Exposés au groupe de travail « complexes cubiques »

Stéphane Lamy

Janvier 2013

On expose le matériel contenu dans l'article de Caprace et Sageev [CS11], avec pour objectif d'arriver à une preuve de la version « géométrique » suivante de l'alternative de Tits ([CS11, Theorem F, p. 855]).

Théorème 1. *Soit X un complexe cubique CAT(0) de dimension finie, et $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(X)$. On est dans l'une des deux situations suivantes (non exclusives) :*

1. *Un sous-groupe d'indice fini de Γ fixe un point de $X \cup \partial_\infty X$;*
2. *Γ contient un sous-groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.*

Dans tout le texte X est un complexe cubique CAT(0) de dimension finie, et $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(X)$ un sous-groupe du groupe des automorphismes du complexe.

Si $\mathfrak{h} \subset X$ est un demi-espace, on note $\hat{\mathfrak{h}}$ l'hyperplan bordant $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ le demi-espace complémentaire.

1 Fondamentaux

1.1 Quotients et factorisations

Un complexe cubique vient avec un ensemble de demi-espaces avec les propriétés suivantes

1. ordre partiel donné par l'inclusion ;
2. involution donnée par passage au complémentaire $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$;
3. nombre fini d'éléments intermédiaires entre $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$;
4. dimension finie $\leq n$ implique qu'il y a au plus n hyperplans transverses en un point.

Réciproquement, étant donné un ensemble ordonné Σ satisfaisant ces propriétés, on peut reconstruire un complexe cubique CAT(0) en posant :

1. Ensemble des sommets égal aux ultrafiltres v, c'est-à-dire les sous-ensembles de Σ tels que
   (a) Pour chaque (A, A^*) exactement l'un des deux est dans v ;
   (b) Si $A \subset B$ et $A \in v$ alors $B \in v$;
   (c) Toute chaine décroissante dans v stabilise.

2. v et w sont liés par une arête s'il existe $\mathfrak{h}$ tel que $w = (v - \mathfrak{h}) \cup \mathfrak{h}^*$;
3. on attache un cube chaque fois que son 1-squelette apparaît.

Une façon de produire un tel ensemble ordonné est de considérer les demi-espaces délimités par une collection quelconque d'hyperplans d'un complexe cubique. Si $\hat{\mathcal{K}}$ est une collection d'hyperplans de X, on construit ainsi un complexe cubique Y dont $\hat{\mathcal{K}}$ est la collection complète d'hyperplans, en considérant les régions délimitées par les éléments de $\hat{\mathcal{K}}$ comme des sommets de Y. Le complexe Y est un *quotient* de X, noté $Y = X(\hat{\mathcal{K}})$. Si $\hat{\mathcal{K}}$ était Γ-équivariante, alors $X(\hat{\mathcal{K}})$ admet encore une action de Γ.

Tout complexe cubique CAT(0) de dimension finie admet une décomposition canonique $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ comme produit de sous-complexes irreductibles.

Lemme 2 (voir [CS11, Lemma 2.5])**.** *Une décomposition d'un complexe cubique CAT(0) comme un produit $X = X_1 \times X_2$ correspond à une partition des hyperplans de X, $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 \cup \hat{\mathcal{H}}_2$ tel que tout hyperplan de $\hat{\mathcal{H}}_1$ rencontre tout hyperplan de $\hat{\mathcal{H}}_2$.*

1.2 Action essentielle

Un demi-espace $\mathfrak{h}$ est dit Γ-*profond* s'il contient une orbite s'éloignant arbitrairement loin de $\hat{\mathfrak{h}}$. Sinon $\mathfrak{h}$ est appelé Γ-*mince*. Un hyperplan $\hat{\mathfrak{h}}$ est dit Γ-*trivial* si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ sont tous deux Γ-mince, et Γ-*essentiel* s'ils sont tous deux Γ-profonds. L'action de Γ est dite *essentielle* si tous les hyperplans sont Γ-essentiels.

Rappelons que le *bord* $\partial_\infty X$ d'un espace CAT(0) est défini en terme de classe d'équivalence de rayons géodésiques $c\colon [0,\infty[\to X$ (deux rayons c, c' sont équivalents si la distance $d(c[t,\infty], c'[t,\infty]) \leq K$ avec K indépendant de t). Le bord $\partial_\infty X$ est un espace CAT(1) une fois muni de la métrique angulaire $\angle(c,c') = \sup_x \angle_x(c,c')$.

