

numéro
d'ordre :
33-2010

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présenté devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

par

Stéphane LAMY

spécialité : mathématiques

Groupes de transformations birationnelles de surfaces

Soutenu le 8 octobre 2010 devant le jury composé de

M. Michel BRION (rapporteur)
M. Etienne GHYS (rapporteur)
Mme. Lucy MOSER-JAUSLIN
M. Miles REID (rapporteur)
M. Bertrand RÉMY
M. Mikhail ZAIDENBERG

Lorsque je décidai de suivre durant l'automne 2003 un cours de 3ème cycle par Etienne Ghys sur les groupes aléatoires, je n'étais motivé que par de vagues raisons de culture générale... A posteriori, il est probable que sans ce cours je n'aurais pu parvenir aux résultats présentés dans le troisième chapitre. Merci donc à Etienne pour l'inspiration, et pour avoir accepté de rapporter sur ce mémoire.

Le soutien de Miles Reid a été décisif pour le succès de ma demande de financement Marie Curie, grâce auquel je séjourne pour deux ans à l'Université de Warwick. Ce mémoire, ainsi que l'article [9], ont été écrits durant ma première année de détachement, où j'ai pu profiter de l'environnement sans pareil du Mathematics Institute. Merci redoublés à Miles qui a bien voulu rapporter sur les 66 pages de français serré de ce mémoire, et qui a également accepté de participer au jury. J'espère que la qualité du Saint-Joseph aura justifié le déplacement.

Après de premières années où je publiais seul, je finis par me rendre compte que les collaborations étaient à la fois plus amusantes et plus efficaces. Merci donc à mes coauteurs Serge Cantat, Adrien Dubouloz et Jean-Philippe Furter. Ces deux derniers font partie du groupe de travail itinérant « Automorphismes des Espaces Affines », qui a été une grande source de stimulation ces dernières années. Lucy Moser-Jauslin et Mikhail Zaidenberg, également des habitués des séances de ce groupe de travail, ont bien voulu participer à mon jury ; je les en remercie. Merci également à Michel Brion qui a accepté d'être rapporteur, ainsi qu'à Bertrand Rémy qui me fait l'amitié de faire partie du jury.

J'ai une pensée amicale pour tous mes collègues de l'ICJ, et plus particulièrement pour le noyau dur du Séminaire de Géométrie : je veux parler de mes camarades extrémistes de la cafétéria Jussieu, Damien Gayet et Vincent Borrelli.

La rareté (j'espère) des coquilles dans le mémoire est pour une bonne part due à Julie Déserti, qui m'en a signalé une longue collection après avoir lu une première version.

Last but not least, thanks to Toni, Luna and Naoki for coping with life in Coventry (the not so Hawaiian weather, the not so French food and the not so American accent of most inhabitants...) while I was busy working on my « fun calculations ».

Table des matières

Liste des travaux présentés	4
Introduction	5
1 Géométrie birationnelle et factorisation d'automorphismes	8
1.1 Complémentaire d'une conique dans \mathbb{P}^2	10
1.1.1 Le lemme clé	10
1.1.2 Deux sous-groupes naturels	11
1.1.3 Les sous-groupes $O_3(k)$ et E_C engendrent $\text{Aut}(V)$	13
1.1.4 La structure de produit amalgamé	14
1.1.5 Une question en dimension supérieure	15
1.2 Programme de Sarkisov	16
1.2.1 Divers algorithmes	16
1.2.2 Générateurs et relations	18
1.2.3 Pas de miracle en dimension supérieure	19
1.3 Relations dans le groupe de Cremona	21
2 Sous-groupes d'automorphismes du plan	26
2.1 L'arbre de Bass-Serre	29
2.2 Dynamique des sous-groupes paraboliques	30
2.2.1 Bref retour sur ma thèse	30
2.2.2 Courant invariant pour un groupe parabolique	32
2.3 Digressions	36
2.3.1 Transformations réversibles	36
2.3.2 Groupes de torsion	37
2.3.3 Produits amalgamés	37
2.4 Plongements de réseaux	39
2.4.1 Résumé des résultats	39
2.4.2 Un nouvel exemple de plongement	40

3	Construction de sous-groupes normaux	44
3.1	Diagrammes de van Kampen et petite simplification	46
3.1.1	Diagrammes	46
3.1.2	Petite simplification	49
3.1.3	La relation secondaire d'Iskovskikh	51
3.2	Automorphismes unimodulaires du plan	53
3.3	Critère de non-simplicité	54
3.3.1	Rigidité sur le demi-plan de Poincaré	55
3.3.2	Non-simplicité du groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$	56
3.3.3	Groupes agissant sur un arbre	58
	Bibliographie	64

Liste des travaux présentés

[31] *Dynamique des groupes paraboliques d'automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2* , Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 32, 2, p. 185-212, 2001.

[33] *Une preuve géométrique du théorème de Jung*, L'Enseignement Mathématique, vol. 48, 3-4, p. 291-315, 2002.

[34] *Automorphismes polynomiaux préservant une action de groupe*, Boletín Sociedad Matemática Mexicana, vol. 9, 1, p. 1-19, 2003.

[35] *Sur la structure du groupe d'automorphismes de certaines surfaces affines*, Publicacions Matemàtiques, vol. 49, 1, p. 3-20, 2005.

[8] *Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan* (avec Serge Cantat), Geometriae Dedicata, vol. 123, p. 201-221, 2006.

[17] *Variations on the log Sarkisov program for surfaces* (avec Adrien Dubouloz), preprint arXiv :0802.2441, soumis, 2008.

[21] *Normal subgroup generated by a plane polynomial automorphism* (avec Jean-Philippe Furter), Transformation Groups, à paraître, 2010.

[9] *Normal subgroups of the Cremona group* (avec Serge Cantat), preprint, 2010.

Introduction

Le Grand-Père de tous les groupes étudiés dans ce mémoire est le groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$, ou groupe des transformations birationnelles du plan projectif. Ce groupe contient le groupe algébrique PGL_3 , correspondant aux automorphismes biréguliers de \mathbb{P}^2 , et un théorème classique attribué à Max Noether [40] affirme qu'en ajoutant une transformation quadratique on obtient un système de générateurs :

Théorème 1. *Le groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$, où k est un corps algébriquement clos, est engendré par $\text{PGL}_3(k)$ et par l'involution quadratique standard*

$$\sigma: [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy].$$

Ce résultat peut donner la fausse impression que le groupe de Cremona n'est pas très loin d'être un groupe algébrique. Pour dissiper tout malentendu, et donner une idée de la complexité de ce groupe, considérons la construction suivante.

