

# Un théorème de Larsen et Lunts

Stéphane Lamy

Notes d'exposé - La Rochelle, mai 2012

## Conventions

- Variété = schéma réduit séparé de type fini (sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0). Par contre typiquement on ne suppose pas nos variétés lisses, complètes, ou irréductibles.
- $K_0[\text{Var}]$  est l'anneau de Grothendieck : c'est le groupe abélien engendré par les classes d'isomorphie de variétés, modulo la relation d'excision (où  $Y \subset X$  est une sous-variété fermée)

$$[X \setminus Y] = [X] - [Y],$$

et muni du produit  $[X] \cdot [Y] := [X \times Y]$ .

- $SB$  est le monoïde multiplicatif des classes des variétés modulo équivalence stablement birationnelle. On note  $[X]_{SB}$  une telle classe. Elles engendrent un anneau que l'on note  $\mathbb{Z}[SB]$ .
- Si  $V$  est une variété, on note  $V^{\text{ns}}$  l'ouvert des points lisses de  $V$ , et  $V^{\text{sing}}$  le lieu singulier de  $V$  : on a donc  $V = V^{\text{ns}} \sqcup V^{\text{sing}}$ .
- Un morphisme d'anneau  $K_0[\text{Var}] \rightarrow A$ , où  $A$  est un anneau commutatif, est appelé une *mesure motivique*. Un exemple est donné (sur  $\mathbb{C}$ , et plus généralement en caractéristique 0) par le polynôme de Hodge  $H_X(u, v) := \sum h^{p,q}(X) u^p v^q \in \mathbb{Z}[u, v]$ , en effet (référence ?)
  - Si  $X = U \cup Z$  avec  $Z$  fermé et  $U = X \setminus Z$ , alors  $H_X = H_U + H_Z$ ;
  - Si  $W = X \times Y$ , alors  $H_W = H_X H_Y$ .

L'objet de ces notes est de prouver l'existence d'une autre mesure motivique, suivant Larsen et Lunts [5]. C'était l'un des ingrédients du papier [4] en collaboration avec Julien Sebag.

## Énoncés

**Théorème 1.** *Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\varphi: K_0[\text{Var}] \rightarrow \mathbb{Z}[SB]$$

*tel que si  $X$  est une variété complète lisse alors  $\varphi([X]) = [X]_{SB}$ .*

**Corollaire 2.** *Soit  $V$  une variété. Alors il existe des variétés complètes lisses  $X_i$  et des entiers  $m_i \in \mathbb{Z}$  tels qu'on ait l'égalité suivante dans  $K_0[\text{Var}]$  :*

$$[V] = \sum_i m_i [X_i].$$

*De plus si  $[V] = \sum_j n_j [Y_j]$  est une autre telle écriture, alors on a autant de  $X_i$  que de  $Y_i$ , et quitte à renuméroter, pour tout  $i$  on a  $m_i = n_i$  et  $[X_i]_{SB} = [Y_i]_{SB}$ .*

**Proposition 3.** *Le noyau du morphisme  $\varphi: K_0[\text{Var}] \rightarrow \mathbb{Z}[SB]$  est l'idéal principal engendré par la classe  $[\mathbb{A}^1]$  de la droite affine.*

## Prérequis

- Le théorème de complétion de Nagata : toute variété  $V$  admet une complétion  $V \hookrightarrow X$  (voir notes de Brian Conrad suivant Deligne).  
Alternativement on peut se restreindre à la catégorie des variétés quasi-projectives.
- Le théorème de désingularisation d'Hironaka (voir Kollar [3] pour une introduction et une preuve moderne).
- Le théorème de factorisation faible des transformations birationnelles ([1], voir [2] pour une introduction).

## Preuve du théorème 1

Pour alléger les notations on notera partout  $\varphi(X)$  au lieu de  $\varphi([X])$ . On montre que  $\varphi$  est bien défini, et est un morphisme, par récurrence sur la dimension des variétés. On pose donc les hypothèses de récurrence (les initiales sont pour Définition, Somme et Produit) :

$(D_n)$  :  $\varphi$  est bien définie en restriction aux (sommations formelles de) classes de variétés de dimension au plus  $n$ .