On travaillera souvent sous les hypothèses suivantes :

Hypothèses 3. X est un complexe cubique CAT(0) de dimension finie, et $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(X)$ est un sous-groupe agissant essentiellement sans point fixe à l'infini.

Si $\gamma \in \mathsf{Aut}(X)$ et $\hat{\mathfrak{h}}$ est un hyperplan, alors on dit que γ *pousse* $\hat{\mathfrak{h}}$ si l'un des deux hyperplans $\mathfrak{h}$ bordés par $\hat{\mathfrak{h}}$ satisfait $\gamma\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}$.

Dans ce cas γ est nécessairement hyperbolique, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \frac{d(\gamma^n v, v)}{n} > 0$.

Lemme 4 ([CS11, Lemmas 2.4, 3.2 and 3.3])**.** *Sont équivalents :*

(i) $X(\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}})$ *est non borné ;*

(ii) *Il existe une isométrie (hyperbolique)* $\gamma \in \Gamma$ *qui pousse* $\hat{\mathfrak{h}}$*, autrement dit* $\mathfrak{h} \subsetneq \gamma\mathfrak{h}$ *;*

(iii) $\hat{\mathfrak{h}}$ *est* Γ*-essentiel.*

Preuve. (i) implique (ii). Si $X(\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}})$ est non borné, un chemin géodésique assez long (constante dépendant de la dimension) rencontre 3 hyperplans deux à deux disjoints. En effet : c'est clair en dimension 1 (dans un arbre tous les hyperplans sont disjoints). En dimension n, un chemin assez long qui n'est pas contenu dans un hyperplan (sinon on conclut par récurrence) coupe deux hyperplans intertangents, puis en considérant le plus grand morceaux, doit ressortir en coupant un troisième hyperplan intertangent.

On en déduit que deux parmi ces trois sont poussés l'un de l'autre par une isométrie hyperbolique.

(ii) implique (iii). Si $\mathfrak{h} \subsetneq \gamma\mathfrak{h}$, on a un domaine fondamental de l'action de γ délimité par les hyperplans $\hat{\mathfrak{h}}$ et $\gamma\hat{\mathfrak{h}}$. Toute géodésique de v à $\gamma^n v$ coupe n hyperplans deux à deux disjoints, et donc la distance de v à $\gamma^n v$ tend vers l'infini avec n.

(iii) implique (i), par contraposée. Supposons $X(\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}})$ borné, ce qui force Γ à agir avec un point fixe $v \in X(\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}})$ (v est le centre). Si v est un sommet, correspondant donc à une région, soit $\hat{\mathfrak{d}} \in \Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}}$ un hyperplan bordant cette région. Noter que $\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}} = \{\gamma\hat{\mathfrak{d}};\ \gamma \in \Gamma\}$. Ainsi, la région v est bordée par tous les hyperplans de $\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}}$, est contenue dans un des demi-espaces (disons $\mathfrak{h}$), et est préservé par Γ. Ceci force $\mathfrak{h}^*$ à être Γ-mince.

Si v appartient à un hyperplan de $X(\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}})$, alors tous les hyperplans de $\Gamma \cdot \hat{\mathfrak{h}}$ passent par v, et cette intersection est préservée par Γ. Ceci force $\hat{\mathfrak{h}}$ à être Γ-trivial. □

1.3 Flipper et pousser

Lemme 5 (Flipping Lemma)**.** *On se place dans les hypothèses 3. Pour tout demi-espace $\mathfrak{h}$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\mathfrak{h}^* \subsetneq \mathfrak{h}$ (ou autrement dit $\mathfrak{h}^* \cap \gamma\mathfrak{h}^* = \emptyset$).*

Preuve. Par l'absurde, supposons que $\mathfrak{h}$ mette en défaut l'énoncé, autrement dit que $\mathfrak{h}^* \cap \gamma\mathfrak{h}^* \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Fait 6. *Pour toute famille finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, on a $\cap_i \gamma_i \mathfrak{h}^* \neq \emptyset$.*

En effet on a vu dans les exposés de Peter que toute famille finie de demi-espaces deux à deux non disjoints admet une intersection non vide.