Notons tout d'abord que le groupe additif $k[T]$ s'injecte dans $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$, via le morphisme qui à un polynôme $P(T)$ associe la transformation $(x, y) \rightarrow (x + P(y), y)$, laquelle est un élément de $\text{Bir}(\mathbb{A}_k^2) = \text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$. Notons G l'image de ce morphisme. Considérons maintenant les transformations $a_\lambda: (x, y) \rightarrow (\lambda x + y, x)$, où $\lambda \in k$, et notons G_λ le conjugué du groupe G par a_λ . Si $\lambda \neq \mu$, il n'est pas difficile de voir que le groupe engendré par G_λ et G_μ dans $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est isomorphe au produit libre de ces deux sous-groupes¹. On voit ainsi que le groupe de Cremona contient le produit libre d'autant de copies du groupe abélien libre infini G que le cardinal de k (typiquement non dénombrable). En fait, on a obtenu cette construction dans le « petit » sous-groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine :

$$\ast_{\lambda \in k} G_\lambda \subset \text{Aut}(\mathbb{A}_k^2) \subset \text{Bir}(\mathbb{P}_k^2).$$

Mentionnons encore deux sous-groupes de $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$, qui ne sont plus polynomiaux : on peut injecter $\text{PGL}_2(k(T))$, ou $\text{PGL}_2(k) \times \text{PGL}_2(k)$ dans le groupe de

¹ Utiliser l'argument décrit au §1.1.4.

Cremona en considérant respectivement les transformations :

$$(x, y) \dashrightarrow \left(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, y \right) \quad \text{et} \quad (x, y) \dashrightarrow \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'} \right).$$

Une relation qui ne provient pas des relations à l'intérieur d'un des sous-groupes déjà mentionnés est

$$(y, x) \circ \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right) \circ (y, x) \circ \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right) \circ (y, x) \circ \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right) = \text{id}.$$

Un résultat d'Iskovskikh, dont il sera question au §1.3, affirme que toutes les relations dans le groupe de Cremona se ramènent essentiellement à celle-ci. Mais à nouveau, ce résultat n'implique pas, par exemple, qu'il est facile de comprendre les sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Au delà des involutions de Bertini et Geiser, certes classiques mais qui ne se déduisent pas trivialement de la présentation par générateurs et relations mentionnée ci-dessus, il existe toute une zoologie des sous-groupes finis de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ dont l'étude a fait l'objet de travaux récents, par exemple par Dolgachev et Iskovskikh [16] ou Blanc [4].

L'idée autour de laquelle gravitent tous mes travaux est la suivante : étant donnée V une surface rationnelle quasi-projective, la géométrie birationnelle permet de comprendre la structure du groupe $\text{Aut}(V)$, vu comme un sous-groupe du groupe de Cremona. L'instance la plus fameuse est le cas $V = \mathbb{A}^2$, où l'on peut via des techniques géométriques retrouver la classique présentation par générateurs et relations de $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$, qui s'exprime en termes de structure de produit amalgamé. Dans le premier chapitre j'illustre la méthode élémentaire utilisée dans [33, 35] en traitant au §1.1 le cas du complément d'une conique dans le plan projectif. Je discute ensuite au §1.2 du point de vue plus sophistiqué du programme de Sarkisov, abordé dans l'article [17] co-écrit avec A. Dubouloz, et qui permet d'étudier des surfaces plus générales.

Armé de la connaissance de cette structure algébrique on peut étudier de façon fine les sous-groupes de $\text{Aut}(V)$. Le deuxième chapitre discute de résultats dans cette direction, concernant le plan affine réel ou complexe. D'une part dans le §2.2 je traite de questions de nature dynamique, et décris comment dans l'article [31] j'ai pu transposer les techniques d'analyse complexe utiles dans l'étude des applications de Hénon au cas des groupes dits paraboliques, qui sont certains groupes de torsion dans $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$. D'autre part dans le §2.4 je discute de la question du plongement de certains réseaux, tels les groupes fondamentaux de surfaces compactes, que j'ai étudié dans [8] en collaboration avec S. Cantat.

Dans un troisième chapitre je présente deux articles concernant la construction de sous-groupes normaux. Ici un ingrédient nouveau apparaît : la théorie de la petite simplification. Dans l'article [21], J.-P. Furter et moi-même raffinons un résultat de Danilov concernant la non-simplicité du groupe dérivé de $\text{Aut}(\mathbb{A}^2)$. Dans un article récent [9] en collaboration avec S. Cantat, nous résolvons le problème analogue pour le groupe de Cremona. Il est intéressant de noter que la philosophie esquissée ci-dessus est dans ce second cas court-circuitée. En effet, si la géométrie permet à nouveau de donner une présentation par générateurs et relations du groupe de Cremona (voir §1.3), ce n'est plus une telle présentation qui permet d'exhiber des sous-groupes normaux. Ici l'argument géométrique consiste à faire agir le groupe de Cremona sur la limite inductive des groupes de Néron-Severi de toutes les surfaces dominant \mathbb{P}^2 (le « bubble space » de Manin) ; c'est ensuite à la théorie de la petite simplification de s'adapter à ce nouveau contexte...

Chacun des trois chapitres débute par une introduction qui en présente plus en détail le contenu. J'ai essayé de présenter mes travaux en adoptant un point de vue qui éclaire les articles originaux. Ceci se résume parfois à décrire le contenu de l'article en des termes (autant que possible) neufs, mais peut aussi consister à

- Traiter un cas qui avait été laissé de côté : automorphismes du complément d'une conique, §1.1 ;
- Produire un exemple inédit : automorphisme de \mathbb{C}^3 admettant une factorisation de Sarkisov non propre, §1.2.3 ; nouveau plongement du groupe fondamental de la surface de genre 2 dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$, §2.4.2 ;
- Compléter un défaut de littérature : définitions équivalentes de la condition $C'(\lambda)$ dans le cas d'un produit amalgamé, §3.1 ; rustine sur une preuve due à Iskovskikh, §1.3 et §3.1.3 ;
- Donner une preuve complète dans un cas particulier éclairant : preuve du critère de non-simplicité pour un groupe agissant sur un arbre, §3.3.

Par ailleurs, plutôt que de rassembler les diverses questions qui me venaient à l'esprit dans une section « perspective » un peu artificielle, j'ai préféré les insérer au fil du texte dans leur contexte naturel.

Un mot sur les notations : j'abandonne la notation $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$, remontant à Friedland et Milnor [20] et utilisée dans la plupart de mes papiers pour noter le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . J'utilise à la place l'une des deux notations $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, en particulier pour les questions de nature dynamique, ou plus souvent $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$, en particulier dans un contexte relevant de la géométrie algébrique (et bien sûr des notations analogues lorsque \mathbb{C} est remplacé par un corps k arbitraire).

Chapitre 1

Géométrie birationnelle et factorisation d'automorphismes

Introduction

Les trois articles [33, 35] et [17] s'intéressent à la question suivante : comment la géométrie birationnelle permet-elle de retrouver une présentation naturelle pour le groupe des automorphismes d'une surface quasi-projective V ?

Dans l'article [33], je considère le cas où V est le plan affine, et retrouve une preuve du théorème classique de Jung, van Der Kulk et Nagata¹.

