Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 9, 2003

AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX PRÉSERVANT UNE ACTION DE GROUPE

STÉPHANE LAMY

RÉSUMÉ. Nous donnons une description précise du groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$ préservant la forme quadratique y^2+xz, à l'aide de la notion d'automorphisme de $\mathbb{C}^2$ à paramètre. Nous en déduisons une description des automorphismes polynomiaux de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4$ (resp. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^3$) laissant invariant les orbites de l'action par application adjointe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$).

ABSTRACT. We give a description of the group of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$ that preserve the quadratic form y^2+xz, using the notion of automorphism of $\mathbb{C}^2$ with parameter. It follows a description of the polynomial automorphisms of $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4$ (resp. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^3$) that preserve the orbits of the natural action of $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$).

1. Introduction

Dans l'étude du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$ des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^n$, le cas $n = 2$ est très particulier. On dispose en effet d'un théorème de structure qui décrit $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ comme le produit amalgamé de deux de ses sous-groupes : les groupes affine et élémentaire. Nous noterons A_n le groupe des automorphismes affines de $\mathbb{C}^n$ (autrement dit les automorphismes qui se prolongent en des biholomorphismes de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$), et E_n le groupe des automorphismes élémentaires c'est-à-dire ceux de la forme

$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (\alpha_1 x_1 + f_1, \cdots, \alpha_n x_n + f_n)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $f_i \in \mathbb{C}[x_{i+1}, \cdots, x_n]$. En dimension 2 nous avons donc le

THÉORÈME (Jung-Van der Kulk). *Le groupe* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ *est le produit amalgamé des sous-groupes affine et élémentaire suivant leur intersection :*

$$\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2] = A_2 *_\cap E_2 .$$

Cela revient à dire que A_2 et E_2 engendrent $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, et que toutes les relations dans $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ sont induites par les relations dans A_2 et E_2 (pour une démonstration de ce théorème on pourra se référer à [7], [9], [11] ou [12]). Ce résultat ne paraît pas pouvoir se généraliser en dimension 3 (ni a fortiori en dimension supérieure). D'une part il est facile de voir que $\langle A_3, E_3\rangle$ n'est pas

2000 *Mathematics Subject Classification*: 14L30, 14J50.
Mots clés : automorphismes polynomiaux, forme quadratique invariante.
Keywords and phrases: polynomial automorphisms, invariant quadratic form.

le produit amalgamé de A_3 et E_3 ; par exemple en considérant les automorphismes :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \mapsto (x, z, y) &\in A_3 \setminus E_3;\\ (x, y, z) \mapsto (x \pm yz, y, z) &\in E_3 \setminus A_3;\end{aligned}$$

on obtient une relation :

$$(x, z, y) \circ (x + yz, y, z) \circ (x, z, y) \circ (x - yz, y, z) = Id\,.$$

D'autre part la question de savoir si $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3] = \langle A_3, E_3 \rangle$ reste ouverte, cependant on conjecture que cette égalité est fausse et un candidat à être un contre-exemple est l'automorphisme suivant proposé par Nagata en 1972 [12] :

$$N : (x, y, z) \mapsto (x - 2y(y^2 + xz) - z(y^2 + xz)^2, y + z(y^2 + xz), z).$$

Cet automorphisme provient d'une dérivation localement nilpotente. Une dérivation D de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ est dite localement nilpotente si pour tout $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^n(f) = 0$ (voir [7]). L'exponentielle d'une dérivation localement nilpotente est un automorphisme polynomial :

$$\exp(D) : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_1), \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(x_n) \right).$$

Notons que si $f \in \mathrm{Ker}(D)$ alors

- $f.D$ est aussi une dérivation localement nilpotente ;
- $f \circ \exp(D) = f$.

Considérons maintenant la dérivation $D = -2y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$ de l'algèbre $\mathbb{C}[x, y, z]$. C'est une dérivation localement nilpotente de noyau $\mathbb{C}[z, y^2 + xz]$. L'automorphisme proposé par Nagata s'écrit :

$$N = \exp((y^2 + xz).D).$$

Notons $Q = y^2 + xz$, ainsi $Q \circ N = Q$. Dans [3] Drensky et Yu considèrent les automorphismes de type Nagata de la forme $\exp(\delta.D)$ avec $\delta \in \mathbb{C}[z, Q] = \mathrm{Ker}(D)$ et posent le problème : le groupe "orthogonal non linéaire" $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, *i.e.* le groupe constitué des $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ tels que $Q \circ \varphi = Q$, est-il engendré par le groupe orthogonal linéaire et les automorphismes de type Nagata ?

La description du groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ peut être vue comme un cas particulier du problème plus général suivant : étant donnée l'action d'un groupe G sur $\mathbb{C}^n$, décrire le groupe $\mathrm{Aut}_G[\mathbb{C}^n]$ des automorphismes polynomiaux préservant les orbites de cette action (c'est-à-dire qui envoient une orbite sur une autre orbite). Une situation basique est celle où G est un groupe de Lie complexe agissant par application adjointe sur son algèbre de Lie (qui s'identifie à $\mathbb{C}^n$). Nous allons considérer deux cas pour lesquels nous serons en mesure de donner une description précise du groupe d'automorphismes associé, notre démarche consistant à nous ramener à l'étude de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$:

1. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ associé à l'action par conjugaison de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$;
2. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ associé à l'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$.

L'article est organisé comme suit.

Dans la seconde partie nous introduisons la notion d'automorphismes à paramètres, qui sera omniprésente dans la suite.

Nous montrons dans la troisième partie comment l'étude de $\mathrm{Aut}_{SL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ et de $\mathrm{Aut}_{GL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ peut se réduire à celle de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

La description du groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ fait l'objet de la quatrième partie. Ces résultats avaient été résumés dans la note [8] ; nous les exposons ici en détails. En particulier notre résultat principal peut s'exprimer ainsi ($H \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ étant un sous-groupe, $H_{[t]}$ désigne les familles à paramètre polynomial d'éléments de H) :

THÉORÈME. *Il existe un sous-groupe* $H \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ *tel que* $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ *et* $H_{[t]}/_{\langle -Id\rangle}$ *soient isomorphes.*

De plus nous construisons cet isomorphisme de manière explicite. Ce passage de la dimension 3 à la dimension 2 nous permet ensuite d'appliquer le théorème de Jung - Van der Kulk (ou plus exactement sa version sur le corps $\mathbb{C}(t)$ des fractions rationnelles) afin d'obtenir des informations sur la structure de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

Dans la cinquième partie nous répondons (négativement) à la question de Drensky et Yu, en produisant un contre-exemple. Nous complétons les descriptions de $\mathrm{Aut}_{SL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ et de $\mathrm{Aut}_{GL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ et terminons en donnant quelques exemples qui illustrent notre méthode.

