# Dynamique des automorphismes polynomiaux du plan complexe

Stéphane LAMY

Junior School - Lisboa - Septembre 1999

## 1 Introduction

Nous nous proposons dans ce cours d'étudier la dynamique d'une application dite "de Hénon généralisée", de la forme :

$$g\ : (x,y) \rightarrow (y, P(y) - \delta x) \text{ où } \delta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[X], d^\circ P \geq 2$$

(Dans les années 70 Hénon [5] a étudié le cas où $P$ est de degré 2, dans le cadre réel). Ces applications sont parmi les premiers exemples intéressants lorsqu'on aborde la théorie des systèmes dynamiques à plusieurs variables complexes. Nous nous attacherons tous d'abord à montrer que cette étude reste malgré tout assez générale, puisque tout automorphisme polynômial de $\mathbb{C}^2$ admet ou bien une dynamique "élémentaire", ou bien une dynamique essentiellement équivalente à une application de Hénon généralisée. A ces dernières on associe un *ensemble de Julia*, sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ de nature fractale, qui est l'objet mathématique à étudier. C'est alors que la théorie du pluripotentiel intervient : il s'avère que la théorie (élémentaire) des courants se révèle être un outil efficace pour l'étude d'un tel objet. Notre but dans ce cours sera d'introduire avec le plus de détails possible les techniques nécessaires pour comprendre et démontrer l'énoncé suivant

**Théorème 1** *Soit $M$ une courbe algébrique lisse dans $\mathbb{C}^2$, de degré $k$. Soit $g$ une application de Hénon généralisée, de degré $d$. Alors*

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{1}{d^n}[g^{-n}(M)] = k.\mu_g^+$$

Ce théorème donne un sens précis à l'idée intuitive suivante : la suite des variétés algébriques $g^{-n}(M)$ "converge" vers l'ensemble de Julia de $g$. Ainsi ce résultat illustre l'utilité des techniques "pluripotentielles" dans l'étude des systèmes dynamiques à variables complexes (car comment donner un sens au mot "converger" dans la phrase précédente sans utiliser la notion de courant ?...)

Le théorème 1 se trouve dans [1], mais je n'ai pas repris leur démonstration. J'ai par contre largement puisé dans le livre Griffiths-Harris [4] (aspects distributions et courants) et dans l'article de Sibony et Fornaess [2] (aspects dynamiques).

Le niveau des exercices proposés varie de facile à extrêmement facile, étant bien entendu qu'il y en a un ou deux que je ne sais pas tout à fait faire.

## 2 Le groupe Aut$[\mathbb{C}^2]$

Nous noterons Aut$[\mathbb{C}^2]$ le groupe des automorphismes polynômiaux du plan affine complexe. A noter que si $f$ est une application polynômiale injective de $\mathbb{C}^2$, alors automatiquement $f$ est bijective et $f^{-1}$ est également polynômiale. Ceci est non trivial et est dû au fait que nous travaillons sur le corps $\mathbb{C}$.

**Exercice 1** *Trouver un endomorphisme polynômial $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injectif mais qui ne soit pas un automorphisme polynômial.*

Un sous-groupe naturel de Aut$[\mathbb{C}^2]$ est le groupe affine

$$A = \{(x, y) \to (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2); a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\}$$

Remarquons que les automorphismes affines sont exactement ceux qui se prolongent en un automorphisme de $\mathbb{CP}^2$.

Un autre sous-groupe est celui des automorphismes élémentaires :

$$E = \{(x, y) \to (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \gamma \in \mathbb{C}, P \in \mathbb{C}[X]\}$$

**Exercice 2** *Montrer les deux affirmations :*

1. *Un automorphisme est élémentaire si et seulement s'il préserve le feuilletage $dy = 0$;*
2. *Le groupe $E$ est résoluble;*

Nous noterons $S$ l'intersection des groupes affine et élémentaire, i.e

$$S = \{(x, y) \to (a_1x + b_1y + c_1, b_2y + c_2); a_1b_2 \neq 0\}$$

Nous énonçons maintenant un théorème de structure pour Aut$[\mathbb{C}^2]$ :

**Théorème 2 (Jung)** *Le groupe Aut[$\mathbb{C}^2$] est le produit amalgamé suivant leur intersection des sous-groupes $A$ et $E$ (on note Aut[$\mathbb{C}^2$] $= A *_S E$)*

Le théorème dit que Aut[$\mathbb{C}^2$] est non seulement engendré par les groupes affine et élémentaire, mais qu'il existe de plus une structure algébrique très particulière de "produit amalgamé". Nous précisons maintenant cette notion.

