écrire sous forme réduite  $\psi r \psi^{-1}$ , où  $r$  est un conjugué faiblement cycliquement réduit de  $f$ .*

*Preuve.* Rappelons qu'un élément hyperbolique de  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est strictement (resp. faiblement) cycliquement réduit si et seulement si sa géodésique contient (resp. intersecte) l'arête  $e = \text{id}(A \cap E)$  dans l'arbre de Bass-Serre (voir le lemme 8). Soit maintenant  $g$  un conjugué de  $f$ . Si la géodésique de  $g$  intersecte  $e$ , nous posons simplement  $\psi = \text{id}$ ,  $r = g$ . Par conséquent, supposons que cette géodésique n'intersecte pas  $e$ .

Soit  $\text{dist}$  la distance naturelle dans l'arbre de Bass-Serre et  $I$  le milieu de l'arête  $e$ . Pour tout élément  $h$  de  $G$ , on a  $|h| = \text{dist}(I, h(I))$ .

Soit  $p \in \text{Géo}(g)$  l'unique sommet tel que  $\text{dist}(\text{Géo}(g), e) = \text{dist}(p, e)$ . Comme  $\text{dist}(p, e) \geq 1$ , il existe un unique point  $I'$  sur le segment géodésique  $[p, I]$  tel que  $\text{dist}(p, I') = \frac{1}{2}$ . Le groupe  $G$  agit transitivement sur les milieux des arêtes de l'arbre de Bass-Serre, il existe donc un élément  $\psi$  de  $G$  tel que  $\psi(I) = I'$ . Posons  $r = \psi^{-1} g \psi$ . On a  $\text{Géo}(r) = \psi^{-1}(\text{Géo}(g))$  et  $\text{dist}(\text{Géo}(g), I') = \frac{1}{2}$ , ainsi  $\text{dist}(\text{Géo}(r), I) = \frac{1}{2}$  et  $\text{Géo}(r)$  rencontre  $e$ , i.e.  $r$  est faiblement cycliquement réduit. Finalement, on a  $|g| = \text{dist}(I, g(I)) = \text{lg}(g) + 2\text{dist}(I, \text{Géo}(g)) = |f| + 2\text{dist}(I, I') + 1$ ,  $|\psi| = \text{dist}(I, I')$  et  $|r| = |f| + 1$ , et donc  $|g| = |\psi| + |r| + |\psi^{-1}|$ .  $\square$

Le résultat suivant peut être prouvé de façon analogue au lemme 1.2 de [15, p. 239] (à savoir, par récurrence sur le nombre  $m$  de régions).

**Lemme 38.** *Soit  $M$  un diagramme orienté, connexe et simplement connexe, comptant  $m$  régions  $D_1, \dots, D_m$ . Soit  $\alpha$  un cycle de bord de  $M$  (commençant en un sommet de  $\partial M$ ) et soit  $\beta_i$  un cycle de bord de  $D_i$  (commençant en un sommet de  $\partial D_i$ ), pour  $1 \leq i \leq m$ . Alors  $\phi(\alpha)$  appartient au sous-groupe normal engendré par les  $\phi(\beta_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Plus précisément, il existe  $u_1, \dots, u_m$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  tels que*

$$\phi(\alpha) = (u_1 \phi(\beta_1) u_1^{-1}) \dots (u_m \phi(\beta_m) u_m^{-1}).$$

**3.3. Un dictionnaire entre les théories de Bass-Serre et de Lyndon-Schupp.** Soit  $\alpha$  un cycle de bord d'une région de  $M$  (notations comme dans le théorème 36) commençant en un sommet  $v$ . Si  $v$  est primaire (resp. secondaire),  $\phi(\alpha)$  est une écriture sous forme réduite d'un élément strictement cycliquement réduit (resp. non strictement cycliquement réduit) de  $R(f)$ .

**Lemme 39.** Si  $D_1, D_2$  sont deux régions distinctes d'un diagramme  $M$  ayant une arête commune, il existe un sommet primaire  $v$  dans  $\partial D_1 \cap \partial D_2$  tel que les étiquettes  $g_1, g_2$  des cycles de bords de  $D_1, D_2$  commençant en  $v$  satisfont

$$|\text{Géo}(g_1) \cap \text{Géo}(g_2)| \geq |\partial D_1 \cap \partial D_2|.$$

*Preuve.* Si  $k$  est le plus grand entier tel que  $k < |\partial D_1 \cap \partial D_2|$ , il existe un chemin de  $k$  segments  $s_1, \dots, s_k$  inclus dans  $\partial D_1 \cap \partial D_2$ . En fait, nous pouvons simplement choisir  $v$  comme sommet initial ou terminal de ce chemin (si  $k = 0$ , ces deux sommets coïncident). En effet on peut supposer que  $g_1$  a forme normale  $g_1 = \phi(s_1) \dots \phi(s_k) x_1 \dots x_m$  (où chaque  $x_i$  est dans un facteur de  $G$ ). Par conséquent,  $g_2^{-1}$  a forme normale  $g_2^{-1} = \phi(s_1) \dots \phi(s_k) y_1 \dots y_m$  (où chaque  $y_i$  est dans l'un des facteurs de  $G$ ).

Les géodésiques  $\text{Géo}(g_1)$  et  $\text{Géo}(g_2^{-1}) = \text{Géo}(g_2)$  contiennent alors les  $k + 1$  arêtes consécutives :

$$\text{id}(A \cap E), \phi(s_1)(A \cap E), \dots, \phi(s_1) \dots \phi(s_k)(A \cap E).$$

□

**Exemple 40.** Supposons que  $M$  contienne les deux régions représentées sur la figure 5 (les  $\bullet$  sont des sommets primaires, les sommets secondaires sont notés par  $\circ$  seulement quand leur valence est  $\geq 3$ ).