Théorème 2 ([26, 47, 39]). *Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ des automorphismes du plan affine (sur un corps arbitraire k) admet une structure de produit amalgamé :*

$$\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2) = A *_S E,$$

où

$$A = \{(\alpha x + \beta y + \gamma, \delta x + \varepsilon y + \zeta); \alpha, \dots, \zeta \in k, \alpha\varepsilon - \beta\delta \neq 0\}$$

est le sous-groupe des automorphismes affines,

$$E = \{(\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta, \gamma \in k, \alpha\beta \neq 0, P \in k[y]\}$$

est le sous-groupe des automorphismes triangulaires (ou élémentaires), et

$$S = A \cap E.$$

¹ Jung a le premier montré que les sous-groupes affine et triangulaire engendraient $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$; van der Kulk a donné une preuve valable sur tout corps et une liste des relations ; Nagata a donné une nouvelle preuve géométrique et a remarqué que les relations correspondaient à une structure de produit amalgamé.

Difficile de prétendre à une quelconque originalité au vu du nombre impressionnant de preuves existant dans la littérature (voir l'introduction de [33]) : disons que mon but était de donner une preuve qui, tout en étant valable sur n'importe quel corps, soit la plus élémentaire possible. En particulier, je n'étais pas convaincu que l'argument par récurrence sur le degré, présent dans pratiquement toutes les preuves, soit l'approche la plus naturelle d'un point de vue géométrique. De fait, en utilisant seulement la théorie de l'intersection sur les surfaces projectives, qui peut être introduite de façon rigoureuse sans recours à des outils sophistiqués (voir par exemple Shafarevich [43, IV.1]), j'ai pu obtenir une preuve qui procède par récurrence sur le nombre de points bases. En particulier j'évite de considérer les singularités à l'infini du système homaloïdal (c'était le point de vue de Nagata).

L'article [35] est issu de la réalisation que la technique utilisée dans le cas du plan affine pouvait s'étendre au cas d'autres surfaces, et que je pouvais ainsi retrouver des preuves géométriques de résultats existant dans la littérature, jusque là avec des preuves purement algébriques. Ainsi je traite le cas d'une quadrique affine (correspondant à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ privé d'une diagonale, c'est-à-dire une courbe lisse de bidegré $(1, 1)$), retrouvant un résultat de Makar-Limanov [37]. J'étais spécialement intéressé, dans l'optique d'un autre projet (l'article [34], dont je parle brièvement dans l'introduction du chapitre 2), par une preuve valable sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(t)$, le papier de Makar-Limanov n'étant pas très clair sur le cas d'un corps non algébriquement clos. Je traite également le cas de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ privé d'une fibre, retrouvant ainsi un résultat de Nagao [38] concernant le groupe $\mathrm{GL}_2(k[t])$. J'avais pris connaissance de ce résultat dans le livre de Serre [42] et avais été intrigué par l'analogie avec l'énoncé de Jung : il semblait esthétiquement satisfaisant d'avoir une preuve identique pour ces deux énoncés.

Au moment de la publication de ce papier j'avais conscience qu'un autre cas tombait naturellement sous la même technique, à savoir le groupe des automorphismes du complément d'une conique dans \mathbb{P}^2 . Mais au contraire des deux cas précédents je ne savais le relier à aucun autre résultat connu, aussi je ne le rédigeai pas. Récemment j'ai réalisé que c'était un cas intéressant du point de vue du programme de Sarkisov, dont je parlerai au § 1.2, et de possibles généralisations en dimension supérieure (voir § 1.1.5). Je me propose donc d'illustrer la méthode utilisée dans [33, 35] en traitant dans la section 1.1 le cas du complément d'une conique.

L'article [17] en collaboration avec Adrien Dubouloz est issu de diverses problématiques. La stratégie précédente s'appuie sur le fait que les surfaces affines considérées (plan affine, quadrique affine ou complément d'une conique) se « souviennent » de la compactification d'où elles proviennent. Par exemple, si S est la compactification d'une quadrique affine par une seule courbe lisse, alors

$S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Une autre propriété est que le groupe des automorphismes biréglis de la compactification (par exemple PGL_3 pour \mathbb{P}^2) agit transitivement sur la courbe de bord. Ces deux propriétés cessent d'être vraies pour des surfaces affines plus générales, obtenues en considérant le complément d'une section ample dans une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n . Une première motivation était de chercher à obtenir une description du groupe des automorphismes d'une telle surface, en cherchant à simplifier les résultats produits par Danilov et Gizatullin [22]. Une autre motivation provient de la dimension supérieure. Il existe un algorithme, dit programme de Sarkisov, qui produit une factorisation en liens « élémentaires » pour toute transformation birationnelle de \mathbb{P}^3 (et en fait pour une classe bien plus large de variétés, en toute dimension). Malheureusement, il n'est pas clair comment exploiter ces techniques dans une situation affine. J'explique dans la section 1.2 les problèmes que l'on rencontre, dès la dimension 2, lorsqu'on cherche à décrire le groupe des automorphismes d'une surface affine à partir d'un algorithme de type Sarkisov. J'expose comment nous avons pu remédier à cette situation dans le cas des surfaces. Nous en déduisons une présentation raisonnablement agréable du groupe des automorphismes du complément d'une section dans une surface de Hirzebruch. Je termine cette section avec quelques commentaires sur le cas de la dimension 3.

La description des relations entre les générateurs du groupe de Cremona donnée par le théorème de Noether est un résultat comparativement récent, remontant aux années 1980. Gizatullin [23] d'abord, puis Iskovskikh [25] sous une forme simplifiée, donnent des systèmes complets de relations. Leur technique est dans la même ligne d'idées que les résultats présentés dans ce chapitre. J'expose dans la section 1.3 l'argument d'Iskovskikh, qui demande à être complété : ceci sera fait dans le chapitre 3.

1.1 Complémentaire d'une conique dans \mathbb{P}^2

Notons C la conique d'équation $y^2 - xz = 0$ dans \mathbb{P}^2 , définie sur un corps algébriquement clos, et soit V le complément de C dans \mathbb{P}^2 . Dans cette section je prouve que le groupe $\mathrm{Aut}(V)$ est un produit amalgamé non trivial.

1.1.1 Le lemme clé

La clé de l'argument est résumée dans le lemme suivant, prouvé initialement dans le contexte du plan affine dans [33, Lemme 9], mais valable en fait pour une large classe de surfaces. Nous l'appliquerons à $S = \mathbb{P}^2$.