2. Automorphismes à paramètres

Nous commençons par préciser quelques notations. Par $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$ (resp. $\mathrm{AutBir}(\mathbb{C}^n)$) nous désignons le groupe des automorphismes polynomiaux (resp. birationnels) de $\mathbb{C}^n$. Si

$$f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n))$$

est un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$, nous noterons en abrégé $f = (f_1, \cdots, f_n)$, et par $f(x_i)$ nous désignerons le polynôme $f_i(x_1, \cdots, x_n)$: ceci est un léger abus d'écriture qui consiste à regarder f comme un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n])$ s'identifiant de manière contravariante à $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$. Les mêmes remarques s'appliquent à $\mathrm{AutBir}(\mathbb{C}^n)$.

Nous introduisons maintenant la notion d'automorphisme à paramètres. Notons $(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_p)$ les coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+p}$. Soit F un sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^n]$. Nous dirons que $f \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^{n+p}]$ est un élément de F à paramètres polynomiaux $t_1, \cdots, t_p$ si

1. f fixe chaque hyperplan $t_i = constante$, autrement dit $f(t_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \cdots, p$;
2. pour tout $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$, l'application

$$f_\lambda : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n, \lambda)$$

est un élément de F.

De manière analogue nous dirons que $f \in \mathrm{AutBir}(\mathbb{C}^{n+p})$ est un élément de F à paramètres rationnels $t_1, \cdots, t_p$ si

1. $f(t_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \cdots, p$;
2. pour tout $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $\mathbb{C}^p$ privé d'un fermé de Zariski, l'application

$$f_\lambda : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n, \lambda)$$

est un élément de F (les points exclus dans l'espace des paramètres correspondent aux pôles des coefficients de f ou de f^{-1}).

Nous noterons $F_{[t_1,\cdots,t_p]}$ les éléments de F à paramètres polynomiaux, et $F_{(t_1,\cdots,t_p)}$ les éléments de F à paramètres rationnels. Si f est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ à paramètres $t_1,\cdots,t_p$, nous noterons de manière abrégée $f=(f_1,\cdots,f_n)$ au lieu de

$$f:(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_p)\mapsto(f_1(x_1,\cdots,t_p),\cdots,f_n(x_1,\cdots,t_p),t_1,\cdots,t_p).$$

Exemples.

• $f_1:(u,v,t)\mapsto(u+tv^n,v,t)$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ à paramètre polynomial t (on peut d'ailleurs aussi considérer f_1 comme un automorphisme de $\mathbb{C}$ à paramètres v et t). En abrégé nous écrirons $f_1=(u+tv^n,v)$.

• $f_2=(v,u+\frac{1}{t_1+t_2}v^n)$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ à paramètres rationnels t_1,t_2.

• $f_3=(tu,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ à paramètre rationnel t, son inverse est $(\frac{1}{t}u,v)$. Contrairement aux deux premiers exemples son déterminant jacobien dépend de t. Dans cet article nous ne considèrerons pas de tels automorphismes.

3. Liens entre $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ et $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$

(3.1) Le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$. Nous identifions $\mathbb{C}^3$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ via l'application

$$(x,y,z)\mapsto\begin{pmatrix} y & x\\ z & -y\end{pmatrix}$$

La forme quadratique $Q=y^2+xz$ correspond ainsi (au signe près) au déterminant.

LEMME (3.2). *Les éléments de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ *sont exactement les éléments de* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ *préservant les niveaux de la forme* y^2+xz.

Preuve. Un système de représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est

$$\left\{\begin{pmatrix}\pm a & 0\\ 0 & \mp a\end{pmatrix};a\in\mathbb{C}\right\}\bigcup\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi f est un élément de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ si et seulement si f est un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ préservant le déterminant et fixant la matrice nulle. Mais cette dernière condition est superflue car la matrice nulle est l'unique point singulier de l'application déterminant et est donc fixée par tout f préservant les niveaux de y^2+xz. □

Tout élément $f\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ induit une application $\bar f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\bar f(\det(M))=\det(f(M))$$

autrement dit le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\det"'] & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \arrow[d, "\det"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\bar f"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

LEMME (3.3). *Pour tout* $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ *l'application* $\bar{f}$ *induite par* f *est de la forme*

$$\bar{f} : x \mapsto \alpha.x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Preuve. Considérant l'égalité

$$\bar{f}(a^2) = \det\left(f\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix}\right) = \det\left(f\begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix}\right)$$

nous voyons que $\bar{f}(a^2)$ est un polynôme en a invariant par le changement de variable $a \mapsto -a$; $\bar{f}(a^2)$ est donc un polynôme en a^2. De plus l'application $\bar{f}$ est bijective, car $\bar{f}^{-1} = \overline{f^{-1}}$. Ainsi $\bar{f}$ est un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}$, il s'écrit donc

$$\bar{f} : x \mapsto \alpha.x + \beta \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}.$$

Enfin $\beta = 0$, car nous avons vu que f fixe la matrice nulle. □

Par le lemme (3.2) le groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ des automorphismes de $\mathbb{C}^3$ qui fixent les niveaux de la forme quadratique $Q = y^2 + xz$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ constitué des f tels que $\bar{f}$ soit l'identité. Nous avons

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3] = \langle \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3], \mathbb{C}^* \rangle$$

où $\mathbb{C}^* \mapsto \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$ est l'inclusion naturelle $\alpha \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Plus précisément nous pouvons écrire :

PROPOSITION (3.4).

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]/_{\langle -Id \rangle} = \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]/_{\langle -Id \rangle} \rtimes \mathbb{C}^*/_{\langle -Id \rangle}.$$

Ainsi, pour terminer la description de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$ il nous reste seulement à décrire le groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

(3.5) Le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$. Nous identifions $\mathbb{C}^4$ et $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ via l'application

$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix}$$

Pour $M \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$, nous noterons :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M) &= y + w; \\ \det(M) &= yw - xz; \\ \mathrm{dis}(M) &= \mathrm{tr}(M)^2 - 4\det(M) = (y - w)^2 + 4xz. \end{aligned}$$

LEMME (3.6). *Tout élément* f *de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ *induit une application* $\bar{f}$ *de* $\mathbb{C}^2$ *dans* $\mathbb{C}^2$ *satisfaisant*

$$\bar{f}(tr(M), dis(M)) = (tr(f(M)), dis(f(M))).$$

De plus $\bar{f}$ *est un automorphisme élémentaire de la forme*

$$\bar{f} : (u, v) \mapsto (\alpha u + P(v), \beta v) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[X].$$

Réciproquement tout automorphisme élémentaire de cette forme peut être réalisé comme l'application $\bar{f}$ *induite par un certain* $f \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$.