Voici tout d'abord une définition savante que je recopie dans [8] :

On se donne un groupe $H$, une famille de groupes $(G_i)_{i\in I}$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme injectif $f_i : H \to G_i$. On identifie $H$ à son image dans chacun des $G_i$. On note $*_H G_i$ la limite inductive de la famille $(H, G_i)$ relativement à ces homomorphismes; on l'appelle le produit amalgamé des $G_i$ suivant $H$.

Dans notre cas il n'y a que deux groupes, et les injections $S \to A$ et $S \to E$ sont tout simplement les inclusions. Si les mots "limite inductive" vous mettent mal à l'aise, vous préfèrerez peut-être une définition par générateurs et relations (voir encore [8]) : on prend comme famille génératrice la somme disjointe des $G_i$; comme relations, d'une part les $xyz^{-1}$, où $x, y, z$ appartiennent à un même $G_i$ et $z = xy$ dans $G_i$, d'autre part les $xy^{-1}$ où $x \in G_i$, $y \in G_j$ et $f_i(x) = f_j(y)$(cette dernière égalité n'a de sens que si les $G_i$ sont tous inclus dans un même groupe, mais c'est bien ce cas qui nous intéresse).

Encore plus simple ? En fait on peut reformuler le théorème en disant que tout $f \in$Aut[$\mathbb{C}^2$] $\setminus S$ admet une décomposition

$$f = a_1 \circ e_1 \circ \cdots \circ a_n \circ e_n \text{ où } a_i \in A \setminus E, e_i \in E \setminus A$$

(cette écriture pouvant éventuellement commencer par $e_1$ et/ou finir par $a_n$) et que cette écriture est unique modulo des changements triviaux du type

$$(a_i \circ s) \circ (s^{-1} \circ e_i) \text{ au lieu de } a_i \circ e_i \text{ avec } s \in S$$

Plusieurs démonstrations du théorème 2 sont disponibles dans la littérature, les plus anciennes étant celles de Jung (1942) et Van Der Kulk(1953) (ces deux auteurs n'emploient pas le terme de produit amalgamé). On trouvera dans [7] une preuve moderne et de nombreuses références. Le point délicat est de montrer que les groupes $A$ et $E$ engendrent Aut[$\mathbb{C}^2$] , en effet il est ensuite assez facile de voir qu'on a une structure de produit amalgamé. C'est même si facile que je vous le laisse en exercice !

**Exercice 3** *Montrer que $< A, E >= A *_S E$ (on pourra raisonner ou bien avec les degrés, ou bien en regardant l'action sur la droite à l'infini).*

Du théorème de structure Friedland et Milnor [3] ont déduit le corollaire suivant

**Corollaire 3** *Soit $f \in Aut[\mathbb{C}^2]$ . On a l'alternative :*

1. *$f$ est conjugué à un élément de $E$ ;*
2. *$f$ est conjugué à une composée d'applications de Hénon généralisée i.e*

$$f = \varphi \circ g_m \circ \cdots \circ g_1 \circ \varphi^{-1}$$

*où $\varphi \in Aut[\mathbb{C}^2]$ , $g_i = (y, P_i(y) - \delta_i x)$ avec $\delta_i \in \mathbb{C}^*$, et $P_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geq 2$.*

Je ne vais donner qu'une idée de preuve : si $f$ admet une décomposition de longueur impaire alors il est clair qu'on peut conjuguer pour diminuer la longueur. On peut ainsi supposer que la décomposition de $f$ est de longueur paire ou égale à 1, et les deux exercices suivant devraient suffire à vous convaincre.

**Exercice 4** *Soit $a \in A$, alors il existe $l \in GL(2, \mathbb{C})$, $lal^{-1} \in E$.*

**Exercice 5** *Soit $a \in A \setminus E, e \in E \setminus A$, alors il existe $s \in S$ tel que*

$$s \circ (a \circ e) \circ s^{-1} = (y, P(y) - \delta x)$$

Le corollaire 3 permet de se restreindre à l'étude des composées d'applications de Hénon généralisées (en effet la dynamiques des automorphismes élémentaires n'est pas "intéressante", dans le sens où elle n'est nulle part chaotique). J'exagère donc un peu en ne considérant que le cas d'une seule application de Hénon généralisée, mais en fait il ne se produit aucun phénomène nouveau lorsqu'on regarde des composées. Ainsi tous les résultats énoncés dans ce cours (en particulier le théorème 1) resteraient valables pour des composées, et les démonstrations seraient les mêmes à ceci près que les notations seraient parfois un peu plus compliquées.