Lemme 3. Soient V une surface quasi-projective, S une compactification lisse de V telle que $S \setminus V$ soit une courbe irréductible C , X une autre compactification lisse de V , et $g: X \dashrightarrow S$ une transformation birationnelle induisant un automorphisme de V . Nous supposons de plus que g n'est pas un morphisme. Alors

- (1) g admet un unique point base propre² p_1 , situé sur $X \setminus V$;
- (2) les éventuels autres points base de g peuvent être ordonnés en une suite p_2, \dots, p_r telle que pour tout $i = 2, \dots, r$, le point p_i soit situé sur le diviseur E_{i-1} produit en éclatant p_{i-1} ;
- (3) Chacune des composantes irréductibles de la courbe $X \setminus V$ est contractée sur un point par g ;
- (4) Considérons la résolution minimale de g par deux suites d'éclatements :

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 X & \dashrightarrow \xrightarrow{g} & S
 \end{array}$$

Alors la première courbe contractée par π_2 est la transformée stricte d'une courbe contenue dans $X \setminus V$;

- (5) En particulier, si $X = S$, la première courbe contractée par π_2 est la transformée de la courbe C à la source.

La preuve, facile, est basée sur le fait élémentaire suivant : si p est un point où une transformation birationnelle entre surfaces g n'est pas définie, cela revient à dire qu'il existe une courbe qui est contractée sur p par g^{-1} . Dans la situation du lemme, il n'y a qu'une seule courbe au but susceptible d'être contractée, à savoir la courbe à l'infini C . Toutes les assertions du lemme découlent de cette simple observation.

1.1.2 Deux sous-groupes naturels

Dans ce paragraphe je définis deux sous-groupes naturels de $\text{Aut}(V)$, analogues des groupes affine et triangulaire du théorème de Jung.

Un premier sous-groupe naturel de $\text{Aut}(V)$ provient du groupe des automorphismes biréguliers de \mathbb{P}^2 préservant la conique C . Il s'agit du sous-groupe de

² Par *point base* je désigne un des points éclatés dans la résolution minimale de la transformation birationnelle g . Un tel point est dit propre s'il s'agit d'un point sur la surface X de départ ; les autres points base sont des points infiniment proches des points propres.

$\mathrm{PGL}_3(k)$ qui préserve la forme quadratique $y^2 - xz$, autrement dit on obtient le groupe $\mathrm{O}_3(k)$. Comme expliqué dans [35, §2.2], $\mathrm{O}_3(k)$ est engendré par

$$\begin{aligned} [x : y : z] &\rightarrow [z : y : x]; \\ [x : y : z] &\rightarrow [x : -y : z]; \\ [x : y : z] &\rightarrow [a^{-1}x : y : az], \quad a \in k^*; \\ \text{et } [x : y : z] &\rightarrow [x + 2by + b^2z : y + bz : z], \quad b \in k. \end{aligned}$$

On définit un deuxième sous-groupe naturel en fixant un point p de la conique, en lui associant un pinceau \mathcal{P} comme décrit ci-après et en considérant le groupe E_C des automorphismes préservant ce pinceau. Prenons par exemple $p = [1 : 0 : 0]$. On définit \mathcal{P} comme le pinceau des coniques ayant un nombre d'intersection local en p avec la conique C égal à 4. Comme la droite double $z^2 = 0$ est une telle conique, le pinceau \mathcal{P} est engendré par C et cette droite double. Pour trouver l'expression des éléments de E_C j'utilise maintenant une astuce similaire à celle de [35, Lemme 3], à savoir conjuguer afin de se ramener à des automorphismes triangulaires de \mathbb{A}^2 .

Dans la carte affine $z = 1$, les éléments de E_C correspondent aux transformations préservant le pinceau des paraboles $y^2 - x = c$, et induisant un automorphisme de \mathbb{P}^2 privé de la conique $y^2 = x$. En conjuguant par $(x, y) \rightarrow (-x + y^2, y)$, on se ramène à des transformations préservant les droites $x = c$ et induisant un automorphisme de \mathbb{P}^2 privé de l'axe $x = 0$. Elles doivent de plus fixer le point $[1 : 0 : 0]$, et la différentielle en ce point est contrainte par la condition que le point infiniment proche correspondant à D (la droite $z = 0$ à la source) doit aussi être fixe (voir figure 1.1). Ce sont finalement des transformations triangulaires de la forme (dans la carte $x = 1$)

$$(y, z) \rightarrow \left(\frac{y}{\alpha} + zP(z), \frac{z}{\alpha^2} \right),$$

ou autrement dit en coordonnées homogènes

$$[x : y : z] \dashrightarrow [\alpha^2 x^{n+1} : \alpha y x^n + z x^n P(z/x) : z x^n]$$

où P est un polynôme de degré n et $\alpha \in k^*$. Exprimées en coordonnées (x, y) , dans la carte $z = 1$, elles s'écrivent donc :

$$(x, y) \dashrightarrow \left(\alpha^2 x, \alpha y + P\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

En revenant au \mathbb{P}^2 initial par conjugaison par l'involution $(-x + y^2, y)$, on trouve

finalement

$$E_C = \left\{ (x, y) \mapsto \left(\alpha^2 x + 2\alpha y P \left(\frac{1}{y^2 - x} \right) + P^2 \left(\frac{1}{y^2 - x} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \alpha y + P \left(\frac{1}{y^2 - x} \right) \right) ; P \in k[T], \alpha \in k^* \right\}.$$

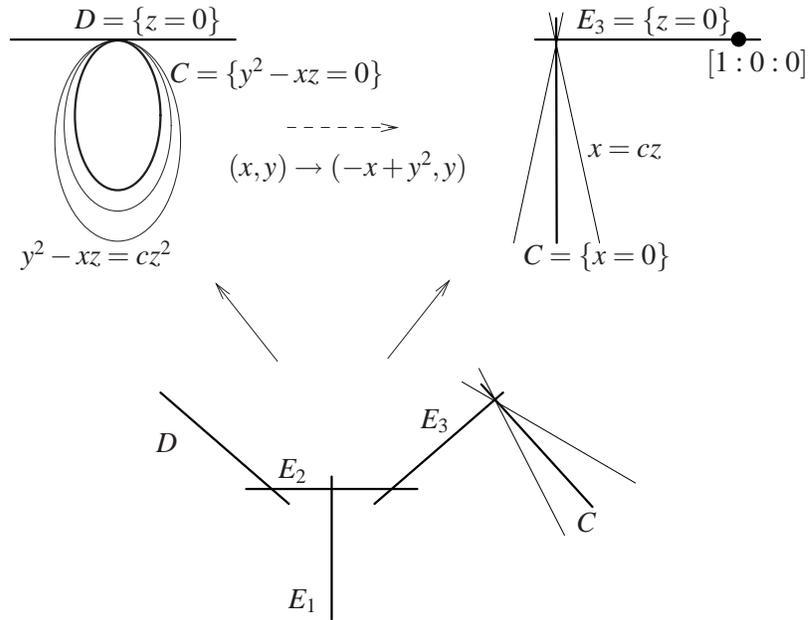


FIG. 1.1 – Conjugaison entre E_C et des automorphismes triangulaires de \mathbb{A}^2 .

1.1.3 Les sous-groupes $O_3(k)$ et E_C engendrent $\text{Aut}(V)$

Soit $f \in \text{Aut}(V)$. Je montre dans ce paragraphe que pour un bon choix de $a \in O_3(k)$ et $e \in E_C$, le nombre de points base de l'automorphisme fae est strictement inférieur à celui de f . En raisonnant par récurrence sur le nombre de points base de f , on aura ainsi prouvé que $O_3(k)$ et E_C engendrent le groupe $\text{Aut}(V)$.

