Structure de produit amalgamé pour le groupe des automorphismes modérés en dimension 3

Stéphane Lamy

décembre 2006

Préliminaires : automorphismes du plan tangents à l'identité.

Considérons le groupe G des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui fixent l'origine et qui de plus sont tangents à l'identité. Que devient le théorème de Jung - Van der Kulk en restriction à ce groupe ? La réponse n'est pas tout à fait évidente, car en imposant la condition de tangence à l'identité en le point fixe 0 on a éliminé tous les éléments du groupe affine A. Voici la réponse.

Soit $\lambda = [a : b] \in \mathbb{P}^1$, on note E_λ le sous-groupe de G des automorphismes fixant les droites $ax + by = cte$:

$$E_\lambda = \big\{(x + bP(ax + by), y + -aP(ax + by)); P(0) = P'(0) = 0\big\}$$

En particulier, le groupe élémentaire (ou triangulaire) habituel E correspond à $\lambda = [0 : 1]$.

Proposition 1 *Le groupe G des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ fixant l'origine et tangents à l'identité est égal au produit libre des E_λ :*

$$G = *_{\lambda \in \mathbb{P}^1} E_\lambda.$$

Preuve. Le fait que les E_λ engendrent G se voit de la façon suivante. Soit f un élément de G, on le décompose dans le produit amalgamé habituel :

$$f = a_1 e_1 \cdots a_n e_n \text{ avec } a_i \in A, e_i \in E.$$

On peut de plus supposer que chacun des e_i est dans G, c'est à dire de la forme $e_i(x, y) = (x + P(y), y)$ avec $P(0) = P'(0) = 0$ (insérer des éléments de $A \cap E$). On écrit alors :

$$f = (a_1 e_1 a_1^{-1})(a_1 a_2 e_2 a_2^{-1} a_1^{-1})(a_1 a_2 a_3 e_2 a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}) \cdots$$

et chacun des automorphismes entre parenthèses est un élément d'un certain E_λ.

Le fait que le produit des E_λ soit libre revient à dire que toute composition $f = f_n \cdots f_1$ où $f_i \in E_{\lambda_i} \setminus \{id\}$ pour un certain λ_i, avec $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, n'est pas l'automorphisme identité. Or on remarque que tout élément (non trivial) de E_λ envoie toute la droite à l'infini sur le point λ, qui est aussi l'unique point d'indétermination. Ainsi f envoie la droite à l'infini sur λ_n (comme f_n) et ne peut donc être égal à l'identité. $\square$

Relations dans le groupe modéré de Aut$[\mathbb{C}^3]$

On considère les drapeaux (D, p) où D est une droite du plan à l'infini dans $\mathbb{P}^3$ et p est un point de D. On peut aussi penser à D comme à une famille de plans parallèles dans $\mathbb{C}^3$ (D étant alors l'intersection de l'un de ces plans avec le plan à l'infini), et à p comme à une famille de droites parallèles contenues dans ces plans.

Ces drapeaux nous permettent d'indicer une famille de groupes qui vont généraliser le groupe triangulaire. On note $E_{(D,p)}$ le groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$, fixant l'origine et tangent à l'identité, qui préservent le drapeau (D, p), c'est-à-dire qui préservent la famille de plans et la famille de droites associées à (D, p).

Ainsi, en notant $[x : y : z : 0]$ les points du plan à l'infini, si D est la droite $z = 0$ et $p = [1 : 0 : 0 : 0]$ alors $E_{(D,p)}$ est le groupe triangulaire habituel (avec partie linéaire triviale).

Le théorème suivant généralise directement la proposition 1 et montre ainsi que, contrairement à l'opinion courante, il existe bien une structure de produit amalgamé sur les automorphismes modérés en dimension 3 (ce qui pourrait d'ailleurs être vrai en toute dimension ?)

Théorème 1 *Le groupe G des automorphismes modérés de $\mathbb{C}^3$ fixant l'origine et tangents à l'identité est le produit amalgamé des $E_{(D,p)}$ le long de leurs intersections.*

Preuve. Les $E_{(D,p)}$ engendrent G : la preuve est la même qu'en dimension 2. Pour ce qui est des relations, l'affirmation découle du papier de Umirbaev [Doklady Mathematics, Volume 73, Number 2, June 2006]. □

On peut il me semble reformuler l'affirmation du théorème de la façon suivante : soit $f = f_n \cdots f_1$ où chaque f_i appartient à (au moins) un groupe $E_{(D,p)}$. On dit que cette écriture de f est réduite si pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, les automorphismes f_i et f_{i+1} n'appartiennent pas à un même $E_{(D,p)}$. Le théorème affirme que si f admet une telle écriture réduite avec $n \geq 2$, alors f n'est pas l'identité.

Puisque le théorème est démontré, que reste-t-il comme problème ?

Question : *Est-il possible de prouver directement le théorème 1, et d'en déduire une preuve simplifiée du fait que l'automorphisme de Nagata est non modéré ?*