$(S_n)$  : On suppose  $(D_n)$ , et si  $Y \subset X$  sont des variétés de dimension au plus  $n$ , alors

$$\varphi(X) = \varphi(Y) + \varphi(X \setminus Y).$$

$(P_n)$  : On suppose  $(D_n)$ , et si  $X, Y$  sont des variétés dont la somme des dimensions est au plus  $n$ , alors

$$\varphi(Y \times X) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y).$$

On aura besoin de plusieurs lemmes. Tout d'abord concernant le comportement sous éclatement :

**Lemme 4.** Soit  $n \geq 2$ . On suppose  $(S_{n-1})$  et  $(P_{n-1})$ . Soient  $U$  une variété lisse de dimension  $n$ ,  $X$  une complétion lisse de  $U$ , et  $\pi: Y \rightarrow X$  l'éclatement d'une sous-variété lisse  $Z \subset X \setminus U$ . En particulier  $Y$  est également une complétion lisse de  $U$ . Alors

$$\varphi([Y \setminus U]) = \varphi([X \setminus U]).$$

*Preuve.* Le diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(Z)$  est un fibré localement trivial de fibre  $\mathbb{P}^{d-1}$  au-dessus de  $Z$ , où  $d$  est la codimension de  $Z$  dans  $X$ . Ainsi, en utilisant  $(P_{n-1})$ , on voit que dans l'anneau  $K_0[\text{Var}]$  on a  $[\pi^{-1}(Z)] = [Z] \cdot [\mathbb{P}^{d-1}]$ . De plus on a

$$\begin{aligned} [X \setminus U] &= [(X \setminus U) \setminus Z] + [Z] \\ [Y \setminus U] &= [(Y \setminus U) \setminus \pi^{-1}(Z)] + [\pi^{-1}(Z)] \end{aligned}$$

avec  $(X \setminus U) \setminus Z \cong (Y \setminus U) \setminus \pi^{-1}(Z)$ . Ainsi, l'hypothèse  $(S_{n-1})$  fournit les égalités

$$\begin{aligned} \varphi([Y \setminus U]) &= \varphi([(Y \setminus U) \setminus \pi^{-1}(Z)] + [\pi^{-1}(Z)]) \\ &= \varphi\left([(X \setminus U) \setminus Z] + [Z] \cdot [\mathbb{P}^{d-1}]\right) \\ &= \varphi([(X \setminus U) \setminus Z]) + \varphi([Z]) \\ &= \varphi([X \setminus U]). \end{aligned}$$

□

Concernant la compatibilité multiplicative de  $\varphi$  :

**Lemme 5.** Soit  $n \geq 1$ . On suppose  $(P_{n-1})$ ,  $(D_n)$  et  $(S_n)$ . Soient  $V \hookrightarrow X$ ,  $W \hookrightarrow Y$  des immersions telles que  $\dim X \times \dim Y = n$ , et  $\dim X \setminus V < \dim X$ ,  $\dim Y \setminus W < \dim Y$ . Alors

$$\varphi(X \times Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y) \iff \varphi(V \times W) = \varphi(V) \cdot \varphi(W)$$

*Preuve.* On écrit  $X = V \sqcup (X \setminus V)$  et  $Y = W \sqcup (Y \setminus W)$ . On a donc

$$X \times Y = V \times W \sqcup V \times (Y \setminus W) \sqcup (X \setminus V) \times W \sqcup (X \setminus V) \times (Y \setminus W);$$

et l'hypothèse  $(S_n)$  donne alors les deux égalités

$$\begin{aligned} \varphi(X) \cdot \varphi(Y) &= \varphi(V) \cdot \varphi(W) \\ &\quad + \varphi(V) \cdot \varphi(Y \setminus W) + \varphi(X \setminus V) \cdot \varphi(W) + \varphi(X \setminus V) \cdot \varphi(Y \setminus W); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X \times Y) &= \varphi(V \times W) \\ &\quad + \varphi(V \times (Y \setminus W)) + \varphi((X \setminus V) \times W) + \varphi((X \setminus V) \times (Y \setminus W)).\end{aligned}$$

Les trois derniers termes de chaque somme sont égaux deux à deux, d'après  $P_{n-1}$ . On en déduit l'équivalence attendue.  $\square$

Si  $X$  est de dimension 0, autrement dit  $X$  est une union disjointe de  $d$  points, alors  $\varphi(X) = d$ , et  $(D_0)$ ,  $(P_0)$  et  $(P_0)$  sont clairement vérifiés.