Étant donné $f \in \text{Aut}(V)$, commençons par choisir a de façon à ce que l'unique point base propre de fa soit $[1 : 0 : 0]$. Ceci est possible car $O_3(k)$ agit transitivement sur les points de C .

On examine ensuite la configuration des points base de fa . Le lemme 3 implique que les quatre premiers points base de f se situent sur le (transformé strict du) diviseur C , et correspondent donc aux points base du pinceau \mathcal{P} . Le dernier diviseur exceptionnel E_4 est transverse aux courbes du pinceau \mathcal{P} .

Le point base suivant est précisément l'intersection $C \cap E_4$, et après avoir éclaté ce point on peut contracter C (qui après ces 5 éclatements est devenue une (-1) -courbe), réalisant ainsi une transformation élémentaire.

On peut ainsi réaliser r transformations élémentaires successives ($r \geq 1$), jusqu'à obtenir une configuration où $E_4^2 = -(r+1)$, et où le point base suivant n'est plus sur (le transformé strict de) E_4 . On peut alors réaliser r nouvelles transformations élémentaires qui ramènent E_4^2 à -1 . Enfin, la contraction des quatre courbes auxiliaires produites au début nous ramène à \mathbb{P}^2 .

Toutes ces transformations élémentaires préservant le pinceau \mathcal{P} , on constate que cette factorisation correspond à un élément $e^{-1} \in E_C$, et donc on a écrit fa sous la forme $faee^{-1}$. Enfin, fae admet $4 + 2r$ points base de moins que fa (4 pour les points bases du pinceau, et 1 pour chacune des $2r$ transformations élémentaires).

1.1.4 La structure de produit amalgamé

Je répète ici le très court argument donné dans [35, fin du §2.4], pour prouver que le groupe $\text{Aut}(V)$ est le produit amalgamé le long de leur intersection des sous-groupes $O_3(k)$ et E_C . Il s'agit de voir qu'une composition d'éléments correspondant à un mot réduit n'est pas l'identité.

D'une part tout élément de $E_C \setminus O_3(k)$ admet $[1 : 0 : 0]$ comme unique point base propre, et contracte C sur $[1 : 0 : 0]$.

D'autre part tout élément de $O_3(k) \setminus E_C$ déplace le point $[1 : 0 : 0]$ sur un autre point de C .

En conséquence toute composition (non réduite à un élément de $O_3(k)$) d'éléments de $E_C \setminus O_3(k)$ et de $O_3(k) \setminus E_C$ contracte la conique C sur un point, et n'est donc pas égale à l'identité.

Du point de vue de la géométrie birationnelle la preuve de l'existence d'une structure de produit amalgamé (généralement attribuée à van der Kulk [47] dans le contexte de $V = \mathbb{A}^2$) est donc une remarque anodine. Bien sûr les conséquences que l'on peut en tirer ne le sont pas, elles !

1.1.5 Une question en dimension supérieure

A noter qu'en toute dimension on peut adapter les formules données ci-dessus pour produire des exemples d'automorphismes sur le complément d'une hypersurface quadrique lisse dans \mathbb{P}^n . Par exemple si $Q = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ est la quadrique définie par $f = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_0x_n$, alors la transformation (exprimée dans la carte affine $x_n = 1$)

$$g: (x_0, \dots, x_{n-1}) \dashrightarrow \left(x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(2x_i P_i \left(\frac{1}{f} \right) + P_i^2 \left(\frac{1}{f} \right) \right), \right. \\ \left. x_1 + P_1 \left(\frac{1}{f} \right), \dots, x_{n-1} + P_{n-1} \left(\frac{1}{f} \right) \right)$$

est un automorphisme de $\mathbb{P}^n \setminus Q$.

Bien sûr dès la dimension 3 on ne s'attend plus à ce que cette classe restreinte d'exemples permettent d'engendrer le groupe entier des automorphismes. La question analogue pour les automorphismes polynomiaux, connue comme « Tame Conjecture », a été infirmée (comme il était attendu) en dimension 3 par Shestakov et Umirbaev [45].

Je voudrais mentionner ici une autre question naturelle au vu de ces exemples : étant donnée une paire (X, B) où X, B sont des variétés de Fano rationnelles lisses, avec B correspondant à un diviseur ample de X , existe-t-il toujours des automorphismes de la variété affine $X \setminus B$ qui ne s'étendent pas en des automorphismes biréguliers de X ?

En particulier, la question suivante m'a été suggérée par M. Reid ; je me suis plus tard aperçu qu'elle était également mentionnée par Gizatullin dans [24].

Question 4. Étant donnée une surface cubique lisse $B \in \mathbb{P}^3$, existe-t-il des automorphismes non linéaires de $\mathbb{P}^3 \setminus B$?

Dans [28], T. Kishimoto, Y. Prokhorov et M. Zaidenberg produisent un critère non constructif d'existence de flots d'automorphismes pour le cône affine sur une surface de del Pezzo : en particulier pour une surface de del Pezzo de degré au moins 4 et anticanoniquement plongée, il existe des automorphismes non linéaires sur le cône affine de dimension 3 correspondant. Cependant le cas de la surface cubique reste ouvert. Ceci suggère qu'une question plus facile que la question 4, mais déjà non évidente, pourrait être de produire des automorphismes sur le complément d'une surface de del Pezzo de degré 4 dans une quadrique lisse de dimension 3.

1.2 Programme de Sarkisov

1.2.1 Divers algorithmes

Le terme « programme de Sarkisov » fait référence à l'existence d'une factorisation en liens dits élémentaires pour toute transformation birationnelle entre fibrations de Mori. Je renvoie à [13] et à l'introduction de [17] pour une présentation plus détaillée du programme de Sarkisov ; je ne rappelle ici que ce qui est nécessaire pour discuter des résultats contenus dans [17]. Dans cette section le corps de base est toujours \mathbb{C} .

Je rappelle qu'une variété projective X munie d'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est appelée une **fibration de Mori** si les propriétés suivantes sont satisfaites : Y est de dimension strictement inférieure à celle de X , les fibres de f sont connexes, toutes les courbes contractées par f sont numériquement proportionnelles et d'intersection négative avec le diviseur canonique K_X . On peut étendre cette définition au cas d'une paire logarithmique (X, D) , où D est un diviseur, en demandant la négativité par rapport à $K_X + D$ dans la dernière condition. On admet en général que X soit singulière, avec singularités appartenant à une classe restreinte, naturelle au sens de la théorie de Mori (par exemple la classe des singularités terminales).

L'espace projectif \mathbb{P}^n (muni de la fibration triviale vers un point), ou les surfaces de Hirzebruch \mathbb{F}_n (munies de leur fibration vers \mathbb{P}^1) sont des exemples basiques de fibrations de Mori. L'éclatement d'un point $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, une transformation élémentaire $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n\pm 1}$ ou le changement de choix de fibration sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont des exemples basiques de liens de Sarkisov.