# 3 Ensemble de Julia

Soit $g$ une application de Hénon généralisée

$$g \ : (x, y) \to (y, P(y) - \delta x)$$

Nous notons $d$ le degré de $g$ (i.e le degré de $P$). Nous allons tout d'abord regarder le comportement à l'infini de $g$. Pour cela, considérons le prolongement de $g$ à $\mathbb{CP}^2$ :

$$\tilde{g} \ : [x : y : t] \to [yt^{d-1} : t^d P(y/t) - \delta x t^{d-1} : t^d]$$

Tout point de $\mathbb{CP}^2$ s'écrit ou bien $[x : y : 1]$ ou bien $[x : y : 0]$. Les premiers forment un plan affine ($\simeq \mathbb{C}^2$), et $\tilde{g}$ restreinte à ce plan n'est bien sûr rien d'autre que $g$. Les seconds forment une droite projective complexe ($\simeq \mathbb{CP}^1$) : la droite à l'infini. Sur la droite à l'infini $\tilde{g}$ admet un comportement très simple :

1. en $[1:0:0]$ $\tilde{g}$ n'est pas définie (ainsi $\tilde{g}$ n'est pas une vraie application);

2. en $[x:y:0] \neq [1:0:0]$, $\tilde{g}$ est défini et $\tilde{g}([x:y:0]) = [0:1:0]$

On voit qu'il existe deux points particuliers sur la droite à l'infini : $[1:0:0]$ qui est un point d'indétermination et $[0:1:0]$ qui est un point fixe superattractant. Il n'était pas du tout évident que ces deux points allaient être distincts : c'est là une propriété agréable des applications de Hénon généralisées.

**Exercice 6** *1. Calculer la différentielle de $\tilde{g}$ en $[0:1:0]$ et vérifier que les deux valeurs propres sont nulles (ceci justifie le terme "superattractant" employé ci-dessus);*

*2. Trouver un automorphisme $f \in Aut[\mathbb{C}^2]$ tel que le prolongement $\tilde{f}$ de $f$ à $\mathbb{CP}^2$ admette sur la droite à l'infini un point d'indétermination et un point fixe superattractant confondus.*

Soit $z \in \mathbb{C}^2$ un point, et considérons l'orbite positive de $z$ par $g$, i.e l'ensemble des points $\{g^n(z)\}_{n\geq 0}$. On définit *l'ensemble de Julia plein* de $g$ :

$$K_g^+ = \{z \in \mathbb{C}^2; \{g^n(z)\}_{n\geq 0} \text{ est bornée}\}$$

Le signe $+$ est là pour rappeler que nous utilisons l'orbite positive, on pourrait faire des définitions similaires en considérant l'orbite négative.

*L'ensemble de Julia* (positif) associé à $g$ est le bord topologique de $K_g^+$ :

$$J_g^+ = \partial K_g^+$$

On peut montrer que $K_g^+$ est exactement le complémentaire dans $\mathbb{C}^2$ du bassin d'attraction associé au point fixe superattractant à l'infini. Ainsi $K_g^+$ et $J_g^+$ ne sont pas compacts, et viennent adhérer à l'infini en un seul point : le point d'indétermination associé à $g$.

**Exercice 7** *Trouver un exemple de $g$ avec $K_g^+$ d'intérieur non vide.*

La démarche pour étudier $J_g^+$ est maintenant de produire un courant dont le support soit exactement $J_g^+$. Il me faut donc expliquer la notion de courant, et celle-ci étant une généralisation de la notion de distribution, je commence par rappeler rapidement ce qu'est une distribution.

# 4 Distributions

Soit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ à support compact ("fonctions test", ou encore "fonctions en forme de cloche"). Le support *supp*$(\varphi)$ d'une fonction test est l'adhérence des points où $\varphi$ est non nulle.

On munit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ d'une topologie en disant qu'une suite $\varphi_n \to 0$ s'il existe un compact $K$ tel que *supp*$(\varphi_n) \subset K$ et $\varphi_n$ converge uniformément vers 0 sur $K$ ainsi que ses dérivées partielles de tout ordre.

Une *distribution* sur $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire

$$D\ : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

qui est de plus continue, i.e $D(\varphi_n) \to 0$ quand $\varphi_n \to 0$.

Le *support* d'une distribution $D$, noté *supp*$(D)$, est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } supp(\varphi) \subset U \text{ et } < D, \varphi > \neq 0$$

**Remarque 4** *1. On aurait pu décider que les fonctions-test et les distributions soient à valeurs réelles; cela ne change pas grand chose et comme d'ici peu tout sera complexe autant s'y mettre tout de suite;*

*2. On utilise souvent la notation crochet*

$$< D, \varphi > := D(\varphi)$$

*qui souligne la dualité entre distributions et fonctions-test.*

Nous donnons maintenant deux exemples fondamentaux.