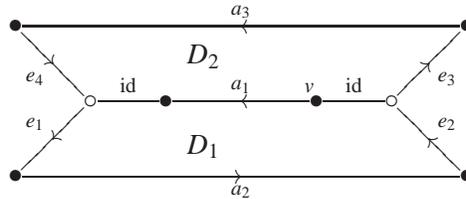


FIGURE 5.

On obtient  $g_1 = a_1 e_1 a_2 e_2$ ,  $g_2 = e_3 a_3 e_4 a_1^{-1}$  et la figure 6 représentent les géodésiques dans l'arbre de Bass-Serre. Notons qu'ici pour simplifier nous avons pris  $D_1$  et  $D_2$  avec bord de longueur 4, mais dans le contexte du théorème 36 toute région a un bord de longueur au moins 10.

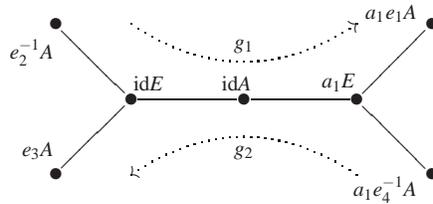


FIGURE 6.

**Lemme 41.** *Si  $v$  est un sommet de valence 3 dans  $M$  avec des régions  $D_1, D_2, D_3$  se rencontrant en  $v$ , et si  $g_1, g_2, g_3$  sont les étiquettes des cycles de bords de ces régions avec point base  $v$ , alors les géodésiques des  $g_i$  forment un tripode dans l'arbre de Bass-Serre et pour tous  $i, j$ :*

$$|\text{Géo}(g_i) \cap \text{Géo}(g_j)| \geq |\partial D_i \cap \partial D_j|.$$

*Preuve.* Le sommet  $v$  est nécessairement secondaire. Soit  $e_1$  (resp.  $e_2$ , resp.  $e_3$ ) le demi-segment (orienté) inclus dans  $\partial D_2 \cap \partial D_3$  (resp.  $\partial D_1 \cap \partial D_3$ , resp.  $\partial D_1 \cap \partial D_2$ ) ayant  $v$  pour sommet initial. Les  $\phi(e_i)$  sont dans un même facteur de  $G$  et si  $i \neq j$ ,  $\phi(e_i)\phi(e_j)^{-1}$  n'est pas dans la partie amalgamée. Comme dans le lemme 39, soit  $k$  le plus grand entier tel que  $k < |\partial D_1 \cap \partial D_2|$  et soient  $s_1, \dots, s_k$  des segments tels que le chemin  $e_3, s_1, \dots, s_k$  soit inclus dans  $\partial D_1 \cap \partial D_2$ . On peut supposer que  $g_1$  admet pour forme normale

$$g_1 = \phi(e_3)\phi(s_1) \dots \phi(s_k)x_1 \dots x_m\phi(e_2)^{-1},$$

où chaque  $x_i$  est dans l'un des facteurs de  $G$ . Par conséquent,  $g'_1 = \phi(e_3)^{-1}g_1\phi(e_3)$  est strictement cycliquement réduit et a forme normale

$$g'_1 = \phi(s_1) \dots \phi(s_k)x_1 \dots x_{m+1},$$

où  $x_{m+1} = \phi(e_2)^{-1}\phi(e_3)$ . Comme la géodésique de  $g'_1$  contient les arêtes consécutives

$$\text{id}(A \cap E), \phi(s_1)(A \cap E), \dots, \phi(s_1) \dots \phi(s_k)(A \cap E),$$

il est clair que la géodésique de  $g_1$  contient les arêtes consécutives

$$\phi(e_3)(A \cap E), \phi(e_3)\phi(s_1)(A \cap E), \dots, \phi(e_3)\phi(s_1) \dots \phi(s_k)(A \cap E).$$

On peut montrer de la même façon que ces arêtes sont aussi contenues dans la géodésique de  $g_2$ , on obtient donc que  $|\text{Géo}(g_1) \cap \text{Géo}(g_2)| \geq |\partial D_1 \cap \partial D_2|$ . Les autres inégalités se prouvent de façon similaire. Pour finir la preuve notons que  $\text{Géo}(g_1) \cap \text{Géo}(g_3)$  contient l'arête  $\phi(e_2)(A \cap E)$  et que  $\text{Géo}(g_2) \cap \text{Géo}(g_3)$  contient l'arête  $\phi(e_1)(A \cap E)$ . Si les  $\phi(e_i)$  sont dans le facteur  $A$  (resp.  $E$ ), il est clair que les trois arêtes  $\phi(e_i)(A \cap E)$  s'intersectent au sommet  $\text{id}A$  (resp.  $\text{id}E$ ).  $\square$

#### 4. LA PREUVE DU THÉORÈME 2

**4.1. Un résultat de courbure.** Rappelons quelques notations tirées de [15]. Si  $v$  est un sommet d'un diagramme  $M$ , le degré  $d(v)$  (ou autrement dit la valence) de  $v$  correspond au nombre d'arêtes orientées admettant  $v$  pour sommet initial. (ainsi, si une arête a ses deux extrémités en  $v$ , elle est comptée deux fois). Si  $D$  est une région, le degré  $d(D)$  de  $D$  correspond au nombre d'arêtes de  $D$ .