Supposons maintenant  $(S_{n-1})$  et  $(P_{n-1})$  et montrons successivement  $(D_n)$ ,  $(S_n)$  et  $(P_n)$ .

**Définition.** Tout d'abord si  $U$  est une variété lisse de dimension  $n$  avec composantes irréductibles  $U_i$  (nécessairement deux à deux disjointes), alors pour tout choix de complétions lisses  $X_i$  des  $U_i$  on pose

$$\varphi(U) = \sum [X_i]_{SB} - \sum \varphi(X_i \setminus U_i)$$

Montrons que ceci définit  $\varphi(U)$  sans ambiguïté : il s'agit de voir qu'un autre choix de complétion ne change pas le résultat. On peut supposer  $U$  irréductible, et  $X, X'$  deux complétions lisses de  $U$ . Il s'agit de voir que

$$[X]_{SB} - \varphi(X \setminus U) = [X']_{SB} - \varphi(X' \setminus U)$$

Par construction  $X$  et  $X'$  sont birationnelles, *a fortiori* elles sont stablement birationnelles, il s'agit donc finalement de prouver

$$\varphi(X \setminus U) = \varphi(X' \setminus U).$$

Pour  $n = 1$  c'est immédiat, et pour  $n \geq 2$  cela découle du théorème de factorisation faible, couplé à une application répétée du lemme 4.

Maintenant, pour une variété arbitraire  $V$ , si  $V^{\text{sing}}$  désigne le lieu singulier de  $V$  (qui est une sous-variété de dimension strictement inférieure), et  $V^{\text{ns}} := V \setminus V^{\text{sing}}$ , alors par l'étape précédente et l'hypothèse de récurrence la définition suivante fait sens :

$$\varphi(V) = \varphi(V^{\text{ns}}) + \varphi(V^{\text{sing}}). \quad (1)$$

Il reste à montrer que  $\varphi$  ainsi défini est compatible avec la somme et le produit.

**Somme.** Si  $W$  est une sous-variété fermée de  $V$ , avec  $\dim V = n$ , on veut montrer

$$\varphi(V) = \varphi(V \setminus W) + \varphi(W).$$

Traitons tout d'abord le cas où  $V$  est lisse. On peut supposer  $V$  irréductible, et  $\dim W < \dim V$ . On considère  $X$  une complétion lisse de  $V$ . Par définition on a

$$[X]_{SB} = \varphi(V) + \varphi(X \setminus V). \quad (2)$$

Mais  $X$  est aussi une complétion de  $V \setminus W$ , et  $X \setminus (V \setminus W) = (X \setminus V) \sqcup W$ , on a donc

$$\begin{aligned} [X]_{SB} &= \varphi(V \setminus W) + \varphi(X \setminus (V \setminus W)) \\ &= \varphi(V \setminus W) + \varphi(X \setminus V) + \varphi(W) \end{aligned} \quad (3)$$

Par différence de (2) et (3), on obtient bien  $\varphi(V) = \varphi(V \setminus W) + \varphi(W)$ .

Maintenant traitons le cas où  $V$  est une variété arbitraire de dimension  $n$ . On pose  $U = V \setminus W$ . On a  $U^{\text{ns}} = V^{\text{ns}} \cap U$  et  $U^{\text{sing}} = V^{\text{sing}} \cap U$ ; et donc  $V^{\text{ns}} = U^{\text{ns}} \sqcup (V^{\text{ns}} \cap W)$ .