1. Si $\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (i.e $\psi\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $\int_U |\psi|$ existe localement) alors on pose

$$< D_\psi, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

   On dit que $D_\psi$ est la distribution induite par $\psi$, son support est a priori "grand" (si $\psi$ ne s'annule pas trop).

2. D'autre part, la "fonction de Dirac" en $a$ est la distribution définie par

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

   Son support est "petit" puisque c'est simplement ... $\{a\}$ !

Un intérêt majeur de la notion de distribution est de permettre de dériver des objets a priori bien singuliers... L'astuce est de procéder par dualité. On définit

$$< \frac{\partial}{\partial x_i} D, \varphi > \; := - < D, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi >$$

**Exercice 8** *Montrer que la définition est cohérente, i.e si $D_\psi$ est la distribution associée à $\psi$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors*

$$< \frac{\partial}{\partial x_i} D_\psi, \varphi > = < D_{\frac{\partial}{\partial x_i}\psi}, \varphi >$$

*pour tout fonction-test $\varphi$ (appliquer la formule de Stokes à une boule contenant le support de $\varphi$)*

L'exercice suivant est très classique :

**Exercice 9** *Soit $H\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $H(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que*

$$\frac{\partial}{\partial x} D_H = \delta_0$$

*(La dérivée au sens des distributions de la fonction de Heavyside est égale à la fonction de Dirac en 0)*

Nous allons maintenant passer à la notion de courant. Les distributions étaient des fonctionnelles linéaires sur un espaces de fonctions $\mathcal{C}^\infty$; les courants ne seront rien de plus que des fonctionnelles sur un espace de formes $\mathcal{C}^\infty$.

# 5 Courants

Soit $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ l'espace des $q$-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact. On définit une topologie similaire à celle définie sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, en procédant composante par composante.

Un *courant* (de degré $q$) est une application linéaire continue

$$A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

On note $\mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n)$ l'espace des courants de degré $q$. Remarquons qu'un courant de degré $n$ n'est rien d'autre qu'une distribution. On définit le support d'un courant de manière évidente (recopier la définition donnée dans le cas des distributions). Nos deux exemples fondamentaux de la section précédente se généralisent de la manière suivante.

1. Soit $\psi = \sum_{|I|=q} \psi_I dx_I$ une $q$-forme, avec les $\psi_I$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

   (N.B: Ci-dessus $I$ dénote un multi-indice (ordonné) i.e

   $$I = (i_1, \cdots, i_q) \text{ avec } i_1 < \cdots < i_q$$

   $|I|$ est la longueur du multi-indice et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$.)

   Alors $\psi$ induit un courant $T_\psi$ de degré $q$

   $$< T_\psi, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \varphi, \text{ pour } \varphi \in A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

2. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-varíété (à bord) lisse orientée de dimension $n-q$, alors $M$ induit un courant $T_M$ de degré $q$

   $$< T_M, \varphi >= \int_M \varphi, \text{ pour } \varphi \in A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$$

   On notera aussi $[M]$ ce courant, appelé *courant d'intégration* sur $M$. Son support est bien sûr $M$.

Par dualité on définit un opérateur

$$d \ : \mathcal{D}^q(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

en posant

$$< dT, \varphi > := (-1)^{q+1} < T, d\varphi >$$

Il est clair que $d^2 = 0$.

**Exercice 10** *En reprenant les notations des deux exemples ci-dessus montrer que*

$$d(T_\psi) = T_{d\psi}$$

*et*

$$d([M]) = [\partial M]$$

*(l'opérateur $d$ sur les courants généralise l'opérateur habituel sur les formes, ainsi que le bord topologique d'une variété)*

# 6 Courants sur $\mathbb{C}^n$

Le passage du réel au complexe consiste tout d'abord essentiellement en un changement de notations. On identifie $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$

$$\mathbb{R}^{2n} = (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$$

$$\mathbb{C}^n = (z_1, \cdots, z_n)$$

en posant $z_j = x_j + iy_j$. On a

$$dz_j = dx_j + idy_j \text{ et } d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Ainsi

$$df = \underbrace{\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{\partial f} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i}}_{\overline{\partial} f}$$

Rappelons les égalités suivantes

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z} = dx \wedge dy$$

$$\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$$

On dira qu'une forme $\varphi$ est de type $(p,q)$ si elle s'écrit

$$\varphi = \sum_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

Par exemple

$\varphi = dz_1$ est une $(1,0)$ forme;

$\varphi = dz_1 \wedge d\overline{z_2} + dz_2 \wedge d\overline{z_2}$ est une $(1,1)$ forme;

$\varphi = dz_1 + d\overline{z_2}$ n'est rien de bien fameux (somme d'une $(1,0)$ forme et d'une $(0,1)$ forme).