La formule suivante doit être vue comme la contribution à la courbure totale d'une région donnée :

$$\delta(D) = 2 - d(D) + \sum_{v \in D} \frac{2}{d(v)}.$$

**Lemme 42.** *Pour tout diagramme sur la sphère, on a*

$$4 = \sum_D \delta(D).$$

*Preuve.* Soient  $V, E, F$  les nombres de sommets, arêtes et faces du diagramme. La formule est une conséquence directe de la formule d'Euler sur la sphère  $2 = V - E + F$  et des relations évidentes  $2E = \sum_{(v,D)} 1$ ,  $V = \sum_{(v,D)} \frac{1}{d(v)}$  et  $F = \sum_{(v,D)} \frac{1}{d(D)}$  :

$$4 = 2V + 2F - 2E = \sum_{(v,D)} \left( \frac{2}{d(v)} + \frac{2}{d(D)} - 1 \right) = \sum_D \delta(D)$$

où la première somme est prise sur les couples  $(v, D)$  avec  $v$  un sommet et  $D$  une face tels que  $v \in D$ .  $\square$

**Corollaire 43.** *Pour tout diagramme homéomorphe au disque, on a*

$$2 \leq \sum_D \delta(D).$$

*Preuve.* Soit  $K$  un tel diagramme. Soit  $L$  le diagramme sphérique obtenu en recollant le long de leur bord deux copies  $K_1$  et  $K_2$  de  $K$ . Comme  $L$  est homéomorphe à la sphère, on a  $4 = \sum_{D \in L} \delta(D)$ , i.e.

$$4 = \sum_{D \in K_1} \delta(D) + \sum_{D \in K_2} \delta(D) = 2 \sum_{D \in K_1} \delta(D) \leq 2 \sum_{D \in K} \delta(D).$$

La dernière inégalité provient du fait que pour chaque région externe  $D$  dans  $K$  la contribution à la courbure  $\delta(D)$  calculée dans le diagramme du disque est plus grande que la contribution calculée dans le diagramme sphérique.  $\square$

*Remarque 44.* Voici une liste (non exhaustive) de faces  $D$  ayant une courbure négative ou nulle :

- $D$  avec  $d(D) \geq 6$ ;
- $D$  avec  $d(D) = 5$ , et au plus 3 sommets de  $D$  sont des tripodes;
- $D$  avec  $d(D) = 4$ , et tout sommet de  $D$  a valence au moins 4;
- $D$  avec  $d(D) = 4$ , et  $D$  admet un tripode, deux sommets de valence au moins 4 et un quatrième sommet de valence au moins 6;
- $D$  avec  $d(D) = 3$ , et chaque sommet de  $D$  a valence au moins 6.

**4.2. La fin de la preuve.** Nous pouvons maintenant prouver le théorème 2. Comme pour le théorème 1, nous prouvons un énoncé plus géométrique et légèrement plus fort :

**Théorème 45.** *Si  $f \in G$  est un élément hyperbolique de longueur géométrique  $\lg(f) \geq 14$  satisfaisant la condition (C2), alors le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est différent de  $G$ .*

*Preuve.* On peut supposer que  $f$  est un élément strictement cycliquement réduit de longueur  $\lg(f) = |f| = 2l \geq 14$ . Si le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  était égal à  $G$  alors, d'après le théorème 36, il existerait un  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ -diagramme orienté  $M$  tel que que :

- (1)  $M$  est connexe et simplement connexe;
- (2) Le périmètre de  $M$  est  $\leq 1$ ;
- (3) Si  $e_1 e'_1 \dots e_t e'_t$  est un cycle de bord d'une région de  $M$ , alors  $t = |f|$  et  $\phi(e_1 e'_1) \dots \phi(e_t e'_t)$  est une forme réduite d'un conjugué strictement cycliquement réduit de  $f$ .

Soient  $D_1, D_2$  deux régions distinctes de  $M$  ayant une arête commune. Par la proposition 19 et le lemme 39, on a  $|\partial D_1 \cap \partial D_2| \leq 4$ . Comme  $|\partial D_1| \geq 14$ , on conclut que toute région intérieure admet au moins 4 arêtes.

De plus, si  $D_1, D_2, D_3$  sont trois régions distinctes de  $M$  ayant un sommet commun de valence 3, par le lemme 29 et le lemme 41 nous savons que chaque arête  $\partial D_i \cap \partial D_j$  est au plus de longueur 2. Par conséquent, si une région intérieure admet au moins un sommet de valence 3, alors cette région admet au moins 5 arêtes. De façon similaire, si une région intérieure admet au moins trois sommets de valence 3, alors cette région admet au moins 6 arêtes.

A l'aide des observations précédentes et de la remarque 44, on conclut que la contribution à la courbure  $\delta(D)$  de chaque région intérieure  $D$  est négative ou nulle. Examinons à présent la

contribution des régions en bordure de diagramme. Comme le périmètre est au plus 1 (i.e. au plus deux demi-segments), il y a au plus 2 telles régions.

Supposons d'abord qu'il y a exactement 2 régions au bord. Comme l'arête externe d'une telle région  $D$  est un demi-segment, il est facile de vérifier que  $D$  admet au moins 5 arêtes, et que si au moins l'un des sommets intérieur est de valence 3 alors  $D$  admet au moins 6 arêtes. Ainsi  $\delta(D) \leq 0$ .

Supposons enfin qu'il n'y ait qu'une seule région  $D$  au bord. Alors l'unique sommet externe de  $D$  (qui doit être compté deux fois) a valence au moins 4. Par ailleurs  $D$  admet au moins 5 arêtes, et si  $D$  admet exactement 5 arêtes alors les 3 sommets intérieurs ne peuvent être tous de valence 3, ainsi de nouveau on obtient  $\delta(D) \leq 0$ .