Fait 7. *L'absence de point fixe à l'infini force alors l'intersection $Y = \cap \gamma\mathfrak{h}^*$ à être également non vide.*

Cela repose sur le théorème admis suivant (et sur le fait qu'un espace CAT(1) de rayon au plus $\pi/2$ admet un seul centre, fixe par tout isométrie).

Théorème 8 (voir [CL10, Theorem 1.1])**.** *Soit Y_α une collection de demi-espaces dans X un complexe cubique CAT(0) de dimension finie. On suppose que toute intersection finie des Y_α est non vide. On a l'alternative :*

1. *$\bigcap_\alpha Y_\alpha$ est non vide ;*
2. *$\bigcap_\alpha \partial Y_\alpha$ est un sous-ensemble non-vide de ∂X de rayon au plus $\pi/2$.*

Par définition l'action de Γ est essentielle si pour tout demi-espace $\mathfrak{h}$, il existe au moins une orbite qui s'éloigne arbitrairement de l'hyperplan $\hat{\mathfrak{h}}$. Ici ce n'est pas possible, car toute orbite reste à distance fixe de Y, et $Y \subset \mathfrak{h}^*$ implique $d(\gamma x, \hat{\mathfrak{h}}) \leq d(\gamma x, Y)$.

□

Lemme 9 (Double Skewer Lemma)**.** *On se place dans les hypothèses 3. Pour tout couple de demi-espaces emboîtés $\mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{h}$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{h}$ (ou de façon équivalente $\mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \gamma^{-1}\mathfrak{d}$).*

Preuve. On flippe $\mathfrak{d}$ par une isométrie $g : g\mathfrak{h}^* \subsetneq g\mathfrak{d}^* \subsetneq \mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{h}$. On flippe $g\mathfrak{h}^*$ par une isométrie $f : fg\mathfrak{h} \subsetneq g\mathfrak{h}^*$. Alors $\gamma = fg$ convient. □

2 Un critère d'irréductibilité

2.1 Hyperplans dans secteurs

Lemme 10 (voir [CS11, Lemma 5.3])**.** *On se place dans les hypothèses 3. Soit $\hat{\mathfrak{h}}, \hat{\mathfrak{d}}$ deux hyperplans sécants, et supposons que l'un des quatre secteurs contient un demi-espace. Alors il existe un couple d'hyperplans contenus dans des secteurs opposés.*

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe un demi-espace $\mathfrak{d}'$ contenu dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{d}$. Par le lemme 9, il existe $g \in \mathrm{Aut}(X)$ tel que $g\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{d}' \subsetneq \mathfrak{h}$. On peut de plus supposer, quitte à remplacer g par g^n, que $g\hat{\mathfrak{d}} \subsetneq \mathfrak{d}$. En effet : considérer $\mathrm{Axe}(g)$ un axe de g, dont on sait que l'extrémité positive s'éloigne indéfiniment de $\hat{\mathfrak{d}}$. Les $g^p\hat{\mathfrak{d}}$ sont donc deux à deux distincts, et comme X est de dimension finie on peut trouver $p > q > 0$ tels que $g^p\hat{\mathfrak{d}} \cap g^q\hat{\mathfrak{d}} = \emptyset$. Alors $n = p - q$ convient.

A nouveau par le lemme 9, il existe $f \in \mathrm{Aut}(X)$ tel que $f\mathfrak{d} \subsetneq g\mathfrak{d}'$. Posons $\gamma = fg$. On a

$$\gamma \cdot \mathfrak{h} = fg \cdot \mathfrak{h} \subsetneq f \cdot \mathfrak{d}' \subsetneq f \cdot \mathfrak{d} \subsetneq g\mathfrak{d}' \subsetneq g\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{d}'$$

D'autre part

$$\gamma \cdot \hat{\mathfrak{d}} = fg \cdot \hat{\mathfrak{d}} \subsetneq f \cdot \mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{d}'$$

Premier cas : $\gamma \cdot \mathfrak{d} \subsetneq \mathfrak{d}'$. Alors le demi-espace $\gamma^{-1} \cdot (\mathfrak{d}')^* \subset \mathfrak{h}^* \cap \mathfrak{d}^*$ est dans le secteur opposé à $\mathfrak{d}'$.