Preuve. L'existence de $\bar{f}$ provient simplement du fait que si M, N sont deux matrices dans une même orbite alors M et N ont même trace et même déterminant. Pour voir que $\bar{f}$ est polynomial il suffit de considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(\mathrm{tr},\mathrm{dis})"] & \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \arrow[d, "(\mathrm{tr},\mathrm{dis})"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

et de l'appliquer aux matrices $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. En effet on voit alors que $\bar{f}(\lambda_1 + \lambda_2, (\lambda_1 - \lambda_2)^2)$ est polynomial en λ_1 et λ_2 et invariant par échange de λ_1 et λ_2 ; *i.e.* il s'exprime à l'aide des fonctions symétriques $\lambda_1 + \lambda_2$ et $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. On montre que $\bar{f}$ est bijective en remarquant que $\bar{f}^{-1} = \overline{f^{-1}}$. Nous montrons maintenant que f se restreint en un automorphisme sur les matrices de discriminant nul. Un élément M de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ est de l'un des trois types suivant :

1. les deux valeurs propres de M sont distinctes : l'orbite de M est fermée et non réduite à un point ;
2. M est une matrice scalaire (*i.e.* $M = \lambda.Id$) : l'orbite de M est réduite à un point ;
3. M a ses deux valeurs propres égales et n'est pas scalaire : dans ce cas l'orbite de M n'est pas fermée.

Cette partition de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ est respectée par tout élément de $\mathrm{Aut}_{GL(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$; de plus les matrices de discriminant nul correspondent exactement aux types 2 et 3. Ainsi on a

$$\mathrm{dis}(M) = 0 \Rightarrow \bar{f}(\mathrm{dis}(M)) = \mathrm{dis}(f(M)) = 0.$$

Par conséquent v divise $\bar{f}(v) \in \mathbb{C}[u, v]$ qui est irréductible (car $\bar{f}$ est un automorphisme). On en déduit que $\bar{f}$ est un automorphisme élémentaire de la forme :

$$\bar{f} : (u, v) \mapsto (\alpha u + P(v), \beta v) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

Réciproquement montrons que tous ces automorphismes élémentaires sont réalisés. Posons η égal à l'involution

$$\eta : \begin{pmatrix} y & x \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w & -x \\ -z & y \end{pmatrix}$$

Considérons les automorphismes de la forme $(A1)$:

$$f : M \mapsto M + P(\mathrm{dis}(M)).Id.$$

L'inverse de f s'obtient simplement en remplaçant P par $-P$. L'automorphisme f induit

$$\bar{f} : (u, v) \mapsto (u + 2P(v), v).$$

Considérons maintenant les automorphismes de la forme $(A2)$ (où $\alpha \neq \pm\beta$) :

$$g : M \mapsto \alpha M + \beta\eta(M).$$

L'inverse de g est $M \mapsto \alpha' M + \beta'\eta(M)$, avec $\alpha' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right)$ et $\beta' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)$. L'automorphisme g induit un automorphisme linéaire diagonal

$$\bar{g} : (u, v) \mapsto ((\alpha+\beta)u, (\alpha-\beta)^2 v).$$

En composant des automorphismes de type (A1) et (A2) on obtient tous les automorphismes élémentaires annoncés. □

Notons $\mathcal{E} \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ le groupe engendré par les automorphismes de la forme $(A1)$ et $(A2)$, et $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ constitué des éléments f tels que $\bar{f}$ soit l'identité. On a alors

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4] = \langle \mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4], \mathcal{E} \rangle$$

et plus précisément

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]/_{\langle\eta\rangle} = \mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]/_{\langle\eta\rangle} \rtimes \mathcal{E}/_{\langle\eta\rangle}$$

Il reste à décrire $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$. La proposition suivante montre que de nouveau il y a une relation avec le groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$.

PROPOSITION (3.7). *Le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$ *est isomorphe à* $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t]}$.

Preuve. Soit f un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t]}$. Conjuguons f par la translation

$$(x, y, z) \mapsto (x, y-t, z).$$

Nous obtenons un automorphisme φ de l'algèbre $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ qui laisse invariant t et $(y-t)^2+xz$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{y+w}{2}$ on obtient alors un automorphisme de $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ qui laisse invariant $y+w$ et $(y+w)^2+4xz$, autrement dit qui préserve trace et discriminant.

Réciproquement, à partir d'un élément de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$, à l'aide du changement de variable $w = 2t - y$ et en conjuguant par $(x, y+t, z)$ on obtient un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t]}$. Nous avons ainsi produit l'isomorphisme annoncé. □

Finalement nous avons obtenu :

PROPOSITION (3.8).

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]/_{\langle\eta\rangle} = \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t]}/_{\langle\eta\rangle} \rtimes \mathcal{E}/_{\langle\eta\rangle}$$

4. Description du groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$

La description du groupe $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ va s'effectuer à l'aide de deux groupes auxiliaires $H \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$. Notre but est de décrire deux isomorphismes

$$H_{[t]}/_{\langle -Id\rangle} \simeq G_{[t]} \simeq \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3].$$

Ceci permettra d'identifier un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ à un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ à paramètre polynomial (modulo $-Id$).

(4.1) Définition des groupes $H \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et $G \subset \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^3]$. Le théorème de Jung-Van der Kulk énoncé dans l'introduction reste valable pour tout corps k (Jung a démontré en 1942 que $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est engendré par A et E, et c'est Van der Kulk [7] qui a donné la première preuve valable sur un corps quelconque en décrivant de plus la structure de produit amalgamé). Nous allons travailler avec $k = \mathbb{C}$, et avec $k = \mathbb{C}(t)$ le corps des fractions rationnelles. Notons H le sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ constitué des automorphismes de déterminant jacobien ± 1 qui commutent avec $-Id$, et posons $A_H = A_2 \cap H$, $E_H = E_2 \cap H$. Autrement dit A_H est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ constitué des matrices de déterminant ± 1, et E_H est le groupe des automorphismes de la forme :

$$(u, v) \mapsto (\pm \alpha u + vP(v^2), \alpha^{-1} v) \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}^*, P \in \mathbb{C}[X].$$

PROPOSITION (4.2). *On a les décompositions en produit amalgamé :*

$$H = A_H *_\cap E_H \quad et \quad H_{(t)} = A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}.$$

Preuve. Tout d'abord suivant [13, prop.3 p.14] on a $\langle A_H, E_H \rangle = A_H *_\cap E_H$. Reste à voir que A_H et E_H engendrent H. Pour ceci considérons la récurrence dans la preuve du théorème de structure pour $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ (cf. [11]). Soit $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, en composant éventuellement (à gauche) par un automorphisme de la forme $(u + \alpha v, v)$ puis par (v, u) on peut supposer $\deg(g_1) > \deg(g_2)$. On montre alors (c'est le point délicat de la preuve) que $\deg(g_1) = n.\deg(g_2)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi en composant par $(u + \beta v^n, v)$ avec β convenable on peut faire baisser le degré. Notons que si g commute avec $-Id$, c'est à dire si g_1 et g_2 ont tous leurs monômes de degré impair, alors n aussi est impair. Ainsi par récurrence on écrit $g = m \circ s$ avec $s \in A_2 \cap E_2$, $\det(\mathrm{Jac}(m)) = \pm 1$ et m commutant avec $-Id$, d'où le résultat. La preuve dans le cas à paramètres rationnels est exactement similaire (en travaillant sur le corps $\mathbb{C}(t)$). □