En conclusion nous avons  $\sum \delta(D) \leq 0$ , ce qui vient contredire le lemme 43. Ainsi le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  ne peut être égal à  $G$ .  $\square$

### 5. LES CAS RESTANT: LONGUEUR 10 ET 12

Dans cette section nous évoquons quelques unes des difficultés qui attendent le lecteur qui chercherait à étendre nos résultats au cas d'un automorphisme de longueur 10 ou 12. Nous donnons également deux exemples de configurations étonnantes dans l'arbre de Bass-Serre.

**5.1. Longueur 12.** Le principale problème pour adapter notre stratégie au cas de  $f$  avec  $\text{lg}(f) = 12$  est qu'il faut tenir compte de la possibilité de régions dans un  $R(f)$ -diagramme qui soient des triangles avec trois arêtes de longueur 4. Nous sommes alors contraints d'étudier nous seulement les tripodes, provenant de trois 3 conjugués de  $f$ , mais également leur généralisation naturelle, que l'on peut appeler  $n$ -podes, provenant de  $n$  conjugués  $f_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) de  $f$ . Il s'agit du cas où les géodésiques  $\text{Géo}(f_i)$  ont un unique sommet commun et où chaque paire  $\text{Géo}(f_i), \text{Géo}(f_{i+1})$  admet au moins une arête commune (où  $i = 0, \dots, n-1$  et l'indice est pris modulo  $n$ ). Pour être sûr que la contribution à la courbure d'un tel triangle soit négative ou nulle il suffirait de savoir prouver le

**Lemme/conjecture 46.** *Si  $n$  conjugués de  $f$  forment un  $n$ -pode dans l'arbre de Bass-Serre, et qu'au moins deux branches consécutives ont longueur 4, alors  $n \geq 6$ .*

Nous pensons que ce résultat est vrai, mais sa vérification semble nécessiter l'examen d'une très longue liste de cas : c'est pourquoi il ne nous semble pas raisonnable de tenter de présenter une preuve. Cependant il est intéressant de constater qu'il existe des 6-podes avec toutes les branches de longueur 4.

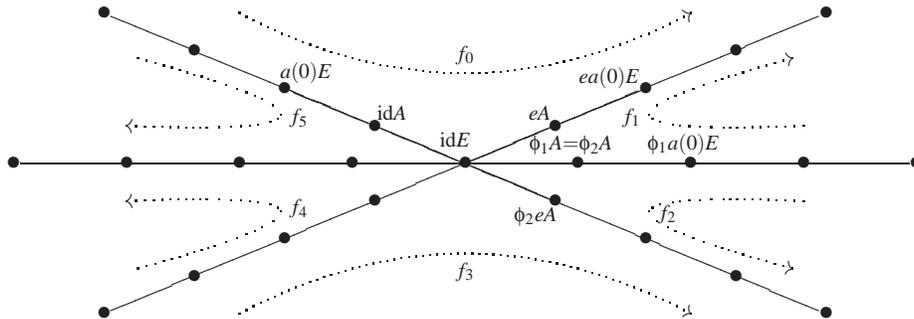


FIGURE 7. A 6-pode avec branches de longueur 4 (exemple 47)

**Exemple 47** (6-pode avec branches de longueur 4). Considérons un automorphisme  $f_0$  de longueur  $2l \geq 8$  de la forme :

$$f_0 = e_1 a e_2 a \cdots e_1 a$$

où  $a = a(0) = (y, -x)$ . Supposons que  $e_1 = (x + P(y), y)$ , et notons  $e = e_1$ . Nous allons construire cinq conjugués  $f_1, \dots, f_5$  de  $f_0$  tels que leur géodésiques forment un 6-pode (voir figure 7).

Pour  $i = 1, \dots, 5$ , choisissons des constantes  $c_i \neq 0$  et posons  $t_i = (x, y + c_i)$ . On pose  $f_i = \phi_i f_0 \phi_i^{-1}$  où

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e t_1 e^{-1} \\ \phi_2 &= e t_1 e^{-1} t_2 \\ \phi_3 &= e t_1 e^{-1} t_2 e t_3 e^{-1} \\ \phi_4 &= e t_1 e^{-1} t_2 e t_3 e^{-1} t_4 \\ \phi_5 &= e t_1 e^{-1} t_2 e t_3 e^{-1} t_4 e t_5 e^{-1}. \end{aligned}$$

Notons que les  $\phi_i$  sont tous des éléments de  $E$ .

Nous affirmons que pour tout  $i = 0, \dots, 4$ , les géodésiques de  $f_i$  et  $f_{i+1}$  partagent un chemin de 4 arêtes dont  $\text{id}E$  est une extrémité.

Considérons le cas  $i = 0$ . On a  $\text{Géo}(f_1) = \phi_1(\text{Géo}(f_0))$ . Rappelons que  $t_1$  fixe la boule fermée de rayon 2 centrée en  $a(0)E$  (remarque 17), et donc  $\phi_1$  fixe la boule de rayon 2 centrée en  $ea(0)E$ , ce qui prouve l'affirmation dans ce cas.

Prenons maintenant  $i = 1$ . Notons que  $f_2 = \phi_1 t_2 f_0 t_2^{-1} \phi_1^{-1} = \phi_1 t_2 \phi_1^{-1} f_1 \phi_1 t_2^{-1} \phi_1^{-1}$ , et  $\phi_1 t_2 \phi_1^{-1}$  fixe la boule de rayon 2 centrée en  $\phi_1 a(0)E$ . Ainsi les géodésique de  $f_1$  et  $f_2$  partagent 4 arêtes. On peut faire un calcul similaire pour  $i = 2, 3, 4$ .