Un courant $T$ sur $\mathbb{C}^n$ sera dit de type $(p,q)$ si

$$< T, \varphi > \neq 0 \Rightarrow \varphi \text{ de type } (n-p, n-q)$$

Ainsi une forme (à coefficient dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$) de type $(p,q)$ induit un courant de type $(p,q)$ : les choses sont à peu près cohérentes ! Nous noterons $\mathcal{D}^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des courants de type $(p,q)$ sur $\Omega$. Toujours par dualité on peut définir les opérateurs :

$$\partial \ : \mathcal{D}^{p-1,q}(\Omega) \to \mathcal{D}^{p,q}(\Omega)$$
$$\overline{\partial} \ : \mathcal{D}^{p,q-1}(\Omega) \to \mathcal{D}^{p,q}(\Omega)$$

Remarquons qu'un courant est un objet local : si $(U_i)$ est un recouvrement de $\Omega$, et si l'on connait l'action de $T$ sur $\mathcal{C}^\infty_c(U_i)$ pour tout $i$ alors $T$ est déterminé de manière unique sur $\Omega$ (utiliser une partition de l'unité). De cette manière on peut définir des courants sur n'importe quelle variété.

Voici maintenant le cas qui nous intéressera. Soit $\varphi$ une fonction dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^2)$, on peut voir $\varphi$ comme un $(0,0)$ courant. Alors $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ est un $(1,1)$ courant (le coefficient $\frac{i}{\pi}$ permet d'obtenir un courant réel, un courant $T$ étant dit réel si $\overline{<T,\varphi>} = <T,\overline{\varphi}>$).

Le courant que nous allons associer à l'ensemble de Julia $J^+_g$ sera de la forme $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G^+_g$, où $G^+_g$ (fonction de Green associée à $g$) sera une fonction localement intégrable particulière, à savoir une fonction plurisousharmonique. Nous commençons donc par quelques rappels sur les fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques.

# 7 Fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $\varphi \ : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ sera dite *sousharmonique* si elle n'est pas partout égale à $-\infty$ et si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $\varphi$ est semi continue supérieurement (s.c.s), c'est à dire que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x; \varphi(x) < c\}$ est ouvert.

2. $\forall x \in \Omega, \forall r$ tel que $B(0,r) \subset \Omega$ on a
$$\varphi(x) \leq \frac{1}{V}\int_{||\alpha||=1} \varphi(x + r\alpha)d\alpha$$
où $V = \int_{||\alpha||=1} d\alpha$

L'ensemble des applications sousharmoniques sur $\Omega$ sera noté $S(\Omega)$. En remplaçant le signe $\leq$ par $\geq$ ou $=$ dans le point 2 de la définition on obtient respectivement les définitions de fonctions surharmonique et harmonique.

La deuxième condition dans la définition peut être remplacé par une condition sur le Laplacien. Rappelons que si $\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2}$$

est le Laplacien de $\varphi$ en $x$.

**Proposition 5** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $\varphi \in S(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors*

$$\Delta\varphi(x) \geq 0$$

*Preuve.* On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} h_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \circ(||h||^2)$$

On fait l'intégrale moyenne sur la boule unité, le terme de gauche devient

$$\frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \varphi(x + r\alpha) d\alpha$$

Calculons ce qu'il advient de chacun des trois membres de droites. Tout d'abord trivialement

$$\frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \varphi(x) = \varphi(x)$$

D'autre part par symétrie

$$\frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} r\alpha_i \, d\alpha = 0$$

en effet la fonction que l'on intègre est impaire. Par symétrie encore on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} r^2 \alpha_i \alpha_j \, d\alpha &= \frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2} r^2 \alpha_i^2 \, d\alpha \\ &= r^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2} \frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \alpha_i^2 d\alpha \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \alpha_i^2 d\alpha = \frac{1}{n} \frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 d\alpha = \frac{1}{n}$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \varphi(x + r\alpha) d\alpha = \varphi(x) + \frac{r^2}{n} \Delta\varphi(x) + \circ(r^2)$$

D'où

$$\Delta\varphi(x) = n \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{V} \int_{||\alpha||=1} \varphi(x + r\alpha) d\alpha - \varphi(x) \right) \geq 0$$

ce qu'on voulait. □

En fait la réciproque est vraie et se démontre à l'aide d'une formule "bien connue" (formule de Green, voir [6]) que je vous laisse chercher dans la littérature...