Remarque (4.3). En contraste avec la proposition (4.2), le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}^2$ à paramètre polynomial n'est pas engendré par les sous-groupes affine et élémentaire à paramètre polynomial. Un contre exemple est donné par l'automorphisme de Nagata : ce fait est bien connu et s'exprime en disant que N n'est pas modéré dans $\mathbb{C}[z][x, y]$ (cf. [1] ou [12]). En effet en considérant la troisième coordonnée comme un paramètre on obtient :

$$N_t : (u, v) \mapsto (u - 2v(v^2 + tu) - t(v^2 + tu)^2, v + t(v^2 + tu))$$

qui admet la décomposition :

$$N_t = (u - \frac{v^2}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^2}{t}, v).$$

Il resterait à vérifier que N_t n'admet pas une autre décomposition à coefficients polynomiaux, c'est ce que nous ferons dans la section 5.1 pour un exemple légèrement différent (voir également [12]).

Nous introduisons maintenant un sous-groupe particulier de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ que nous noterons G. Nous définissons d'abord E_G comme le groupe formé des applications

$$(x, y, z) \mapsto (\alpha^2 x + 2\alpha y \delta(z) - z\delta^2(z), y - \frac{z}{\alpha}\delta(z), \frac{1}{\alpha^2} z) \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}^*, \delta \in \mathbb{C}[z].$$

implique donc que $p^*(\psi_1)$ et $-p^*(\psi_3)$ n'ont pas de facteur commun. En conséquence $p^*(\psi_1)$ et $-p^*(\psi_3)$ sont tous deux des carrés dans $\mathbb{C}[t][u,v]$:

$$p^*(\psi_1) = f_t(u,v)^2, \quad -p^*(\psi_3) = g_t(u,v)^2.$$

En remplaçant éventuellement f_t par $-f_t$ nous pouvons supposer que

$$p^*(\psi_2) = f_t(u,v)g_t(u,v).$$

Alors $\varphi : (u,v) \mapsto (f_t(u,v), g_t(u,v))$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathbb{C}(t)[u,v]$ qui fait commuter le diagramme (4.5). Il est facile de voir que φ est un automorphisme : il suffit de faire le même raisonnement avec ψ^{-1} pour construire l'inverse de φ. L'unicité de φ (modulo $-Id$) découle de la première assertion du lemme. □

Nous construisons maintenant un morphisme de groupes

$$\sigma : H_{(t)} \mapsto G_{(t)}$$

de manière à ce que pour tout $\varphi \in H_{(t)}$ le couple $(\varphi, \sigma(\varphi))$ fasse commuter le diagramme (4.5). Nous définissons tout d'abord σ sur $A_{H,(t)}$ et sur $E_{H,(t)}$ en posant

$$\begin{array}{ccc}
\sigma : A_{H,(t)} & \mapsto & \mathrm{O}(3,\mathbb{C})_{(t)} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & -b^2 \\ ac & ad+bc & -bd \\ -c^2 & -2cd & d^2 \end{pmatrix} \\
\sigma : E_{H,(t)} & \mapsto & E_{G,(t)} \\
\left(\alpha u + v\delta(-v^2), \dfrac{\pm v}{\alpha}\right) & \mapsto & \left(\alpha^2 x \pm 2\alpha y\delta(z) - z\delta^2(z), y \mp \dfrac{z}{\alpha}\delta(z), \dfrac{z}{\alpha^2}\right)
\end{array}$$

Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, au sens où elles coïncident sur $A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$. Comme $H_{(t)}$ est le produit amalgamé de $A_{H,(t)}$ et $E_{H,(t)}$, σ s'étend automatiquement en un morphisme de $H_{(t)}$ dans

$$\langle \mathrm{O}(3,\mathbb{C})_{(t)}, E_{G,(t)} \rangle \subset G_{(t)}$$

(on pourrait montrer que cette dernière inclusion est en fait une égalité, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait). Le lemme suivant est immédiat.

LEMME (4.7). *Le morphisme σ induit des isomorphismes*

$$\begin{array}{rcl}
A_H/_{\langle -Id\rangle} & \simeq & O(3,\mathbb{C}) \\
E_H/_{\langle -Id\rangle} & \simeq & E_G \\
H/_{\langle -Id\rangle} & \simeq & \langle O(3,\mathbb{C}), E_G\rangle = G
\end{array}$$

De plus pour tout $\varphi \in H_{(t)}$ le couple $(\varphi, \sigma(\varphi))$ fait commuter le diagramme (4.5).

Remarquons qu'étant donné $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]_{[t]}$ il est loin d'exister un unique $\psi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t]}$ tel que (φ, ψ) fasse commuter (4.5). En particulier, en reprenant les notations de l'introduction, tous les couples $(Id, \exp(Q\delta(Q,z).D))$ font commuter (4.5). Cependant nous avons le

LEMME (4.8). *Soit $\psi \in G_{(t)}$. Alors :*
1. *si le couple (Id, ψ) fait commuter le diagramme (4.5), alors $\psi = Id$;*
2. *si (φ, ψ) fait commuter (4.5), alors $\varphi \in H_{(t)}$.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que $\psi \in G$. D'après le lemme (4.7) on peut écrire $\psi = \sigma(\varphi)$ avec $\varphi \in H$. On a donc (φ, ψ) qui fait commuter (4.5). Par la partie unicité du lemme (4.6) les deux affirmations du lemme sont dans ce cas immédiates. Considérons maintenant $\psi_t \in G_{(t)}$ et φ_t tel que le couple (φ_t, ψ_t) fasse commuter le diagramme (4.5). Pour tout t_0 en dehors d'un nombre fini de pôles $\varphi_{t_0} \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et $\psi_{t_0} \in G$ sont bien définis et font également commuter (4.5). Si $\varphi_t = Id$ on en déduit que $\psi_{t_0} = Id$ pour t_0 dans un ouvert de Zariski, et donc $\psi_t = Id$. De même φ_{t_0} est l'élément de H tel que $\sigma(\varphi_{t_0}) = \psi_{t_0}$, et donc $\varphi \in H_{(t)}$. □

PROPOSITION (4.9). *Pour tout $\psi \in G_{[t]}$ il existe $\varphi \in H_{[t]}$ (unique modulo $-Id$) tel que $\psi = \sigma(\varphi)$.*

Preuve. Par le lemme (4.6) nous savons qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]_{[t]}$ (unique modulo $-Id$) tel que le diagramme (4.5) commute. Le lemme (4.8) affirme alors que $\varphi \in H_{[t]}$. □

Remarquons que cette proposition n'est plus valable si l'on considère des automorphismes à paramètre rationnel. En effet

$$(x, y, z) \mapsto (\frac{x}{t}, y, tz)$$

est un élément de $G_{(t)}$ qui n'admet pas d'antécédent par σ dans $H_{(t)}$ (merci au rapporteur à qui je dois cette observation).