Supposons maintenant que les constantes  $c_i$  satisfont :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_3 + c_4 + c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Par exemple on peut prendre  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, 1, -2, 1, 1)$ .

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \phi_5 &= e t_1 e^{-1} t_2 e t_3 e^{-1} t_4 e t_5 e^{-1} = \\ &(x + P(y + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) - P(y + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) + P(y + c_3 + c_4 + c_5) \\ &\quad - P(y + c_4 + c_5) + P(y + c_5) - P(y), y + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) = (x, y - c_3). \end{aligned}$$

Comme  $(x, y - c_3)$  fixe la boule de rayon 2 centrée en  $a(0)E$ , ceci implique que les géodésiques de  $f_0$  et  $f_5$  partagent 4 arêtes, comme indiqué sur la figure 7.

**5.2. Longueur 10.** Le cas où  $f$  est de longueur 10 semble encore plus incertain. Entre autre il faudrait considérer la possibilité de régions pentagonales avec toutes les arêtes de longueur 2 et tous les sommets de valence 3. Il est probablement facile d'exclure ce cas, mais il en y a d'autres qui paraissent plus délicats. On pourrait par exemple avoir des régions triangulaires avec arêtes de longueur 4, 4, 2. L'exemple 47 nous permet de coller 6 tels triangles le long de leurs arêtes de longueur 4, obtenant ainsi un  $R(f)$ -diagramme de périmètre 12. On peut imaginer qu'il puisse être possible de coller deux tels diagrammes pour obtenir un  $R(f)$ -diagramme sphérique (dans ce cas notre stratégie serait mise en défaut). Une telle construction nécessiterait des 4-podes avec branches 4, 2, 4, 2. Nous ne savons pas si cela est possible, mais l'exemple

qui suit montre qu'à nouveau il faudrait des calculs minutieux pour exclure un tel cas (notons également que l'adjectif 'consécutives' était crucial dans l'énoncé du lemme 46)

**Exemple 48** (4-pode avec branches de longueur 4, 1, 4, 1). De manière analogue à l'exemple précédent nous posons  $f_i = \phi_i f_0 \phi_i^{-1}$  où

$$\begin{aligned}\phi_1 &= et_1 e^{-1} \\ \phi_2 &= et_1 e^{-1} t_2 \\ \phi_3 &= et_1 e^{-1} t_2 et_3 e^{-1}\end{aligned}$$

avec  $t_1 = t_3 = (x + c, y)$  et  $t_2 = (-x, y - c)$ . Alors on vérifie que  $\phi_3 = (-x, y + c)$  et que les géodésiques des  $f_i$  forment un 4-pode comme indiqué sur la figure 8.

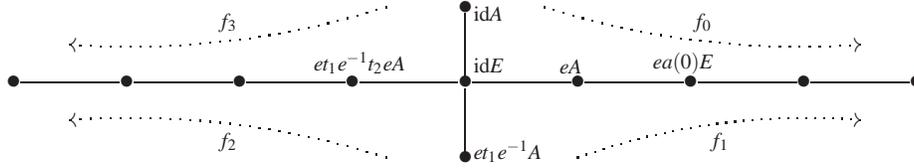


FIGURE 8. Un 4-pode avec branches 4,1,4,1 (exemple 48)

#### ANNEXE : GÉNÉRICITÉ DE LA CONDITION (C2)

Nous commençons avec une reformulation du théorème 45:

**Théorème 49.** Soit  $l \geq 7$  un entier. Supposons que les polynômes  $P_1, \dots, P_l \in \mathbb{C}[y]$  soient généraux et indépendants. Si un élément  $f$  de  $G$  peut s'écrire  $f = a_1 e_1 \dots a_l e_l$  où  $e_i = e(P_i)$  et  $a_i \in A \setminus E$  pour chaque  $i$ , alors le sous-groupe normal engendré par  $f$  dans  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$  est différent de  $G$ .

Dans cette annexe, nous allons montrer que si  $P_1, \dots, P_l$  sont génériques (dans un sens à préciser), alors ils sont généraux et indépendants. Nous donnerons aussi des exemples explicites.

**A. Généricité de la condition (C1).** Le but de ce paragraphe est de montrer que la condition (C1) est générique (voir le corollaire 57 et la remarque 58). Pour des raisons techniques nous introduisons tout d'abord une variation de la notion de polynôme général (voir définition 15).

**Lemme 50.** Soit  $Q \in \mathbb{C}[y]$  un polynôme. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, Q(y) = \alpha Q(\beta y + \gamma) \implies \alpha = \beta = 1 \text{ et } \gamma = 0;$
- (2)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, Q(y) = \alpha Q(\beta y + \gamma) \implies \beta = 1.$

*Preuve.* (1)  $\implies$  (2) est clair. Nous prouvons maintenant (2)  $\implies$  (1). Si  $Q$  satisfait (2), notons que  $Q$  ne peut pas être constant. Si  $Q(y) = \alpha Q(y + \gamma)$ , il suffit de montrer que  $\gamma = 0$ . Soit  $\zeta$  une racine de  $Q$ . Comme  $\zeta + n\gamma$  est aussi une racine de  $Q$  pour tout entier  $n$ , on doit avoir  $\gamma = 0$ .  $\square$

**Définition 51.** Nous dirons que  $Q$  est **faiblement général** s'il satisfait les assertions équivalentes du lemme 50.