Deuxième cas : $\gamma \cdot \mathfrak{d}^* \subsetneq \mathfrak{d}'$. Alors le demi-espace $\gamma^{-1} \cdot (\mathfrak{d}')^* \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{d}^*$ est dans un secteur adjacent à $\mathfrak{d}'$. On peut dans ce cas refaire la construction avec les rôles de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{d}$ échangés, ce qui permet de conclure. □

Lemme 11 (voir [CS11, Lemma 5.2])**.** *On se place dans les hypothèses 3, et on suppose X irréductible. Soit $\hat{\mathfrak{h}}, \hat{\mathfrak{d}}$ deux hyperplans sécants. Alors il existe un demi-espace contenu dans l'un des quatre secteurs.*

Preuve. Soit $\hat{\mathcal{H}}$ l'ensemble des hyperplans égaux à ou disjoints de $\hat{\mathfrak{h}}$ (cela inclut en particulier les hyperplans intertangents à $\mathfrak{h}$). De même soit $\hat{\mathcal{K}}$ l'ensemble des hyperplans égaux ou disjoints de $\hat{\mathfrak{d}}$.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}' \neq \hat{\mathfrak{h}} \in \hat{\mathcal{H}}$, et $\hat{\mathfrak{d}}' \neq \hat{\mathfrak{d}} \in \hat{\mathcal{K}}$. On peut supposer les intersections $\hat{\mathfrak{h}}' \cap \hat{\mathfrak{d}}$ et $\hat{\mathfrak{h}} \cap \hat{\mathfrak{d}}'$ non vide, sinon il n'y a rien à montrer.

Premier cas : $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{d}}'$ ne sont pas sécants. Sans perte de généralité on peut supposer $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{d}' \subsetneq \mathfrak{d}$. On applique le lemme 10 à $\hat{\mathfrak{h}} \cap \hat{\mathfrak{d}}'$ et à l'hyperplan $\mathfrak{h}'$, ce qui produit un hyperplan dans $\mathfrak{d}' \cap \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{d} \cap \mathfrak{h}$ ou dans $\mathfrak{d}' \cap \mathfrak{h}^* \subsetneq \mathfrak{d} \cap \mathfrak{h}^*$ comme attendu.