On a (les premières et deuxième égalités proviennent de la définition (1), la seconde égalité du cas lisse traité ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \varphi(V) &= \varphi(U^{\text{ns}}) + \varphi(V^{\text{ns}} \cap W) + \varphi(V^{\text{sing}}) \\ &= \varphi(U) - \varphi(U^{\text{sing}}) + \varphi(V^{\text{ns}} \cap W) + \varphi(V^{\text{sing}}) \\ &= \varphi(U) - \varphi(U^{\text{sing}}) + \varphi(V^{\text{ns}} \cap W) + \varphi(V^{\text{sing}}) \end{aligned}$$

Donc montrer que  $\varphi(V) = \varphi(U) + \varphi(W)$  revient à montrer

$$\varphi(W) = -\varphi(U^{\text{sing}}) + \varphi(V^{\text{ns}} \cap W) + \varphi(V^{\text{sing}}).$$

Comme  $V^{\text{sing}} = U^{\text{sing}} \sqcup (V^{\text{sing}} \cap W)$  et  $\dim V^{\text{sing}} \leq n-1$ , l'hypothèse  $(S_{n-1})$  donne

$$\varphi(V^{\text{sing}}) = \varphi(U^{\text{sing}}) + \varphi(V^{\text{sing}} \cap W).$$

On est donc ramené à montrer la propriété de sommation sur  $W$  :

$$\varphi(W) = \varphi(V^{\text{ns}} \cap W) + \varphi(V^{\text{sing}} \cap W).$$

Si  $\dim W < \dim V$  c'est gagné, et on se ramène à ce cas par noetherianité (récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de  $V$ ).

**Produit.** Supposons que  $V, W$  soit deux variétés avec  $\dim V \times W = n$ , on veut montrer

$$\varphi(V \times W) = \varphi(V) \cdot \varphi(W).$$

On considère  $V^{\text{ns}} \hookrightarrow V$  et  $W^{\text{ns}} \hookrightarrow W$ , et par le lemme 5 il suffit de montrer que  $\varphi(V^{\text{ns}} \times W^{\text{ns}}) = \varphi(V^{\text{ns}}) \cdot \varphi(W^{\text{ns}})$ .

Pour cela considérons  $V^{\text{ns}} \hookrightarrow X, W^{\text{ns}} \hookrightarrow Y$  des complétions lisses. Comme  $\varphi(X \times Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$ , le lemme 5 donne  $\varphi(V^{\text{ns}} \times W^{\text{ns}}) = \varphi(V^{\text{ns}}) \cdot \varphi(W^{\text{ns}})$ .

## Preuve des corollaire 2 et proposition 3

*Preuve du corollaire 2.*

**Existence.**

Soit  $V$  une variété. En écrivant  $V = V^{\text{ns}} \sqcup V^{\text{sing}}$ , et en raisonnant par récurrence sur la dimension de  $V$ , on peut écrire  $V$  comme une union disjointe de variétés lisses.

Par ailleurs si  $U$  est lisse et  $U \hookrightarrow X$  est une complétion lisse, on a  $[U] = [X] - [X \setminus U]$ , avec  $\dim X \setminus U < \dim X$ .

**Unicité.** On applique le morphisme  $\varphi$  à l'égalité

$$\sum_i m_i [X_i] = \sum_j n_j [Y_j]$$

pour obtenir

$$\sum_i m_i [X_i]_{SB} = \sum_j n_j [Y_j]_{SB}$$

dans  $\mathbb{Z}[SB]$ . Le résultat en découle.  $\square$

*Preuve de la proposition 3.* Tout d'abord comme  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \sqcup \text{pt}$ , on a

$$\varphi(\mathbb{A}^1) = \varphi(\mathbb{P}^1) - \varphi(\text{pt}) = [\mathbb{P}^1]_{SB} - [\text{pt}]_{SB} = 0.$$

Supposons maintenant que  $a \in \ker \varphi$ , on cherche à montrer que  $a$  est dans l'idéal engendré par  $[\mathbb{A}^1]$ . Par le corollaire 2 on peut exprimer  $a$  comme une combinaison

$$a = [X_1] + \cdots + [X_k] - [Y_1] - \cdots - [Y_l],$$

où les  $X_i, Y_j$  sont lisses et complètes. En appliquant  $\varphi$  on obtient

$$[X_1]_{SB} + \cdots + [X_k]_{SB} = [Y_1]_{SB} + \cdots + [Y_l]_{SB}.$$

On en déduit que  $l = k$ , et quitte à renuméroter  $X_i$  et  $Y_i$  sont stablement birationnelles pour tout  $i$ .