Bien sûr on peut parler d'une fonction $\varphi\ : \mathbb{C}^n \to [-\infty, +\infty[$ sousharmonique en identifiant $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$. Cependant il s'avère que dans le cadre complexe la bonne généralisation de ce qui précède est la notion de fonction plurisousharmonique (le problème est de donner une définition qui soit invariante par changement de coordonnée holomorphe).

Soit $\omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Une fonction $\varphi\ : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ sera dite *plurisousharmonique* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $\varphi$ est s.c.s;
2. $\varphi$ est sousharmonique sur chaque droite complexe i.e : pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que
$$\{z + uw; |u| < r, u \in \mathbb{C}\} \subset \Omega$$
on ait
$$\varphi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{i\theta} w) d\theta$$

L'ensemble des applications plurisousharmoniques sur $\Omega$ sera noté $PSH(\Omega)$. De manière analogue on définit les fonctions plurisurharmoniques et pluriharmoniques.

Il est assez clair que $PSH(\Omega) \subset S(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

On a de nouveau un lien avec le Laplacien

**Proposition 6** *Soit $\varphi \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors pour tout $w \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} w_i \overline{w_j} \geq 0$$

*Preuve.* Il suffit de considérer l'application

$$\alpha\ : u \in \mathbb{C} \to \varphi(z + uw)$$

qui est sousharmonique par définition. Il ne reste plus qu'à calculer le Laplacien de $\alpha$ en 0 et de vérifier que

$$\Delta\alpha(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} w_i \overline{w_j}$$

□

La proposition 6 s'applique pour une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^2$. Mais remarquons qu'on a l'équivalence

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} w_i \overline{w_j} \geq 0 \Leftrightarrow \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} w_i \overline{w_j}, f \right\rangle \geq 0 \text{ pour } f \geq 0$$

où $f \geq 0$ signifie que $f$ est une fonction test à valeur dans $[0, +\infty[$. Or l'affirmation de droite garde un sens pour $\varphi$ PSH quelconque. Ainsi en appliquant un théorème standart de régularisation (toute fonction PSH est limite d'une suite de fonctions PSH lisses) on obtient

**Proposition 7** *Soit $\varphi \in PSH(\Omega)$. Alors pour tout $w \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} w_i \overline{w_j}$$

*est une mesure positive (i.e est  valeurs positives sur l'ensemble des fonctions test positives).*

L'exemple fondamental de fonction sousharmonique (resp. plurisousharmonique) est le suivant : soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (resp. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$) holomorphe, alors $\log |f| \in S(\mathbb{C})$ (resp. $\log |f| \in PSH(\mathbb{C}^n)$). Je donne l'idée pour $n = 1$, je vous laisse les “resp.” en exercice. Tout d'abord si $f(z) = 0$ alors l'inégalité de la moyenne est claire ($-\infty$ est plus petit que n'importe quoi !). Si $f(z) \neq 0$, alors localement $f = e^g = e^{Re(g)} e^{iIm(g)}$ d'où $\log |f| = Re(g)$. Or toute fonction holomorphe $g$ vérifie l'égalité de la moyenne

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z + re^{i\theta}) d\theta$$

et donc $Re(g)$ et $Im(g)$ également. Ainsi $\log |f|$ est en fait harmonique en dehors de $\{f = 0\}$.

Pour finir nous énonçons deux propriétés élémentaires des fonctions PSH qui nous seront utiles dans la suite

**Proposition 8** 1. *Si $u_n$ est une suite décroissante de fonctions PSH alors $u_n$ converge uniformément vers $-\infty$ ou vers une fonction PSH;*

2. *Si $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ et $\varphi\ : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ est holomorphe alors $u \circ \varphi$ est PSH.*

Tout ceci va se révéler utile dans les deux prochaine sections puisque nous allons obtenir le courant de Green et les courants d'intégration comme des $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$ de fonctions PSH.