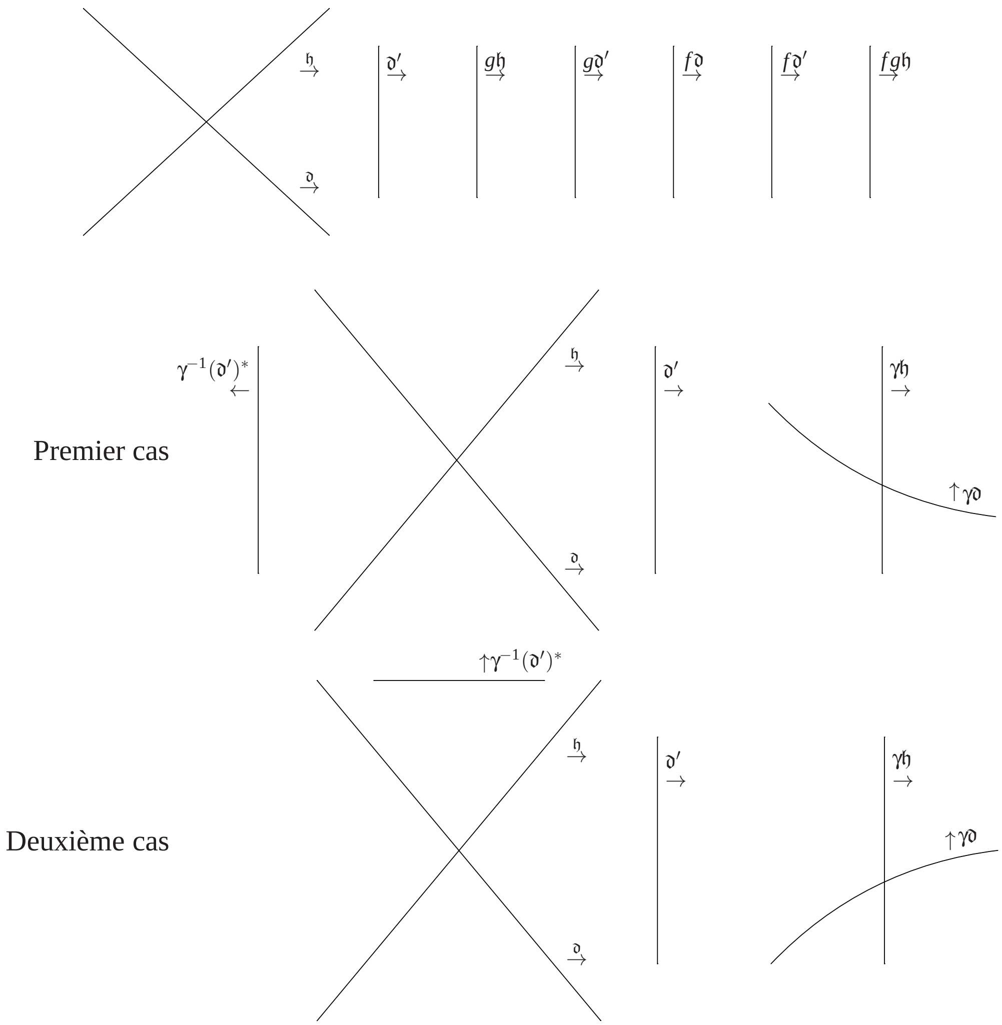

FIGURE 1 – Lemme 10

Deuxième cas : deux tels $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{d}}'$ sont toujours sécants. On va chercher une contradiction avec l'irréducibilité de X. Considérons $\hat{\mathcal{H}}^+$ l'ensemble des hyperplans disjoints d'au moins un hyperplan de $\hat{\mathcal{H}}$: en particulier $\hat{\mathcal{H}} \subset \hat{\mathcal{H}}^+$.

Fait 12. *Pour tout hyperplan* $\hat{\mathfrak{h}}^+ \in \hat{\mathcal{H}}^+$*, il existe* $\hat{\mathfrak{h}}', \hat{\mathfrak{h}}'' \in \hat{\mathcal{H}}$ *tel que* $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h}^+ \subsetneq \mathfrak{h}''$.

Si $\hat{\mathfrak{h}}^+$ est disjoint de $\hat{\mathfrak{h}}$, c'est ok par double skewer.

Si $\mathfrak{h}^+$ et $\mathfrak{h}$ sont sécants, on peut appliquer le lemme 10 en utilisant l'hyperplan de $\mathcal{H}$ disjoint de $\mathfrak{h}^+$, pour obtenir deux hyperplans dans $\mathcal{H}$ qui sont séparés par $\mathfrak{h}^+$. Ceci prouve le fait.

On définit de façon similaire un ensemble $\hat{\mathcal{K}}^+$, et on déduit que tout hyperplan de $\hat{\mathcal{H}}^+$ est sécant avec tout hyperplan de $\hat{\mathcal{K}}^+$. On pose $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{H}}(X) \smallsetminus (\hat{\mathcal{H}}^+ \cup \hat{\mathcal{K}}^+)$. Si $\hat{\mathcal{R}}$ est vide on a une partition

$$\hat{\mathcal{H}}(X) = \hat{\mathcal{H}}^+ \cup \hat{\mathcal{K}}^+$$

Si $\hat{\mathcal{R}}$ est non vide on a une partition

$$\hat{\mathcal{H}}(X) = \hat{\mathcal{R}} \cup (\hat{\mathcal{H}}^+ \cup \hat{\mathcal{K}}^+)$$

Dans les deux cas on peux appliquer le lemme 2 et contredire l'irréducibilité de X. $\square$

Lemme 13 (voir [CS11, Lemma 5.4])**.** *On se place dans les hypothèses 3. Soit $\mathfrak{h}_3 \subsetneq \mathfrak{h}_2 \subsetneq \mathfrak{h}_1$ des demi-espaces, et $\hat{\mathfrak{d}}$ un hyperplan qui rencontre $\hat{\mathfrak{h}}_1$, $\hat{\mathfrak{h}}_2$ et $\hat{\mathfrak{h}}_3$. Supposons que $\mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{d}$ contienne un demi-espace $\mathfrak{d}'$. Alors il existe un couple d'hyperplans séparés par $\hat{\mathfrak{d}}$ et par au moins deux des $\hat{\mathfrak{h}}_i$.*