Une preuve du programme de Sarkisov, pour les variétés de dimension 3 à singularités terminales, a été donnée par Corti [12]. La question qui m'intéresse est de savoir si ces techniques issues de la théorie de Mori permettent de dire quelque chose dans le cas d'une situation affine. Il existe un credo, remontant à Iitaka, stipulant que la géométrie d'une variété affine V devrait être comprise en termes de la géométrie d'une paire logarithmique (X, B) , où X est une compactification de V et B est le diviseur à l'infini. Par ailleurs, il existe un programme log Sarkisov dû à Bruno et Matsuki [5], qui suit la même ligne d'arguments que Corti, et qui traite précisément de la factorisation de transformations entre de telles paires en dimension au plus 3. Récemment Hacon et McKernan [11] ont même démontré le programme log Sarkisov en toute dimension, dans le cadre des paires klt (kawamata log terminales). Cependant leur approche donne un résultat d'existence mais n'est pas constructive comme l'est en principe la démarche proposée initialement par Sarkisov. En tout état de cause avant de chercher à appliquer la machinerie en dimension 3 il était naturel de commencer par

vérifier qu'en dimension 2 on retrouve les résultats évoqués en début de chapitre.

Mentionnons tout d'abord que le programme de Sarkisov classique pour les surfaces est essentiellement un exercice, consistant à mettre du vocabulaire sophistiqué sur des résultats anciens. On peut ainsi retrouver une preuve du résultat classique de Noether concernant les générateurs du groupe de Cremona ; c'est le point de vue adopté dans [29, §2.5].

Le programme log Sarkisov en dimension 2 est valable dans le cadre des paires dlt (divisoriellement log terminales). En particulier on peut l'appliquer aux transformations birationnelles d'une paire (X, B) où X est une surface projective lisse et B une courbe rationnelle lisse. On est intéressé par les transformations correspondant à des automorphismes du complément de B dans X . Il est instructif d'examiner ce que donne ces algorithmes « classique » et « logarithmique » dans les trois situations suivantes : $(\mathbb{P}^2, \text{droite})$, $(\mathbb{P}^2, \text{conique})$ et $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \text{diagonale})$.

Dans le cas d'un automorphisme du plan affine, correspondant à la situation $(\mathbb{P}^2, \text{droite})$, l'algorithme classique produit essentiellement³ la factorisation que j'obtiens au cours de ma preuve du théorème de Jung. L'algorithme logarithmique produit une factorisation où tous les liens sont de type II, et qui met en jeu des plans projectifs à poids $\mathbb{P}^2(n, 1, 1)$, lesquels peuvent être vus comme le résultat de la contraction de la section exceptionnelle dans une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n (voir [17, §3.1]).

Dans le cas $(\mathbb{P}^2, \text{conique})$, l'algorithme classique cesse d'être satisfaisant. En effet dès le deuxième lien on est conduit à contracter une courbe qui n'est pas contenue dans le bord (précisément : la transformée d'une tangente à la conique initiale). Or on voudrait une factorisation qui soit **propre**, c'est-à-dire telle que tous les éclatements et contractions mis en jeu se produisent sur le bord. En fait il n'est pas étonnant que l'algorithme classique ne soit pas propre ; le « miracle » est plutôt que dans le cas du plan affine on obtenait une factorisation propre. Par contre l'algorithme log Sarkisov produit une factorisation propre, à nouveau via des surfaces singulières qui s'obtiennent en contractant certaines courbes⁴ dans les surfaces apparaissant dans la factorisation décrite au §1.1.

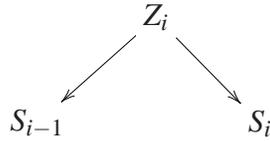
Considérons enfin le cas $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \text{diagonale})$, qui est traité en détail dans [17]. Cette fois ni l'algorithme classique ni l'algorithme logarithmique ne produisent une factorisation propre. Ceci est représentatif du cas général, à savoir un automorphisme du complément d'une section ample dans une surface de Hirzebruch. Ainsi ce qui s'annonçait comme un simple exercice a tourné à la surprise :

³ A la nuance près que je passe d'une fibration à une autre directement par des liens $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1$, là où l'algorithme prend le chemin alternatif, comportant un curieux aller-retour, $\mathbb{F}_1 \leftrightarrow \mathbb{F}_0 \leftrightarrow \mathbb{F}_1$, le lien du milieu correspondant à un changement de fibration sur $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

⁴ Précisément : les courbes E_1, \dots, E_4 produites par la résolution des points base du pinceau \mathcal{P} .

typiquement, le programme log Sarkisov produit une factorisation dont certains liens intermédiaires viennent contracter des courbes dans la partie affine. Pour remédier à cet état de fait guère satisfaisant nous proposons l'énoncé suivant.

Théorème 5 (Théorème principal de [17]). *Soit $f: V \xrightarrow{\sim} V'$ un isomorphisme entre surfaces quasi-projectives lisses, et $(S, B_S), (S', B_{S'})$ des compactifications dlt de V (ou de façon équivalente de V') telles que les diviseurs de bord $B_S, B_{S'}$ soient réduits et irréductibles. Alors si l'application birationnelle $f: S \dashrightarrow S'$ n'est pas un isomorphisme, elle se décompose en une suite finie de liens de la forme*



où $S_0 = S, S_1, \dots, S_n = S'$ sont des compactifications dlt de V avec bord irréductible, Z_i est pour tout $i = 1, \dots, n$ une compactification dlt de V avec deux composantes de bord, et $Z_i \rightarrow S_{i-1}, Z_i \rightarrow S_i$ sont les contractions d'un des deux rayons extrémaux $K + B$ négatifs contenus dans le bord B_{Z_i} .

Ce théorème produit une factorisation propre, dans le cadre des paires dlt. Notons cependant que les surfaces S_i ne sont en général pas des fibrations de Mori ; on s'éloigne donc quelque peu du programme de Sarkisov originel. On garde malgré tout une certaine simplicité pour les surfaces intermédiaires S_i qui apparaissent : ce sont toujours des compactifications de V par une *unique* courbe rationnelle lisse. Soulignons encore le point principal de [17] : en général il n'existe pas de factorisation qui soit à la fois propre et via des fibrations de Mori ; on est inévitablement placé devant le désagréable dilemme d'avoir à abandonner l'une de ces deux propriétés.

1.2.2 Générateurs et relations

Dans le cas d'une surface affine V admettant une compactification *lisse* avec une seule composante de bord, le théorème 5 nous permet (en un sens faible, voir ci-dessous) d'obtenir une présentation par générateurs et relations du groupe $\text{Aut}(V)$.

L'idée générale est de regrouper les liens produits par le théorème en un certain nombre de paquets, chacun devant moralement correspondre à un automorphisme de V préservant une fibration, généralisant ainsi la notion d'automorphisme triangulaire du plan affine.