On se ramène ainsi à montrer que si  $X, Y$  sont lisses complètes et stablement birationnelles alors  $[Y] - [X]$  est dans l'idéal engendré par  $[\mathbb{A}^1]$ . Comme  $[X \times \mathbb{P}^k] - [X] = [X] \cdot [\mathbb{A}^1 + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^k]$ , on peut en fait supposer  $X$  et  $Y$  birationnelles. Par le théorème de factorisation faible, il suffit de traiter le cas où  $Y$  est l'éclatement de  $X$  le long d'une sous-variété  $Z$  lisse, avec diviseur exceptionnel  $E$ . D'une part  $[E] = [Z] \cdot [\mathbb{P}^{d-1}]$  où  $d$  est la codimension de  $Z$ , d'autre part l'isomorphisme  $Y \setminus E \cong X \setminus Z$  donne l'égalité  $[Y] - [E] = [X] - [Z]$ . On a donc

$$[Y] - [X] = [E] - [Z] = [\mathbb{A}^1 + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^{d-1}] \cdot [Z] \in ([\mathbb{A}^1]),$$

ce qu'on voulait.  $\square$

## Une conséquence

**Proposition 6** (voir proposition 6 dans [6]). *Soient  $X, Y$  des variétés de même classe dans  $K_0[\text{Var}]$ . Supposons  $\dim X \leq 1$ . Alors  $X$  et  $Y$  sont isomorphes par morceaux.*

*Preuve.* Tout d'abord on utilise la mesure motivique donnée par le polynôme de Hodge (cf introduction) : puisque  $[X] = [Y]$  dans  $K_0[\text{Var}]$  on a  $H_X = H_Y$ , en particulier  $\dim Y = \dim X$ , et  $X, Y$  ont le même nombre  $s \geq 0$  de composantes irréductibles de dimension 1.

Notons  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s$  et  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_s$  des modèles projectifs lisses de ces composantes; l'égalité  $[X] = [Y]$  se traduit en

$$\sum_{i=1}^s [\bar{X}_i] = \sum_{i=1}^s [\bar{Y}_i] + m$$

pour un certain  $m \in \mathbb{Z}$ . En appliquant le morphisme  $\phi$  du théorème 1 on conclut que  $m = 0$ , et que quitte à renuméroter  $\bar{X}_i$  et  $\bar{Y}_i$  sont stablement birationnelles, donc isomorphes, pour tout  $i$ . Ainsi  $X_i$  et  $Y_i$  sont birationnelles pour tout  $i$ , et il existe des ouverts  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$  tels que  $U \cong V$  et  $X \setminus U, Y \setminus V$  consiste en un nombre fini de points. De plus comme  $[X \setminus U] = [Y \setminus V]$ , on conclut que ce nombre de points est le même.  $\square$

Remarque : Il me semble que pour cette preuve on n'a besoin seulement que  $\phi$  soit bien définie sur les variétés de dimension  $\leq 1$ , ce qui est plus facile à établir que le théorème général (pas besoin du théorème de factorisation faible, ni du théorème de complétion...).

## Références

- [1] Abramovich D., Karu K., Matsuki K. et Włodarczyk J. – Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 15, n3, 2002, pp. 531–572.
- [2] Bonavero L. – Factorisation faible des applications birationnelles (d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli). *Astérisque*, no282, 2002. – Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.
- [3] Kollár J. – *Lectures on resolution of singularities*. – Princeton, NJ, Princeton University Press, 2007, *Annals of Mathematics Studies*, volume 166.
- [4] Lamy S. et Sebag J. – Birational self-maps and piecewise algebraic geometry. *Preprint arXiv:1112.5706*, 2011.
- [5] Larsen M. et Lunts V. A. – Motivic measures and stable birational geometry. *Mosc. Math. J.*, vol. 3, n1, 2003, pp. 85–95, 259.
- [6] Liu Q. et Sebag J. – The Grothendieck ring of varieties and piecewise isomorphisms. *Math. Z.*, vol. 265, n2, 2010, pp. 321–342.