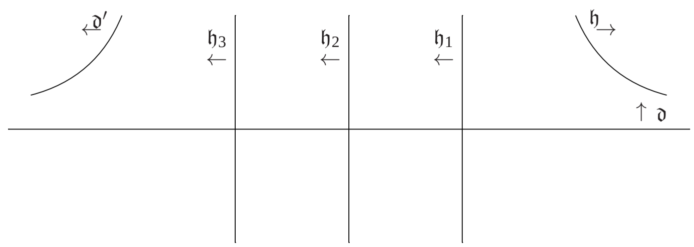

FIGURE 2 – Lemme 13

Preuve. On applique le lemme 11 à $\hat{\mathfrak{h}}_1$ et $\hat{\mathfrak{d}}$, avec le demi-espace $\mathfrak{d}'$. On obtient un demi-espace $\mathfrak{h}$ qui est soit dans $\mathfrak{h}_1^* \cap \mathfrak{d}^*$, et c'est fini, ou dans $\mathfrak{h}_1^* \cap \mathfrak{d}$, voir figure 2.

Dans ce dernier cas on applique à nouveau le lemme 11 à $\hat{\mathfrak{h}}_2$ et $\hat{\mathfrak{d}}$, pour obtenir $\mathfrak{h}''$ dans $\mathfrak{d}^* \cap \mathfrak{h}_2$ ou $\mathfrak{d}^* \cap \mathfrak{h}_2^*$. Alors deux parmi les hyperplans $\hat{\mathfrak{h}}$, $\hat{\mathfrak{h}}''$ ou $\hat{\mathfrak{d}}'$ conviennent. $\square$

2.2 Le critère

Deux hyperplans sont dits *fortement séparés* s'ils sont disjoints et s'il n'existe pas un troisième hyperplan qui les coupe tous deux.

Proposition 14 (voir [CS11, Proposition 5.1])**.** *On se place dans les hypothèses 3. Alors sont équivalents :*

(i) *X est irréductible ;*

(ii) *Il existe un couple d'hyperplans fortement séparés ;*

(iii) *Pour tout demi-espace $\mathfrak{h}$ il existe un couple de demi-espaces $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ tels que $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_2$ et les hyperplans $\hat{\mathfrak{h}}_1$, $\hat{\mathfrak{h}}_2$ sont fortement séparés.*

Preuve. (iii) implique (ii) est clair, et (ii) implique (i) vient du lemme 2.

Prouvons (i) implique (iii) par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un demi-espace $\mathfrak{h}$ qui mette (iii) en défaut.

Comme l'action de Γ est essentielle, le lemme 4 nous donne $\gamma \in \Gamma$ qui pousse $\hat{\mathfrak{h}}$:

$$\gamma^{-1}\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \gamma\mathfrak{h}$$

On pose $\mathfrak{h}_0 = \gamma^{-1}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'_0 = \gamma\mathfrak{h}$, et on construit par récurrence une suite de triplets d'hyperplans $(\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}'_n, \mathfrak{d}_n)_{n>0}$ vérifiant pour tout $n > 0$:

(a) $\hat{\mathfrak{d}}_n$ rencontre $\hat{\mathfrak{h}}_{n-1}$ et $\hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}$;

(b) $\hat{\mathfrak{d}}_n$ sépare $\hat{\mathfrak{h}}_n$ et $\hat{\mathfrak{h}}'_n$;

(c) $\mathfrak{h}_n \subsetneq \mathfrak{h}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}'_{n-1} \subsetneq \mathfrak{h}'_n$.

On applique le lemme 9 au couple $\mathfrak{h}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{h}'_{n-1}$, ce qui donne une isométrie γ comme sur la figure. Il existe un hyperplan $\mathfrak{d}$ qui coupe $\mathfrak{h}_{n-1}$ et $\gamma\mathfrak{h}'_{n-1}$ (sinon ces deux hyperplans seraient

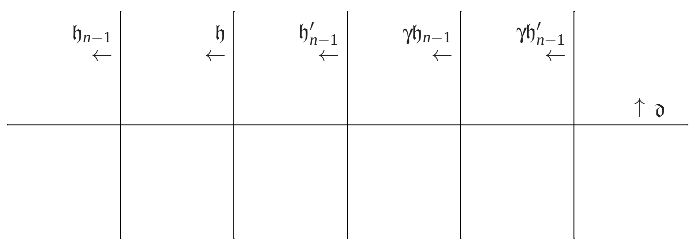

FIGURE 3 –

fortement séparés, contrairement à l'hypothèse). Par les lemmes 10 et 11, quitte à changer $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}^*$, il existe un hyperplan dans le secteur $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{h}_{n-1}$. On peut alors appliquer le lemme 13 à la chaine $\mathfrak{h}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{h}'_{n-1} \subsetneq \gamma\mathfrak{h}'_{n-1}$, pour obtenir deux hyperplans $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{h}}''$ séparés par $\hat{\mathfrak{d}}$ et au moins deux des hyperplans $\hat{\mathfrak{h}}_{n-1}, \hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}, \gamma\hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}$.