On dit qu'un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V'$ est **triangulaire** si aucune des surfaces intermédiaires S_1, \dots, S_{n-1} produites par le théorème 5 n'est lisse. Cette définition met en avant l'aspect « indécomposable » d'un tel isomorphisme. Cette

notion admet également une jolie interprétation géométrique, que voici. Pour tout choix d'un point x sur le bord B_S , on peut considérer le pinceau de courbes rationnelles \mathcal{P}_x obtenu en prenant le sous-système linéaire de $|B_S|$ des courbes maximales tangentes à B_S en x , i.e. les courbes linéairement équivalentes à B_S qui n'intersectent B_S qu'en x . Alors un automorphisme f est triangulaire si et seulement s'il existe de tels pinceaux \mathcal{P}_x et \mathcal{P}_y à la source et au but tels que f envoie \mathcal{P}_x sur \mathcal{P}_y .

Nous obtenons alors le résultat suivant.

Proposition 6. *Soient V, V' deux surfaces quasi-projectives admettant des compactifications lisses S, S' avec bord irréductible.*

- (1) *Tout isomorphisme $f: V \rightarrow V'$ est une composée d'isomorphismes triangulaires $f = f_r \circ \dots \circ f_1$, où pour tout i les (uniques) points base propres de f_i^{-1} et f_{i+1} sont distincts.*
- (2) *Si $f = f_r \circ \dots \circ f_1$ est une composée d'isomorphismes triangulaires où pour tout i les points base propres de f_i^{-1} et f_{i+1} sont distincts, alors la factorisation de f produite par le théorème 5 est égale à la concaténation des factorisations de chaque f_i .*

Le point (2) est un analogue d'une structure de produit amalgamé : en particulier si l'on compose des isomorphismes triangulaires sans simplification évidente entre deux facteurs consécutifs, alors on n'obtient jamais l'identité. Le problème vient du fait que le point (1) ne donne pas exactement des générateurs pour $\text{Aut}(V)$: il est ici question d'isomorphismes triangulaires, et non d'automorphismes. Ce problème était invisible dans le cas du plan ou de la quadrique affines, ou du complément d'une conique. Par contre, il commence à apparaître dès que l'on considère V égal à \mathbb{F}_n privée d'une section ample de carré au moins 3 : c'est un résultat étonnant dû à Danilov et Gizatullin que la classe d'isomorphie de V ne dépend que du carré de la section ample, et pas de l'indice n ([18] contient une preuve concise et récente de ce fait). Autrement dit ces surfaces affines admettent des compactifications lisses (avec bord irréductibles) non isomorphes ! En particulier nous traitons en détail dans [17, §3.3] le cas de \mathbb{F}_0 ou \mathbb{F}_2 privée d'une section de carré 4.

1.2.3 Pas de miracle en dimension supérieure

J'ai mentionné au §1.2.1 que l'algorithme de Sarkisov classique se révèle être propre lorsqu'on l'applique aux automorphismes du plan affine. On peut se demander si un tel miracle persiste en dimension 3. Il n'est pas trop difficile de vérifier que la factorisation d'un automorphisme triangulaire (au moins en petit

degré) de \mathbb{C}^3 est propre. De même, la factorisation (en huit liens, voir [27]) du fameux automorphisme de Nagata

$$\sigma : (x, y, z) \rightarrow (x + 2y(y^2 - xz) + z(y^2 - xz)^2, y + z(y^2 - xz), z)$$

se trouve être propre. Cependant, en modifiant légèrement l'automorphisme de Nagata on peut produire un exemple où la factorisation n'est plus propre (voir ci-dessous).

Par ailleurs on peut remarquer [17, §2.1] que dans le cas d'une surface avec nombre de Picard égal à 1, l'algorithme de Bruno et Matsuki coïncide avec celui du théorème 5, et est donc propre. En dimension 3 il n'existe pas de preuve publiée d'un algorithme log Sarkisov pour les paires dlt. Cependant, même s'il est fort plausible que la preuve proposée par Hacon et McKernan puissent s'étendre à cette situation, il n'est pas du tout clair pourquoi un tel algorithme devrait être propre.

Exemple 7. Considérons l'automorphisme de \mathbb{C}^3

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2yP + zP^2, y + zP, z)$$

où $P = \prod_{i=1}^n (y^2 - xz - a_i z)$, $n \geq 3$ et les a_i sont n nombres complexes non nuls distincts. On étend f en une transformation birationnelle

$$[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \dashrightarrow [xt^{2n} + 2yt^n \bar{P} + z\bar{P}^2 : yt^{2n} + z\bar{P}t^n : zt^{2n} : t^{2n+1}] \in \mathbb{P}^3.$$

où $\bar{P} = \prod_{i=1}^n (y^2 - xz - a_i zt)$. La singularité maximale est réalisée par la conique $t = y^2 - xz = 0$. Le premier lien, de type II, de \mathbb{P}^3 vers la quadrique lisse dans \mathbb{P}^4 , consiste à éclater la conique puis à contracter le transformé strict du plan à l'infini. En coordonnées homogènes ceci s'écrit :

$$[x : y : z : t] \dashrightarrow [r : s : u : v : w] = [xt : yt : zt : y^2 - xz : t^2]$$

où l'image de \mathbb{P}^3 est la quadrique $Q = \{s^2 - ru = vw\}$.

Nous voulons maintenant factoriser

$$g : [r : s : u : v : w] \in Q \dashrightarrow [rw^{2n} + 2sw^n R + uR^2 : sw^{2n} + uRw^n : uw^{2n} : w^{2n+1}] \in \mathbb{P}^3$$

où $R = \prod_{i=1}^n (v - a_i u)$. L'ensemble d'indétermination sur le cône quadratique à l'infini est constitué d'une règle du cône et de n coniques concourantes au point $p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$. Plaçons-nous donc dans la carte affine $\{r = 1\}$, et choisissons s, v, w comme coordonnées locales (on a $u = s^2 - vw$). L'expression de g devient

$$g : (s, v, w) \dashrightarrow [w^{2n} + 2sw^n R + (s^2 - vw)R^2 : sw^{2n} + (s^2 - vw)Rw^n : (s^2 - vw)w^{2n} : w^{2n+1}]$$

où à présent $R = \prod_{i=1}^n (v - a_i s^2 + a_i v w)$.

Éclatons l'origine, et plaçons-nous dans une nouvelle carte en remplaçant (s, v, w) par (s, sv, sw) . Le diviseur exceptionnel $s = 0$ sort avec multiplicité $2n$, et on obtient la nouvelle expression :

$$g = (s, v, w) \dashrightarrow [w^{2n} + 2sw^n R + s^2(1 - vw)R^2 : \\ sw^{2n} + s^2(1 - vw)Rw^n : s^2(1 - vw)w^{2n} : sw^{2n+1}]$$

où maintenant $R = \prod_{i=1}^n (v - a_i s + a_i sv w)$.