*Remarque 52.* Il est clair que si  $Q'$  est faiblement général alors  $Q$  est aussi faiblement général. De plus,  $Q^{(k)}$  est faiblement général si et seulement si les assertions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- (1)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \deg(Q(y) - \alpha Q(\beta y + \gamma)) < k \implies \alpha = \beta = 1 \text{ et } \gamma = 0;$   
(2)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \deg(Q(y) - \alpha Q(\beta y + \gamma)) < k \implies \beta = 1.$

Autrement dit, un polynôme  $Q$  de degré  $d \geq 5$  est général si et seulement si  $Q^{(d-3)}$  est faiblement général.

**Lemme 53.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $Q$  n'est pas faiblement général;  
(2) il existe  $c \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{C}[y], k \geq 0, n \geq 2$  tel que  $Q(y+c) = y^k R(y^n).$

*Preuve.* (1)  $\implies$  (2). Si  $Q$  n'est pas faiblement général, il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  avec  $\beta \neq 1$  tel que  $Q(y) = \alpha Q(\beta y + \gamma)$ . Si l'on pose  $c = \frac{\gamma}{1-\beta}$ , alors le polynôme  $P(y) = Q(y+c)$  satisfait  $P(y) = \alpha P(\beta y)$ . En écrivant  $P = \sum_i p_i y^i$ , la dernière équation est équivalente à  $\forall i, (1 - \alpha \beta^i) p_i = 0$ . Si  $\beta$  n'est pas une racine de l'unité, ceci implique qu'il existe  $k \geq 0$  tel que  $P = p_k y^k$ . Supposons maintenant que  $\beta$  est une racine primitive  $n$ ème de l'unité. Si  $P \neq 0$ , il existe  $k \geq 0$  tel que  $p_k \neq 0$  et donc  $\alpha = \beta^{-k}$ . Comme  $p_i \neq 0$  implique  $i \equiv k \pmod{n}$ , nous obtenons  $P = y^k R(y^n)$ , où  $R(y) = \sum_i p_{k+ni} y^i$ .

(2)  $\implies$  (1). C'est une conséquence des calculs ci-dessus.  $\square$

**Proposition 54.** (1) Si  $d \geq 3$ , un élément générique de  $\mathbb{C}[y]_{\leq d}$  est faiblement général;  
(2) Si  $d \geq 5$ , un élément générique de  $\mathbb{C}[y]_{\leq d}$  est général.

*Preuve.* Si  $u \in \mathbb{R}$ , nous notons  $[u]$  sa partie entière.

(1) Si  $Q \in \mathbb{C}[y]_{\leq d}$  n'est pas faiblement général, par le lemme 53 on peut écrire

$$Q(y) = (y-c)^k R((y-c)^n)$$

où  $0 \leq k \leq d, 2 \leq n \leq d, c \in \mathbb{C}, e = [d/n]$  et  $R \in \mathbb{C}[y]_{\leq e}$ . Par conséquent,  $Q$  appartient à l'image du morphisme suivant

$$\varphi_{k,n} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}[y]_{\leq e} \rightarrow \mathbb{C}[y], (c, R(y)) \mapsto (y-c)^k R((y-c)^n).$$

Cependant

$$\dim \text{Im} \varphi_{k,n} \leq \dim(\mathbb{C} \times \mathbb{C}[y]_{\leq e}) = e + 2 \leq \frac{d}{n} + 2 \leq \frac{d}{2} + 2 < d + 1 = \dim \mathbb{C}[y]_{\leq d}.$$

(2) est une conséquence directe de (1), en considérant l'application  $Q \mapsto Q^{(d-3)}$ , et en utilisant la remarque 52.  $\square$

**Proposition 55.** Si  $d_1, d_2 \geq 5$  et  $(P_1, P_2)$  est un élément générique de  $\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}$ , alors  $P_1, P_2$  représentent des couleurs distinctes.

*Preuve.* Par le lemme 12, si  $P_1, P_2$  représentent la même couleur, alors  $(P_1, P_2)$  appartient à l'image du morphisme suivant :  $\varphi : \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}[y] \times \mathbb{C}[y], (P_1, (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)) \mapsto (P_1, \alpha P_1(\beta y + \gamma) + \delta y + \varepsilon)$ . Cependant,

$$\dim \text{Im} \varphi \leq d_1 + 6 < \dim \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}. \quad \square \quad \square$$

**Remarque 56.** Si  $d_1 \neq d_2$ , la proposition 55 est vraiment évidente. En effet, un élément générique  $P_i$  de  $\mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$  a degré  $d_i$ . Par conséquent, si  $(P_1, P_2)$  est un élément générique de  $\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}$ , alors  $\deg P_1 \neq \deg P_2$ , ce qui implique bien sûr que  $P_1, P_2$  représentent différentes couleurs.

Les propositions 54 et 55 donnent le résultat suivant.

**Corollaire 57.** Fixons une suite d'entiers  $d_1, \dots, d_l \geq 5$ . Si  $(P_1, \dots, P_l)$  est un élément générique de  $\prod_{1 \leq i \leq l} \mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$ , alors les polynômes  $P_i$  sont généraux et représentent des couleurs distinctes.

*Remarque 58.* Autrement dit, si  $a_i \in A \setminus E$  et  $e_i = e(P_i)$  pour  $1 \leq i \leq l$ , alors l'automorphisme  $a_1 e_1 \dots a_l e_l$  satisfait la condition (C1).

**B. Généricité de la condition (C2).** Le but de ce paragraphe est de montrer que la condition (C2) est générique (voir le corollaire 61 et la remarque 62).