## 8 Fonction et courant de Green

Nous définissons la *fonction de Green* associée à $g$ comme la limite

$$G_g^+(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ ||g^n(z)||$$

où $\log^+(x) = \max(\log(x), 0)$. Suivant [2] nous allons montrer que $G_g^+$ est PSH en faisant un détour par $\mathbb{C}^3$, ce qui aura aussi l'avantage d'expliquer ce "$\log^+$" un peu bizarre. On a donc

$$g \ : (x, y) \to (y, P(y) - \delta x)$$

On considère l'application homogénéisée

$$\bar{g} \ : (x, y, t) \to (yt^{d-1}, t^d P(y/t) - \delta x t^{d-1}, t^d)$$

et on définit $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$ en posant

$$G(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{d^n} \log ||\bar{g}^n(z)||$$

Par homogénéité il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} ||\bar{g}(z)|| &\leq C||z||^d \\ ||\bar{g}^{n+1}(z)|| &\leq C||\bar{g}^n(z)||^d \\ \frac{1}{d^{n+1}} \log ||\bar{g}^{n+1}(z)|| &\leq \frac{\log C}{d^{n+1}} + \frac{1}{d^n} \log ||\bar{g}^n(z)|| \end{aligned}$$

Ainsi en posant $u_n = \frac{1}{d^n} \log ||\bar{g}^n(z)|| - \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\log C}{d^i}$, on obtient $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n \to G$ uniformément sur tout compact. Donc $G$ est PSH (comme limite d'une suite décroissante de fonctions PSH, prop. 8-1), et comme $G_g^+(x, y) = G(x, y, 1)$ la fonction de Green $G_g^+$ est également PSH (prop. 8-2).

**Exercice 11** *Montrer les propriétés suivantes de la fonction de Green*

1. $G_g^+ \circ g = d.G_g^+$;
2. $G_g^+$ *est continue;*
3. $\{G_g^+ = 0\} = K_g^+$;
4. $G_g^+$ *est pluriharmonique sur* $\mathbb{C}^2 \setminus J_g^+$.

Le *courant de Green* associé à $g$ est

$$\mu_g^+ = \frac{i}{\pi} \partial \overline{\partial} G_g^+$$

**Proposition 9** *Le support de $\mu_g^+$ est exactement $J_g^+$.*

*Preuve.* Tout d'abord $G_g^+$ est pluriharmonique en dehors de $J_g^+$ donc $supp(\mu_g^+) \subset J_g^+$. D'autre part s'il existait un point $z \in J_g^+$ non contenu dans le support de $\mu_g^+$ cela violerait le principe du miminum, en effet $G_g^+$ serait pluriharmonique non constante au voisinage de $z$ et atteindrait son minimum (c'est à dire 0) en $z$. $\square$

# 9 Courants d'intégration

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, et soit $M \subset \mathbb{C}^2$ la variété algébrique associée à $P$. Nous supposerons $M$ lisse et sans multiplicité (ces hypothèses ne sont pas indispensables mais simplifient beaucoup les choses). Nous avons vu que $M$ définit un courant de type $(1, 1)$

$$[M](\varphi) = \int_M \varphi$$

**Proposition 10** *Avec les notations ci-dessus,* $[M] = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|P|$

*Preuve.* Tout d'abord un petit lemme, qui n'est rien d'autre qu'une reformulation de la formule de Cauchy

**Lemme 11** *Sur $\mathbb{C}$ on a l'égalité*

$$\overline{\partial}(\frac{1}{2i\pi}\frac{dz}{z}) = \delta_0$$

*Preuve.* Soit $\varphi$ une fonction-test, et $D$ un disque contenant $supp(\varphi)$. On a

$$\begin{aligned} < \overline{\partial}(\frac{1}{2i\pi}\frac{dz}{z}), \varphi > &= \frac{1}{2i\pi} < \frac{dz}{z}, \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}d\overline{z} > \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}dz \wedge d\overline{z} \\ &= \varphi(0) - \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{\varphi(z)}{z}dz}_{=0} \\ &= < \delta_0, \varphi > \end{aligned}$$

la troisième égalité provenant de la formule de Cauchy (voir [4], première page):

$$\varphi(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{\varphi(z)}{z-w}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-w}$$

$\square$

Maintenant soit $f$ une fonction test sur $\mathbb{C}^2$. Rappelons qu'un courant est un objet local, on peut donc supposer $M = \{y = 0\}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\{y=0\}} f &= \int_{x\in\mathbb{C}} < \delta_0, f(x,.) > dx \\
&= \int_{x\in\mathbb{C}} < \overline{\partial}(\frac{1}{2i\pi}\frac{dy}{y}), f(x,.) > dx \\
&= < \overline{\partial}(\frac{1}{2i\pi}\frac{dy}{y}), f >
\end{aligned}$$