Nous voudrions vérifier maintenant que σ induit un isomorphisme de $H_{[t]}/_{\langle -Id\rangle}$ sur $G_{[t]}$. Ceci n'est pas immédiat : il pourrait advenir que $G_{[t]}$ soit strictement inclu dans $\sigma(H_{[t]})$. En effet pour construire l'image d'un élément f_t de $H_{[t]}$ il faut commencer par décomposer f_t dans le produit amalgamé $A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}$

$$f_t = f_n \circ \cdots \circ f_1$$

puis par définition $\sigma(f_t) = \sigma(f_1) \circ \cdots \circ \sigma(f_n)$. Même si f_t admet des coefficients polynomiaux en t nous avons vu que sa décomposition peut nécessiter des automorphismes à paramètre rationnel (remarque (4.3)), ainsi il n'est a priori pas clair que $\sigma(f_t)$ ait ses coefficients polynomiaux. Nous montrerons ceci à la fin du paragraphe suivant.

(4.10) Interprétation géométrique du groupe G. Le groupe G intervient dans la description des automorphismes de la quadrique $V_\lambda = \{y^2 + xz = \lambda\}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Les automorphismes de telles surfaces sont classifiés dans [10]. Plus précisément L. Makar-Limanov décrit dans cet article le groupes des automorphismes de l'algèbre $k[x, y, z]/(xy - P(z))$ où k est un corps et P un polynôme sur k. Ainsi que le remarque l'auteur en fin d'article, aucune hypothèse n'est nécessaire sur k; en particulier il n'est pas nécessaire de supposer k algébriquement clos. Nous sommes intéressés par le cas où k est de caractéristique 0 et où $P(z) = \lambda - z^2$. Dans cette situation, en effectuant le changement de variables $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ (pour retrouver nos notations) le théorème principal de [10] s'écrit :

THÉORÈME (Makar-Limanov). *Soit k un corps (algébriquement clos ou non) de caractéristique 0, et $\lambda \in k$. Le groupe des automorphismes de l'algèbre $k[x, y, z]/(y^2 + xz - \lambda)$ est engendré par les automorphismes suivants :*

(a) $H : (x, y, z) \mapsto (a^{-1}x, y, az)$ *où* $a \in k^*$ *;*
(b) $I : (x, y, z) \mapsto (z, y, x)$*;*
(c) $\Delta : (x, y, z) \mapsto (x - 2yf(z) - z^2 f(z), y + zf(z), z)$ *où* $f \in k[T]$*;*
(d) (seulement si $\lambda = 0$*)* $R : (x, y, z) \mapsto (a^2x, ay, z)$ *où* $a \in k^*$ *;*
(e) $S : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$*.*

Signalons que ce résultat est également contenu dans l'article [6, p. 54–56] de M. Gizatullin et V. Danilov paru en 1977. Cependant nous préférons utiliser l'énoncé de Makar-Limanov dont la formulation plus algébrique s'adapte mieux à nos buts.

Dans le cas $k = \mathbb{C}$, nous voyons que les automorphismes de type (a),(b) et (e) sont des éléments de $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$, et ceux de type (c) des éléments de E_G. Ainsi on obtient le

COROLLAIRE (4.11). *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, *le groupe* G_λ *des automorphismes de la surface* V_λ *est engendré par la restriction des éléments de* G.

De même, dans le cas où $k = \mathbb{C}(t)$ et $\lambda = t$ on obtient le

COROLLAIRE (4.12). *Le groupe des automorphismes de l'algèbre*

$$\mathbb{C}(t)[x, y, z]/(y^2 + xz - t)$$

est engendré par les éléments de $G_{(t)}$.

En particulier le corollaire (4.11) dit que tout automorphisme de V_λ peut s'étendre en un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ préservant Q. Nous avons exclu le cas $\lambda = 0$ car dans ce cas le groupe associé est un peu plus grand : le groupe des automorphismes du niveau V_0 est le groupe engendré par les transformations $(x, y, z) \mapsto (a^2x, ay, z)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ (ce sont les automorphismes de type (d) dans le théorème de Makar-Limanov) et par le groupe G_0 restriction de G à V_0. Le lemme suivant vient compléter le corollaire (4.11) :

LEMME (4.13). *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *le morphisme de restriction* $G \mapsto G_\lambda$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Nous notons $[x : y : z : w]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, et nous identifions $\mathbb{C}^3$ avec l'hyperplan $w = 1$. Supposons que $g = (g_1, g_2, g_3)$ soit un élément non trivial du noyau du morphisme de restriction $G \mapsto G_\lambda$. On écrit

$$g : (x, y, z) \mapsto (x + (y^2 + xz - \lambda)f_1, y + (y^2 + xz - \lambda)f_2, z + (y^2 + xz - \lambda)f_3)$$

avec $f_i \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Les composantes homogènes de plus haut degré des g_i sont donc des multiples de $y^2 + xz$; autrement dit la conique à l'infini $\mathcal{C} = \{y^2 + xz = w = 0\}$ est une courbe d'indétermination pour g (où g est prolongée en une application birationnelle de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$). Par ailleurs g s'écrit comme une composée d'éléments de $\mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ et de E_G (peu importe que cette écriture ne soit pas unique) :

$$g = a_n \circ e_n \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \text{ avec } a_i \in O(3, \mathbb{C}) \setminus E_G, e_j \in E_G \setminus O(3, \mathbb{C})$$

(les cas où l'écriture commence par un élémentaire et/ou finit par un affine sont similaires, le cas $g \in O(3, \mathbb{C}) \cap E_G$ est trivial). Remarquons que tout élément de $E_G \setminus \mathrm{O}(3, \mathbb{C})$ admet la droite $z = w = 0$ comme lieu d'indétermination et contracte le plan à l'infini $w = 0$ sur le point $[1 : 0 : 0 : 0]$; d'autre part tout élément de $O(3,\mathbb{C}) \setminus E_G$ induit un automorphisme de la conique $\mathcal{C}$ ne fixant pas $[1:0:0:0]$. Considérons un point $p \in \mathcal{C}$, tel que $p \neq [1:0:0:0]$. Alors $e_1(p) = [1:0:0:0]$ et $a_1 \circ e_1(p)$ est donc bien défini : c'est encore un point de $\mathcal{C}$, différent de $[1:0:0:0]$. En itérant n fois ce raisonnement on en déduit que $a_n \circ e_n \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1(p)$ est bien défini. Ainsi $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe d'indétermination pour g : nous avons obtenu une contradiction. En conclusion le morphisme de restriction est injectif. □