**Proposition 59.** *Si  $d_1, d_2, d_3 \geq 8$  et  $(P_1, P_2, P_3)$  est générique dans  $\prod_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$ , alors les polynômes  $P_1, P_2, P_3$  sont indépendants.*

*Preuve.* A permutation près, il suffit de montrer les deux points suivants :

1) Si  $(P_1, P_2)$  est générique dans  $\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}$ , alors  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E)$  n'est pas un mélange de  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$ .

2) Si  $(P_1, P_2, P_3)$  est générique dans  $\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_3}$ , alors  $(A \cap E)e(P_3)(A \cap E)$  n'est pas un mélange de  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E)$ .

Preuve de 1. Posons  $\phi : \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]$ ,

$$(P_1, (\alpha, \dots, \theta)) \mapsto (P_1, \alpha P_1(\beta y + \gamma) + \delta P_1(\epsilon y + \zeta) + \eta y + \theta).$$

On a  $\dim \text{Im } \phi \leq d_1 + 1 + 8 < \dim \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}$ . Si  $(P_1, P_2) \in (\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2}) \setminus \text{Im } \phi$ , il est clair que  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E)$  n'est pas un mélange de  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$ .

Preuve de 2. Posons  $\psi : \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2} \times \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2} \times \mathbb{C}[y]$ ,

$$(P_1, P_2, (\alpha, \dots, \theta)) \mapsto (P_1, P_2, \alpha P_1(\beta y + \gamma) + \delta P_2(\epsilon y + \zeta) + \eta y + \theta).$$

On a  $\dim \text{Im } \psi \leq (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + 8 < \dim \mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_3}$ . Si  $(P_1, P_2, P_3) \in (\mathbb{C}[y]_{\leq d_1} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_2} \times \mathbb{C}[y]_{\leq d_3}) \setminus \text{Im } \psi$ , il est clair que  $(A \cap E)e(P_3)(A \cap E)$  n'est pas un mélange de  $(A \cap E)e(P_1)(A \cap E)$  et  $(A \cap E)e(P_2)(A \cap E)$ .  $\square$

**Corollaire 60.** *Fixons une suite d'entiers  $d_1, \dots, d_l \geq 8$ . Un élément générique  $(P_1, \dots, P_l)$  de  $\prod_{1 \leq i \leq l} \mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$  est une suite indépendante.*

A l'aide des corollaires 57 et 60, on obtient :

**Corollaire 61.** *Fixons une suite d'entiers  $d_1, \dots, d_l \geq 8$ . Un élément générique  $(P_1, \dots, P_l)$  de  $\prod_{1 \leq i \leq l} \mathbb{C}[y]_{\leq d_i}$  correspond à une suite de polynômes généraux et indépendants.*

*Remarque 62.* Autrement dit, si  $a_i \in A \setminus E$  et  $e_i = e(P_i)$  pour  $1 \leq i \leq l$ , alors l'automorphisme  $a_1 e_1 \dots a_l e_l$  satisfait la condition (C2).

**C. Exemples explicites.** Les lemmes 63 et 66 ci-dessous vont nous permettre de produire des exemples explicites de polynômes  $P_1, \dots, P_l \in \mathbb{C}[y]$  qui sont généraux et indépendants (voir exemple 67).

**Lemme 63.** *Soit  $P \in \mathbb{C}[y]$  un polynôme de degré  $d \geq 3$  et soit  $M = -\frac{Pd-1}{d \cdot p_d}$  la moyenne arithmétique de ses racines. S'il existe deux entiers consécutifs  $k \geq 0$  tels que  $P^{(k)}(M) \neq 0$ , alors  $P$  est faiblement général.*

*Preuve.* Si  $P(y) = \alpha P(\beta y + \gamma)$ , alors l'automorphisme  $f$  de la droite affine donné par  $f(y) = \beta y + \gamma$  permute les racines de  $P$ . Comme  $f$  est affine, on doit avoir  $f(M) = M$ . En substituant  $y$  par  $M$  dans l'égalité  $P^{(k)}(y) = \alpha \beta^k P^{(k)}(f(y))$ , nous obtenons  $(1 - \alpha \beta^k) P^{(k)}(M) = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 64.* On a toujours  $P^{(d-1)}(M) = 0$ . Par conséquent, si  $P$  a degré 2, il n'est pas possible de trouver deux entiers consécutifs  $k$  tels que  $P^{(k)}(M) \neq 0$ . Ainsi il n'est pas possible de montrer que  $P$  est faiblement général en utilisant un analogue du lemme 63. En fait, il n'est pas difficile de vérifier qu'aucun polynôme de degré 2 n'est faiblement général !

**Exemple 65.** Soit  $P = \sum_i p_i y^i$  un polynôme de degré  $d \geq 5$ .

- (1) Si  $p_{d-1} = 0$  et  $p_{d-2} p_{d-3} \neq 0$ , alors  $P$  est général;
- (2) Si  $p_{d-1} \neq 0$  et  $p_{d-2} = p_{d-3} = 0$ , alors  $P$  est général.

**Lemme 66.** Une famille  $(P_i)_i$  de polynômes généraux satisfaisant  $|\deg P_i - \deg P_j| > 3$  pour tout  $i \neq j$  est indépendante.

*Preuve.* Supposons (pour obtenir une contradiction) que  $\deg \sum_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k P_{i_k}(\beta_k y + \gamma_k) \leq 1$  mais que l'on a pas  $i_1 = i_2 = i_3$ .

Premier cas.  $i_1, i_2, i_3$  sont distincts.

Par hypothèse,  $\deg P_{i_1}, \deg P_{i_2}, \deg P_{i_3}$  sont distincts : ceci est impossible.

Second cas.  $i_1, i_2, i_3$  ne sont pas distincts.

On peut supposer que  $i_1 = i_2 \neq i_3$ .