Ainsi en remarquant que

$$\partial \log|y| = \partial \frac{1}{2}\log(y\overline{y}) = \frac{1}{2}\frac{dy}{y}$$

on obtient

$$[M] = \overline{\partial}\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{dy}{y}\right) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|P|$$

ce qu'on voulait $\square$

# 10 Preuve du théorème 1

Rappelons l'énoncé. Etant donné $M \subset \mathbb{C}^2$ une courbe algébrique lisse (de degré $k$), et $g$ une application de Hénon généralisée (de degré $d$), nous voulons montrer que la suite des courants d'intégration $\frac{1}{d^n}[g^{-n}(M)]$ converge vers $k.\mu_g^+$. Or

$$[g^{-n}(M)] = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|P \circ g^n|$$

où $M = \{P = 0\}$. D'autre part

$$\mu_g^+ = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G_g^+$$

Ainsi nous voulons montrer que $u_n = \frac{1}{kd^n}\log|P \circ g^n|$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^2)$ vers $G_g^+$. Considérons $\tilde{P}$ l'homogénéisé de $P$ sur $\mathbb{C}^3$; quitte à multiplier $P$ par une constante on peut supposer que

$$\forall z \in \mathbb{C}^3, \frac{1}{k}\log||\tilde{P}|| \leq \log||z||$$

Quitte à changer $P$ en $P \circ g^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand (c'est à dire quitte à supprimer les $m$ premiers termes de la suite), on peut supposer que $\tilde{P}$ ne s'annulle pas en $(0, 1, 0)$. Ainsi $\log ||\tilde{P}||$ est localement borné au voisinage de $(0, 1, 0)$, donc dans un voisinage $W$ de $(0, 1, 0)$ on a

$$\log ||z|| - C \leq \frac{1}{k} \log ||\tilde{P}|| \leq \log ||z||$$

Par suite $\lim_{n \to +\infty} u_n(z) = G_g^+$ sur un voisinage de $[0 : 1 : 0]$ et donc sur $\mathbb{C}^2 \setminus K_g^+$ par prolongement analytique (si deux fonctions pluriharmoniques sont égales sur un ouvert alors elles sont égales partout). Donc sur $\mathbb{C}^2 \setminus K_g^+$ la suite $(u_n)$ converge uniformément sur tout compact vers $G_g^+$.

Quitte à prendre une sous-suite la suite $(u_n)$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{C}^2)$ vers une fonction PSH $u$ (lemme de Hartog). On veut montrer que cette fonction $u$ est nulle sur $K_g^+$. Il est déjà clair qu'elle est nulle sur $J_g^+$, par semi-continuité. Supposons que $u$ soit strictement négative en un point $z \in int(K_g^+)$. Alors (toujours par semi-continuité) il existe un voisinage $U$ de $z$ et $\delta > 0$ tel que $u \leq -2\delta$ sur $U$. Donc pour $n$ assez grand $u_n \leq -\delta$ sur $U$. Posons

$$E_n = \{z; \frac{1}{k} \log |P(z)| < -\delta d^n\}$$

Pour une raison un peu obscure (Sibony renvoie à un livre de Tsuji [1]) on a une estimation du volume de $E_n$

$$vol(E_n \cap B(0, R)) \leq C_1 e^{-\delta n}$$

D'autre part comme $u_n = \frac{1}{k} \frac{1}{d^n} \log |P \circ g^n|$ on a $g^n(U) \subset E_n$ et

$$vol(g^n(U)) = C_2 |a|^n$$

Mais pour $n$ assez grand on a

$$C_2 |a|^n \geq C_1 e^{-\delta n}$$

d'où une contradiction.

Ainsi toute sous-suite convergente de $(u_n)$ converge vers 0 sur $int(K_g^+)$, de plus le lemme de Hartog assure qu'il existe au moins une telle sous-suite. Finalement on en déduit que la suite $(u_n)$ elle-même est convergente vers 0 sur $int(K_g^+)$, ce qui termine la démonstration. □

[1] j'ai consulté ce livre mais cela n'a pas complètement éclairci mes idées, je vous laisse essayer par vous-même.

## References


[1] E. Bedford and J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Inven. Math.*, 103:69–99, 1991.

[2] J.E. Fornaess and N. Sibony. *Complex dynamics in higher dimensions.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publish., 1994.

[3] S. Friedland and J. Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Erg. Th. and Dyn. Sys.*, 9:67–99, 1989.

[4] P. Griffiths and J.Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley, 1978.

[5] M. Hénon. A two dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. in Math. Phys.*, 50:69–77, 1976.

[6] P. Lelong and L. Gruman. *Entire functions of several complex variables.* Gordon & Breach, 1986.

[7] J.H. McKay and S.S. Wang. An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables. *J. Pure and Appl. Algebra*, 52:91–102, 1988.

[8] J.-P. Serre. *Arbres, Amalgames, $SL_2$.*, volume 46 of *Astérisque.* SMF, 1977.