Nous pouvons maintenant montrer la

PROPOSITION (4.14). *Le morphisme σ induit un isomorphisme entre $H_{[t]}/\langle -Id\rangle$ et $G_{[t]}$.*

Preuve. Etant donné $h_t \in H_{[t]}$ fixé, nous allons montrer que $\sigma(h_t) \in G_{[t]}$. Notons n le degré en u, v de h_t. Remarquons tout d'abord que le morphisme σ préserve le degré, *i.e.* le degré en u, v de h_t est égal au degré en x, y, z de $\sigma(h_t)$. En effet, on constate à partir des définitions que σ préserve le degré sur $A_H \cup E_H$, et il est par ailleurs facile de vérifier par récurrence que le degré d'un élément de H (resp. de G) est égal au produit des degrés des éléments de E_H (resp. de E_G) mis en jeu dans sa décomposition. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & G_0 & \end{tikzcd}$$

où $H \mapsto G_0$ est le revêtement double induit par la paramétrisation $p : (u, v) \mapsto (u^2, uv, -v^2)$, et $G \mapsto G_0$ est l'isomorphisme induit par la restriction. Ce diagramme permet de définir σ de manière naturelle (quoique moins constructive), au sens où l'on évite de décomposer $h \in H$ dans le produit amalgamé pour définir $\sigma(h)$. Comme σ préserve le degré ce diagramme peut se restreindre aux automorphismes de degré $\leq n$ (dans $\mathrm{Aut}(V_0)$ on peut définir le degré de manière intrinsèque en fonction du nombre de points d'indétermination à l'infini). Ceci nous permet de nous ramener à des morphismes entre variétés affines : on voit que σ induit un revêtement double algébrique de la variété affine des éléments de H de degré inférieur ou égal à n sur la variété affine des éléments de G de degré inférieur ou égal à n. En particulier h_t, qui est une courbe affine paramétrée par $\mathbb{C}$ dans H, est envoyée par σ sur une courbe de même nature, c'est-à-dire un élément de $G_{[t]}$. Ainsi σ est un morphisme de $H_{[t]}$ dans $G_{[t]}$, et ce morphisme est surjectif et de noyau $\langle -Id\rangle$ par la proposition (4.9). □

(4.15) Le morphisme τ entre $G_{[t]}$ et $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. Nous allons considérer des couples (φ, ψ), où $\varphi \in G_{(t)}$ et $\psi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{(t)}$, tels que le diagramme suivant commute :

(4.16)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(t)[x,y,z] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{C}(t)[x,y,z] \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{C}(t)[x,y,z]/(y^2+xz-t) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C}(t)[x,y,z]/(y^2+xz-t) \end{tikzcd}$$

Le morphisme q est l'application quotient, et nous utilisons l'identification entre $G_{(t)}$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(t)[x,y,z]/(y^2+xz-t))$ donnée par le corollaire (4.12).

LEMME (4.17). *Pour tout* $\psi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{(t)}$ *il existe un unique* $\varphi \in G_{(t)}$ *tel que le diagramme (4.16) commute. Si de plus* $\psi \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$*, alors* $\varphi \in G_{[t]}$.

Preuve. Le morphisme $q \circ \psi$ étant surjectif, pour obtenir l'existence et l'unicité de φ il suffit de montrer que le noyau de $q \circ \psi$ est l'idéal engendré par (y^2+xz-t). Or ceci est immédiat, car $\psi(y^2+xz-t) = y^2+xz-t$. Supposons maintenant ψ dans $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$. On a obtenu $\varphi_t \in G_{(t)}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, φ_λ soit l'unique élément de G qui coïncide avec ψ sur la quadrique V_λ. Les coefficients de φ_t sont ainsi des fractions rationnelles bien définies en tout point, on en conclut que φ est en fait à paramètre polynomial. □

PROPOSITION (4.18). *Il existe un isomorphisme* τ *entre les groupes* $G_{[t]}$ *et* $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ *tel que pour tout* $\varphi \in G_{[t]}$*, le couple* $(\varphi, \tau(\varphi))$ *fasse commuter (4.16).*

Preuve. Si $\varphi \in G_{[t]}$ s'écrit :

$$\varphi : (x,y,z,t) \mapsto (\varphi_1(x,y,z,t), (\varphi_2(x,y,z,t), (\varphi_3(x,y,z,t), t)$$

nous définissons $\tau(\varphi)$ par

$$\tau(\varphi) : (x,y,z) \mapsto (\varphi_1(x,y,z,y^2+xz), (\varphi_2(x,y,z,y^2+xz), (\varphi_3(x,y,z,y^2+xz)).$$

Dire que $(\varphi, \tau(\varphi))$ fait commuter (4.16) c'est dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, φ_λ et $\tau(\varphi)$ coïncident sur V_λ. En particulier nous voyons que notre définition de τ est la seule possible. On en déduit que τ est un morphisme de groupe : le couple $(\varphi\circ\varphi', \tau(\varphi)\circ\tau(\varphi')$ fait commuter (4.16) et donc $\tau(\varphi)\circ\tau(\varphi') = \tau(\varphi\circ\varphi')$. L'injectivité est claire, la surjectivité provient du lemme (4.17). □

5. Conclusions

(5.1) La question de Drensky et Yu. Nous pouvons maintenant produire un contre-exemple à la question de Drensky et Yu. Dans la section précédente nous avons construit deux isomorphismes :

$$H_{[t]}/_{\langle -Id\rangle} \overset{\sigma}{\mapsto} G_{[t]} \overset{\tau}{\mapsto} \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$$

Notons que $O(3,\mathbb{C})$ est contenu dans l'image de $A_{H,[t]}$ par $\tau\circ\sigma$; de fait $O(3,\mathbb{C})$ est exactement l'image de A_H. D'autre part les automorphismes de type Nagata $\exp(\delta(Q,z).D)$ proviennent des élémentaires de la forme $(u - v\delta(t,-v^2), v) \in E_{H,[t]}$. Nous allons maintenant exhiber un élément de $H_{[t]}$ qui n'est pas dans le groupe engendré par $A_{H,[t]}$ et $E_{H,[t]}$; en appliquant l'isomorphisme $\tau \circ \sigma$ nous obtenons ainsi le contre exemple annoncé. Considérons de nouveau l'exemple N_t de la remarque (4.3). Nous pouvons construire une famille indicée par $\mathbb{N}^*$ d'exemples similaires en posant

$$N_{i,t} = (u - \frac{v^i}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^i}{t}, v).$$