Comme  $P_{i_1}$  est général, pour tout  $\alpha, \beta, \gamma$ , le polynôme  $P_{i_1}(y) - \alpha P_{i_1}(\beta y + \gamma)$  ou bien a degré  $\geq \deg P_{i_1} - 3$  ou bien est nul. Plus généralement, le même résultat est vrai pour  $Q(y) = \sum_{1 \leq k \leq 2} \alpha_k P_{i_k}(\beta_k y + \gamma_k)$ .

Mais  $|\deg P_{i_3} - \deg P_{i_1}| > 3$  par hypothèse, ainsi  $\deg Q \neq \deg P_{i_3}$ . Par conséquent, on ne peut avoir  $\deg(Q + \alpha_3 P_{i_3}(\beta_3 y + \gamma_3)) \leq 1$ .  $\square$

**Exemple 67.** Par exemple 65, le polynôme  $y^d + y^{d-1}$  est général pour  $d \geq 5$ . Par conséquent, si l'on pose  $P_d = y^{4d+1} + y^{4d}$ , les polynômes  $P_1, \dots, P_l$  sont généraux et indépendants (pour tout  $l$ ). Par conséquent, si  $a_i \in A \setminus E$  et  $e_i = e(P_i)$  pour  $1 \leq i \leq l$ , alors  $f = a_1 e_1 \dots a_l e_l$  satisfait la condition (C2). Si l'on suppose de plus que  $f \in G$  et  $l \geq 7$ , alors  $\langle f \rangle_N \neq G$  d'après le théorème 45.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Anick D. J. – Limits of tame automorphisms of  $k[x_1, \dots, x_N]$ . *J. Algebra*, vol. 82, n2, 1983, pp. 459–468.
- [2] Blanc J. – Groupes de cremona, connexité et simplicité. *to appear in the Annales Sci. de l'ENS*, 2010.
- [3] Cerveau D. et Déserti J. – Transformations birationnelles de petit degré. *Preprint arXiv:0811.2325*, 2008.
- [4] Danilov V. I. – Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane. *Mat. Zametki*, vol. 15, 1974, pp. 289–293.
- [5] Friedland S. et Milnor J. – Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 9, n1, 1989, pp. 67–99.
- [6] Furter J.-P. – Jet groups. *J. Algebra*, vol. 315, n2, 2007, pp. 720–737.
- [7] Gizatullin M. H. – The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry. In: *Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl', 1992)*, pp. 39–45. – Braunschweig, Vieweg, 1994.
- [8] Iskovskikh V. A. – Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, n5(245), 1985, pp. 255–256.
- [9] Jung H. W. E. – Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 184, 1942, pp. 161–174.
- [10] Kambayashi T. – Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem. *J. Algebra*, vol. 185, n2, 1996, pp. 481–501.
- [11] Kambayashi T. – Some basic results on pro-affine algebras and ind-affine schemes. *Osaka J. Math.*, vol. 40, n 3, 2003, pp. 621–638.
- [12] Lamy S. – L'alternative de Tits pour  $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$ . *J. Algebra*, vol. 239, n2, 2001, pp. 413–437.

- [13] Lamy S. – Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, vol. 48, n3-4, 2002, pp. 291–315.
- [14] Lyndon R. C. – On Dehn’s algorithm. *Math. Ann.*, vol. 166, 1966, pp. 208–228.
- [15] Lyndon R. C. et Schupp P. E. – *Combinatorial group theory*. – Berlin, Springer-Verlag, 2001, *Classics in Mathematics*. Reprint of the 1977 edition.
- [16] Maubach S. – Polynomial automorphisms over finite fields. *Serdica Math. J.*, vol. 27, n4, 2001, pp. 343–350.
- [17] Nagata M. – *On automorphism group of  $k[x, y]$* . – Tokyo, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., 1972, v+53p. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5.
- [18] Rotman J. J. – *An introduction to the theory of groups*. – New York, Springer-Verlag, 1995, fourth édition, *Graduate Texts in Mathematics*, volume 148, xvi+513p.
- [19] Schupp P. E. – Small cancellation theory over free products with amalgamation. *Math. Ann.*, vol. 193, 1971, pp. 255–264.
- [20] Serre J.-P. – *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . – Paris, Société Mathématique de France, 1977, 189 pp.p. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [21] Shafarevich I. R. – On some infinite-dimensional groups. *Rend. Mat. e Appl. (5)*, vol. 25, n1-2, 1966, pp. 208–212.
- [22] Shafarevich I. R. – On some infinite-dimensional groups. II. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 45, n1, 1981, pp. 214–226, 240.
- [23] van der Kulk W. – On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, vol. 1, 1953, pp. 33–41.
- [24] Van Kampen E. – On the connection between the fundamental groups of some related spaces. *Amer. J. Math.*, vol. 55, 1933, pp. 261–267.
- [25] Weinbaum C. M. – Visualizing the word problem, with an application to sixth groups. *Pacific J. Math.*, vol. 16, 1966, pp. 557–578.
- [26] Wright D. – Abelian subgroups of  $\text{Aut}_k(k[X, Y])$  and applications to actions on the affine plane. *Illinois J. Math.*, vol. 23, n4, 1979, pp. 579–634.
- [27] Wright D. – Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 331, n1, 1992, pp. 281–300.

LABORATOIRE MIA, UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE, AVENUE M. CRÉPEAU, 17042 LA ROCHELLE CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* jpfurter@univ-lr.fr

MATHEMATICS INSTITUTE, UNIVERSITY OF WARWICK, COVENTRY CV4 7AL, UNITED KINGDOM

*E-mail address:* s.lamy@warwick.ac.uk