Premier cas : $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{h}}''$ sont séparés par $\hat{\mathfrak{h}}_{n-1}, \hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}$. Alors on pose $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}'_n = \mathfrak{h}''$, et $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}$.

Deuxième cas : $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{h}}''$ sont séparés par $\hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}, \gamma\hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}$. Alors on pose $\mathfrak{h}_n = \gamma^{-1}\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}'_n = \gamma^{-1}\mathfrak{h}''$, et $\mathfrak{d}_n = \gamma^{-1}\mathfrak{d}$.

Conclusion : les $\mathfrak{d}_i$ ainsi construits sont deux à deux distincts (si $n > m$, $\hat{\mathfrak{d}}_n$ intersecte $\hat{\mathfrak{h}}_{n-1}$ et $\hat{\mathfrak{h}}'_{n-1}$, alors que $\hat{\mathfrak{d}}_m$ les sépare) et s'intersectent deux à deux (même raison !) ; c'est impossible dans un complexe de dimension finie.

□

3 Alternatives

3.1 Elagage

Proposition 15 (voir [CS11, Proposition 3.5])**.** *Supposons que Γ agisse sans point fixe, sur X ou à l'infini. Alors il existe un sous-complexe de X non borné et Γ-équivariant sur lequel* *l'action de* Γ *est essentielle.*

Preuve. Considérons l'ensemble H des demi-espaces $\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h}$ soit Γ-profond et $\mathfrak{h}^*$ soit Γ-mince. Deux demi-espaces $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in H$ sont d'intersection non vide, sinon on aurait $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2^*$ avec $\mathfrak{h}_1$ profond et $\mathfrak{h}_2^*$ mince, absurde.

Toute intersection finie d'éléments de H est donc également non vide.

Comme on suppose qu'il n'y a pas de point fixe à l'infini, le théorème 8 implique que l'intersection $W = \cap_{\mathfrak{h} \in H} \mathfrak{h}$ est également non vide.

On a une identification entre les hyperplans essentiels de X et de W : d'une part tout demi-espace de X disjoint de W est Γ-mince, et d'autre part comme W est Γ-invariant un demi espace de W qui était Γ-profond dans X est encore Γ-prodond dans W.

Dans W tout hyperplan est Γ-essentiel ou Γ-trivial, cette partition correspond à une factorisation $W = Y \times Z$ avec Z borné Γ-équivariant (et donc admettant un point fixe z), et $Y \times \{z\}$ est le sous-complexe cherché.

Noter que l'hypothèse qu'il n'y a pas de point fixe permet d'assurer que le facteur Y est non trivial. □

3.2 Alternative euclidienne

Un *triangle d'hyperplans* est un triplet d'hyperplans bordant trois demi-espaces deux à deux disjoints (on peut définir de même un *rectangle* d'hyperplans...).

Un *plat* est un sous-complexe cubique isométrique au complexe standard sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 16 (voir [CS11, Theorem 7.2])**.** *On se place dans les hypothèses 3. Alors on est dans une et une seule des deux situations suivantes :*

(i) Γ *préserve un plat ;*

(ii) *Il existe un triangle d'hyperplans.*

Preuve. Supposons que X contienne un plat F-invariant. Pour tout hyperplan $\hat{\mathfrak{h}}$, l'intersection $F \cap \hat{\mathfrak{h}}$ est un hyperplan euclidien de F (sinon l'action ne serait pas essentielle, car un demi-espace ne contenant pas F est Γ-mince). Comme il n'y a pas de triangle d'hyperplans dans l'espace euclidien F, il n'y a pas de triangle d'hyperplans dans X.

Supposons maintenant que X ne contienne pas de plat invariant. Soit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ la décomposition canonique en complexes irréductibles. On identifie $\mathrm{Aut}(X_i)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$, et on note $\Gamma_i = \mathrm{Aut}(X_i) \cap \Gamma$.