Remarquons que $N_t = N_{2,t}$. De plus pour i impair $N_{i,t}$ est un élément de $H_{[t]}$. Vérifions par exemple que $N_{3,t}$ est un automorphisme à paramètre polynomial :

$$N_{3,t}(u,v) = (u - 3v^2(ut+v^3) - 3vt(ut+v^3)^2 - t^2(ut+v^3)^3, v + t(ut+v^3)).$$

Toute décomposition de $N_{3,t}$ dans $H_{(t)} = A_{H,(t)} *_\cap E_{H,(t)}$ est de la forme :

$$N_{3,t} : (u,v) \mapsto (u - \frac{v^3}{t}, v) \circ s \circ s^{-1} \circ (u, v + t^2 u) \circ s' \circ s'^{-1} \circ (u + \frac{v^3}{t}, v)$$

où $s, s' \in A_{H,(t)} \cap E_{H,(t)}$. Si $s = (\alpha u + \beta v, \gamma v)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}(t)$ et $\alpha\gamma = \pm 1$, alors

$$(u - \frac{v^3}{t}, v) \circ s = (\alpha u + \beta v - \frac{\gamma^3 v^3}{t}, \gamma v)$$

qui admet encore des coefficients non polynomiaux : ou bien t divise γ et α n'est pas polynomial, ou bien t ne divise pas γ et γ^3/t n'est pas polynomial.

Finalement $\tau \circ \sigma(N_{3,t})$ est un contre-exemple à la question de Drensky et Yu. Il serait possible, à l'aide d'un calcul quelque peu fastidieux, d'écrire explicitement cet automorphisme. En effet à partir de l'expression

$$N_{3,t} = (u - \frac{v^3}{t}, v) \circ (u, v + t^2 u) \circ (u + \frac{v^3}{t}, v)$$

on obtient

$$\sigma(N_{3,t}) = (x + 2y\frac{z}{t} - \frac{z^3}{t^2}, y - \frac{z^2}{t}, z) \circ (x, y + t^2 x, z - 2t^2 y - t^4 x) \circ (x - 2y\frac{z}{t} - \frac{z^3}{t^2}, y + \frac{z^2}{t}, z).$$

Il ne reste plus qu'à composer ces 3 automorphismes (on vérifie alors que $\sigma(N_{3,t})$ est bien à coefficients polynomiaux en t) puis à appliquer τ, c'est-à-dire à remplacer t par $y^2 + xz$. On obtient ainsi l'expression de $\tau \circ \sigma(N_{3,t})$ qui est un automorphisme de degré 23.

(5.2) Description de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^3]$. L'identification $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ permet de voir les éléments de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ comme des conjugaisons. En particulier, par un calcul direct on vérifie que pour tout $f = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \in A_{H,(t)}$ on a

$$\tau \circ \sigma(f) : M \mapsto \begin{pmatrix} a(y^2+xz) & b(y^2+xz) \\ c(y^2+xz) & d(y^2+xz) \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a(y^2+xz) & b(y^2+xz) \\ c(y^2+xz) & d(y^2+xz) \end{pmatrix}^{-1}$$

et pour tout $g : (u,v) \mapsto (u + vP(-v^2, t), v) \in E_{H,(t)}$

$$\tau \circ \sigma(g) : M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & P(z, y^2+xz) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & -P(z, y^2+xz) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi à tout $f \in \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ on peut associer une matrice $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}[x,y,z])$ tel que f s'écrive :

$$f : M \mapsto PMP^{-1}$$

(5.3) Description de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$. De manière similaire l'identification $\mathbb{C}^4 \simeq \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ permet d'exprimer facilement la structure de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$. Nous avons vu que l'étude de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}[\mathbb{C}^4]$ se réduit à l'étude de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4]$. En se rappelant la construction de τ et σ, on peut voir facilement que celle-ci peut se faire avec un paramètre polynomial :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : H_{[t_1,t_2]} &\mapsto G_{[t_1,t_2]} \\ \tilde{\tau} : G_{[t_1,t_2]} &\mapsto \mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]_{[t_2]} \end{aligned}$$

tel que $\tilde{\tau}$ soit un isomorphisme et $\tilde{\sigma}$ surjective et de noyau $\langle -Id\rangle$. La proposition (3.7) nous donne un isomorphisme

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{tr,dis}}[\mathbb{C}^4] \simeq H_{[t_1,t_2]}/_{\langle -Id\rangle}$$

Cet isomorphisme s'exprime de la manière suivante. On a

$$H_{[t_1,t_2]} \subset \langle A_{H,(t_1,t_2)}, E_{H,(t_1,t_2)}\rangle.$$

Pour tout $f(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} a(t_1,t_2) & b(t_1,t_2) \\ c(t_1,t_2) & d(t_1,t_2)\end{pmatrix} \in A_{H,(t_1,t_2)}$, et pour tout $g : (u,v) \mapsto (u + vP(-v^2,t_1,t_2), v) \in E_{H,(t_1,t_2)}$ posons

$$\begin{aligned}
\psi(f) : M &\mapsto f\left(\frac{\mathrm{dis}(M)}{4}, \frac{\mathrm{tr}(M)}{2}\right) M f^{-1}\left(\frac{\mathrm{dis}(M)}{4}, \frac{\mathrm{tr}(M)}{2}\right)\\
\psi(g) : M &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & P\left(z, \frac{\mathrm{dis}(M)}{4}, \frac{\mathrm{tr}(M)}{2}\right) \\ 0 & 1\end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & -P\left(z, \frac{\mathrm{dis}(M)}{4}, \frac{\mathrm{tr}(M)}{2}\right) \\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons défini ψ sur $H_{(t_1,t_2)}$, et l'isomorphisme ci-dessus est simplement la restriction de ψ à $H_{[t_1,t_2]}$.

(5.4) Quelques exemples. L'automorphisme de Nagata. Dans le contexte du paragraphe (5.2) l'automorphisme N de Nagata n'est rien d'autre que la conjugaison par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & y^2+xz \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. En effet on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & y^2+xz \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ z & -y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -y^2-xz \\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} y+z(y^2+xz) & x-2y(y^2+xz)-z(y^2+xz)^2 \\ z & -y-z(y^2+xz)\end{pmatrix}$$

Cette manière d'exprimer l'automorphisme de Nagata avait déjà été remarquée par J. Alev et L. Le Bruyn dans [2].

Ecriture matricielle de $\tau\circ\sigma(N_{3,t})$.

Toujours dans le contexte du paragraphe (5.2), nous montrons comment calculer la matrice associée à l'automorphisme $\tau\circ\sigma(N_{3,t})$. Nous commençons par calculer une matrice P_t à coefficients dans $\mathbb{C}[t][x,y,z]$ telle que l'on ait :

$$\sigma(N_{3,t}) : M = \begin{pmatrix} y & x \\ z & -y\end{pmatrix} \mapsto P_t M P_t^{-1}.$$

Aux automorphismes $(u \mp \frac{v^3}{t}, v)$ et $(u, v+t^2u)$ qui entrent dans la décomposition de $N_{3,t}$ correspondent les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm\frac{z}{t} \\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z'}{t} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{t} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+tz & -\frac{z}{t}+\frac{z'}{t}-zz' \\ t^2 & 1-tz\end{pmatrix}$$

où $z' \in \mathbb{C}[t][x,y,z]$ est le coefficient inférieur gauche de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ z & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{z}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule z' :

$$z' = -t^4x + 2t^2y(1-tz) + z(1-tz)^2.$$

En remplaçant t par $y^2 + xz$ dans les coefficients de P_t on obtient une matrice $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}[x,y,z])$ telle que $\tau \circ \sigma(N_{3,t})$ soit la conjugaison par P :

$$\tau \circ \sigma(N_{3,t}) : M \mapsto PMP^{-1}.$$

Un exemple de Freudenburg.

Dans [4] G. Freudenburg étudie un élément de $\mathrm{Aut}_Q[\mathbb{C}^3]$ provenant d'une dérivation localement nilpotente Δ définie par :

$$\Delta(H) = \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$$

où $F = y^2 + xz$ et $G = zF^2 + 2x^2yF - x^5$. Nous allons montrer rapidement comment trouver l'élément de $H_{[t]}$ associé à cet automorphisme. Tout d'abord en remplaçant F par t dans les expressions données par Freudenburg on obtient une dérivation Δ_t satisfaisant :

$$\begin{aligned} \Delta_t(x) &= -2t(x^3 - ty); \\ \Delta_t(y) &= -6x^2(x^3 - ty) - (zt^2 + 2tx^2y - x^5). \end{aligned}$$

On peut vérifier que $\exp(\Delta_t)$ est un élément de $G_{[t]}$ et que $\tau(\exp(\Delta_t)) = \exp(\Delta)$. En remplaçant maintenant (x,y,z) par $(u^2, uv, -v^2)$ on obtient une dérivation d_t de $\mathbb{C}[t][u,v]$:

$$d_t(u^2) = 2ud_t(u) = -2t(u^6 - tuv) \Rightarrow d_t(u) = -t(u^5 - tv);$$

$$d_t(uv) = d_t(u)v + ud_t(v) \Rightarrow d_t(v) = -5u^4(u^5 - tv).$$

On vérifie immédiatement que

$$d_t(u^5 - tv) = 0.$$

Remarquons que cette dérivation d_t peut être définie par la formule :

$$d_t(H) = \frac{1}{2}\frac{\partial(-(u^5 - vt)^2, H)}{\partial(u,v)}.$$

Exprimons maintenant l'automorphisme $\exp(d_t)$. Posons $w = u^5 - tv$; on a $d_t(u) = -tw$ et $d_t(w) = 0$. Ainsi dans les coordonnées (u,w) la dérivation d_t est triangulaire et on a :

$$\exp(d_t) : (u,w) \mapsto (u - tw, w).$$

En revenant dans les coordonnées (u, v) on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp(d_t) : (u,v) \quad \mapsto \quad & (u, \frac{u^5 - v}{t}) \circ (u - tv, v) \circ (u, u^5 - tv) \\
&= (u, v + \frac{u^5}{t}) \circ (u, -\frac{v}{t}) \circ (u - tv, v) \circ (u, -tv) \circ (u, v - \frac{u^5}{t}) \\
&= (u, v + \frac{u^5}{t}) \circ (u + t^2 v, v) \circ (u, v - \frac{u^5}{t})
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\tau \circ \sigma(\exp(d_t)) = \exp(\Delta).$$

L'automorphisme de Freudenburg $\exp(\Delta)$ est de degré 41. L'automorphisme $\exp(d_t)$ n'est plus que de degré 25, et surtout nous avons obtenu une décomposition de ce dernier à l'aide de 3 automorphismes à paramètre rationnel très simples.

Remerciements

Je remercie vivement Dominique Cerveau qui m'a proposé ce problème, ainsi que Cédric Tarquini qui m'a aidé à trouver les résultats exposés dans la troisième partie. Merci également à Marat Gizatullin qui m'a signalé plusieurs imperfections dans la note [8] (voir [5]) auxquelles je me suis efforcé de remédier dans le présent travail.

Received November 13, 2001.

Final version received November 22, 2002.

UNIVERSITÉ LYON 1
INSTITUT GIRARD DESARGUES
21 AVENUE CLAUDE BERNARD
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE
lamy@igd.univ-lyon1.fr

RÉFÉRENCES.

[1] J. ALEV, *A note on Nagata's automorphism*, In A. van den Essen, Ed. Automorphisms of affine spaces (Curaçao), 1995, Kluwer Acad. Publish. (1995), 215–221.

[2] J. ALEV AND L. LE BRUYN, Automorphisms of generic 2 by 2 matrices, In *Perspectives in Ring Theory, 1988.*, 69–83. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, Math. Phys. Sci. **233**, Kluwer Acad. Publish. 1988.

[3] V. DRENSKY AND J.-T. YU, *Exponential automorphisms of polynomial algebras*, Com. Algebra, **26**, (1998), 2977–2985.

[4] G. FREUDENBURG, *Actions of G_a on A^3 defined by homogeneous derivations*, J. Pure Appl. Algebra, **126**, (1998), 169–181.

[5] M.H. GIZATULLIN, Review 2000f :14100, *Mathematical Reviews*.

[6] M.H. GIZATULLIN AND V.I. DANILOV, *Automorphisms of affine surfaces* II, Isz. Akad. Nauk. SSSR, **41** (1977), 51–98.

[7] W. VAN DER KULK, *On polynomial ring in two variables*, Nieuw Arch. Wisk., **1** (1953), 33–41.

[8] S. LAMY, *Les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$ préservant une forme quadratique*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math. **328** (1999), 883–886.

[9] S. LAMY, *Une preuve géométrique du théorème de Jung*, Enseign. Math. **48**, (2002), 291–315.

[10] L. G. MAKAR-LIMANOV, *On group of automorphisms of class of surfaces*, *Israel J. Math.* **69**, (1990), 250–256.

[11] J. H. MCKAY AND S. S. WANG, *An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables*, J. Pure Appl. Algebra, **52** (1988), 91–102.

[12] M. NAGATA, *On the automorphism group of* $k[X,Y]$, Kyoto Univ. Lectures in Math. **5**, Kinukuniya, 1972.

[13] J.-P. SERRE, *Arbres, Amalgames,* SL_2, Astérisque, **46**, SMF, 1977.