Au moins l'un des X_i n'admet pas de plat Γ_i invariant (sinon en prenant leur produit on construirait un plat Γ invariant) ; Noter également que si l'un des X_i contient un triangle d'hyperplans, alors X également. On se ramène ainsi à X irréductible sans plat invariant.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}$ un hyperplan ; par la proposition 14 (critère d'irréducibilité) il existe $\hat{\mathfrak{h}}'$ et $\hat{\mathfrak{h}}''$ fortement séparés tels que $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}''$.

Par le lemme 9 il existe une isométrie g tel que $\mathfrak{h}'' \subsetneq g\mathfrak{h}'$; en particulier toute paire d'hyperplans dans la $\langle g^2 \rangle$ orbite de $\hat{\mathfrak{h}}$ est fortement séparée.

Premier cas : tous les hyperplans de X sont compacts. On considère $\hat{\mathfrak{d}}$ un hyperplan sécant à $\hat{\mathfrak{h}}$, qui par compacité est disjoint de $g^{\pm n}\hat{\mathfrak{h}}$ pour n assez grand. Cela donne un triangle d'hyperplans.

Deuxième cas : il existe un hyperplan non compact, disons $\hat{\mathfrak{h}}$, qui admet donc une infinité d'hyperplan sécants. Parmi ces hyperplans, aucun ne rencontre $g^{\pm 2}\hat{\mathfrak{h}}$ (forte séparation), et seul un nombre fini séparent $g^2\hat{\mathfrak{h}}$ de $g^{-2}\hat{\mathfrak{h}}$. On choisit un hyperplan $\hat{\mathfrak{d}}$ hors de cette collection finie, et avec $g^2\hat{\mathfrak{h}}$ et $g^{-2}\hat{\mathfrak{h}}$ cela fournit le triangle d'hyperplans attendu. $\square$

3.3 Alternative de Tits

Je rappelle l'énoncé donné en première page :

Théorème. *Soit X un complexe cubique CAT(0) de dimension finie, et $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(X)$. On est dans l'une des deux situations suivantes (non exclusives) :*

1. *Un sous-groupe d'indice fini de Γ fixe un point de $X \cup \partial_\infty X$;*
2. *Γ contient un sous-groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.*

Preuve. Supposons que Γ est virtuellement sans point fixe.

Par la proposition 15 (élagage) on se ramène à une action essentielle.

Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut de plus supposer le complexe irréductible, et l'action est toujours sans point fixe à l'infini.

Maintenant par le théorème 16 (alternative euclidienne) :

1. ou bien il y a un plat invariant : ce plat n'est pas de dimension 0 (ce serait un point fixe) ni de dimension 1 (une géodésique invariante vendrait deux points fixe à l'infini, à indice 2 près). Donc le plat F est de dimension ≥ 2. Fixons $\hat{\mathfrak{h}}$ un hyperplan de X, qui intersecte F car l'action est essentielle. Maintenant soit $\hat{H}_1$ la collection des hyperplans $\mathfrak{d}$ tel que $\hat{\mathfrak{d}} \cap F$ est parallèle à $\hat{\mathfrak{h}} \cap F$, et $\hat{H}_2$ la collection complémentaire. Cette partition correspond à une factorisation de X, contredisant l'irréducibilité.
2. ou bien il y a un triangle d'hyperplans $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$, à partir duquel on met en place un ping-pong : On flippe $\mathfrak{h}_3$ par $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma\mathfrak{h}_3^* \subsetneq \mathfrak{h}_3$, et donc $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \gamma\mathfrak{h}_1, \gamma\mathfrak{h}_2$ forme un rectangle d'hyperplans. Par le lemme 9, il existe des isométries $f_1, f_2 \in \Gamma$ telles que $f_i\mathfrak{h}_i^* \subsetneq \gamma\mathfrak{h}_i$. Ceci permet d'appliquer un ping-pong, et donc f_1, f_2 engendrent un groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

$\square$

Références

[CL10] P.-E. Caprace and A. Lytchak. At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces. *Math. Ann.*, 346(1) :1–21, 2010.

[CS11] P.-E. Caprace and M. Sageev. Rank rigidity for CAT(0) cube complexes. *Geom. Funct. Anal.*, 21(4) :851–891, 2011.