On éclate l'origine et remplace à nouveau (s, v, w) par (s, sv, sw) . Ce deuxième diviseur exceptionnel $s = 0$ sort encore avec multiplicité $2n$, et on obtient :

$$g = (s, v, w) \dashrightarrow [w^{2n} + 2sw^n R + s^2(1 - s^2 vw)R^2 : \\ sw^{2n} + s^2(1 - s^2 vw)Rw^n : s^2(1 - s^2 vw)w^{2n} : sw^{2n+1}]$$

où maintenant $R = \prod_{i=1}^n (v - a_i + a_i s^2 v w)$.

A présent il n'y a plus de point où la multiplicité du système homaloïdal soit plus grande que 2 : la multiplicité est 2 le long de la droite $s = w = 0$, et le long de chaque droite $v - a_i = w = 0$. Nous en déduisons que la multiplicité maximale $\lambda = n$ est réalisée par les deux premiers éclatements (les diviseurs exceptionnels sortaient avec multiplicité $2n$, mais il faut diviser par 2 puisqu'il s'agit d'éclatement de points).

L'éclatement initial du point $[1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ sur la quadrique Q est donc une extraction maximale. La seule façon de poursuivre le lien est de contracter la transformée du cône quadratique dans Q qui a son point singulier en $[1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ (il s'agit de la section de Q par le plan tangent en ce point). Mais ce cône n'est pas dans le bord, ainsi ce second lien n'est pas propre !

1.3 Relations dans le groupe de Cremona

Je présente ci-dessous l'argument d'Iskovskikh concernant les relations dans le groupe de Cremona. La motivation est de réparer ce qui semble être un trou dans sa preuve⁵. Le problème est simple : Iskovskikh affirme qu'il suffit d'une seule relation mais au cours de la preuve il en utilise deux différentes. Je prouve

⁵Il est possible que ce ne soit qu'un trou dans la traduction ; mon incompetence en russe ne me permet pas d'aller vérifier le texte original de la note dont je ne cite que la traduction [25].

ici que les deux relations suffisent, suivant de près la note originale [25], en m'efforçant de clarifier l'exposition. Le fait que la relation secondaire peut se déduire de la relation principale sera prouvé au §3.1.3.

On travaille sur un corps algébriquement clos. Considérons $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et notons π la projection sur le premier facteur. On note $A = (\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, où le facteur $\mathbb{Z}/2$ correspond à l'involution $\tau : (x, y) \rightarrow (y, x)$. On note B le groupe des applications birationnelles qui préservent la fibration π (groupe de Jonquières).

A deux points $p, q \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non situés sur une même fibre ou une même section on peut associer un élément de B dit transformation élémentaire, qui consiste à éclater ces deux points puis à contracter les transformés des fibres qui passaient par p et q . Cette construction continue à faire sens lorsque q est un point infiniment proche de p . L'involution $e : (x, y) \rightarrow (1/x, y/x)$ est une transformation élémentaire, associée aux points $(0, 0)$ et (∞, ∞) ; l'involution $(x, y) \rightarrow (-x, y - x)$ est elle un exemple de transformation élémentaire associée à des points infiniment proches. On notera $e_{pq} \in B$ une transformation élémentaire associée à deux points p, q distincts (resp. infiniment proches), obtenue à partir de e (resp. à partir de $(-x, y - x)$) par conjugaison par un élément de $A \cap B = \mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$.

Théorème 8 (Iskovskikh [25]). *Le groupe de Cremona $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ est engendré par B et τ . De plus les relations suivantes forment un système complet de relations :*

- Les relations à l'intérieur des groupes A et B ;
- la relation principale $(\tau e)^3 = \mathrm{id}$;
- la relation secondaire $(\tau \circ (-x, y - x))^3 = \mathrm{id}$.

Le fait que B et τ engendrent le groupe de Cremona n'est qu'une reformulation du résultat classique de Noether et Castenuovo [40, 10] cité dans l'introduction. Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de la seconde assertion du théorème.

Tout d'abord de la relation $(\tau e)^3 = \mathrm{id}$ on déduit que pour tout couple de points⁶ p, q on a

$$\tau e_{pq} \tau e_{p'q'} \tau e_{pq} = a \in A \quad (\star)$$

où $p' = \tau(p), q' = \tau(q)$. En effet soit $\varphi \in A \cap B$ qui envoie p', q' sur $(0, 0)$ et (∞, ∞) . On a

$$\varphi^{-1} e \varphi = e_{p'q'} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1} \tau \varphi = \tau c = c^{-1} \tau$$

⁶Pas dans une même fibre ou une même section. Si q est infiniment proche de p , on peut faire un calcul similaire à partir de la relation secondaire.

où $c \in A$ avec $c(p') = p$ et $c(q') = q$. D'où :

$$\begin{aligned} \text{id} &= \varphi^{-1}(\tau e)^3 \varphi = (\tau c) \circ e_{p'q'} \circ (c^{-1}\tau) \circ e_{p'q'} \circ (\tau c) \circ e_{p'q'} \circ c^{-1}c \\ &= \tau e_{pq} \tau e_{p'q'} \tau e_{pq} c. \end{aligned}$$

On obtient bien (\star) , avec $a = c^{-1}$.

Notons F la classe d'une fibre dans $\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, S la classe d'une section (fibre pour la projection sur le deuxième facteur), et $H = S + F$ la classe d'une diagonale (section hyperplane si l'on plonge $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ comme une quadrique dans \mathbb{P}^3). Si g est un élément du groupe de Cremona, on considère les nombres d'intersection

$$\alpha(g) = g_*(H) \cdot S \quad \text{et} \quad \beta(g) = g_*(H) \cdot F.$$

Supposons maintenant que l'on ait une relation

$$b_1 \tau b_2 \tau \cdots \tau b_r = a' \in A \quad (\star\star)$$

avec $b_i \in B$. On peut supposer que cette relation est réduite, au sens où les b_i ne sont pas dans A . On note

$$\alpha_i = \alpha(b_i \tau \cdots \tau b_r) \quad \text{et} \quad \beta_i = \beta(b_i \tau \cdots \tau b_r).$$

La proposition suivante résume les relations entre ces nombres d'intersection qui nous seront utiles.

Proposition 9. *Soit $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, et e_{pq} une transformation élémentaire. Alors*

- (1) $\beta(e_{pq} \circ f) = \beta(f)$;
- (2) $\beta_i = \alpha_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, r-1$;
- (3) $\alpha(e_{pq} \circ f) = \alpha(f) + \beta(f) - \nu_p - \nu_q$, où ν_p et ν_q sont les multiplicités de $f_*(H)$ en p, q .

Preuve. Le point (1) est immédiat en remarquant que e_{pq} préserve la fibration π . Le point (2) en découle, car $\beta(\tau f) = \alpha(f)$. Le point (3) est prouvé en image sur la figure 1.2, où les étiquettes des courbes et des points correspondent respectivement au nombre d'intersection avec $f_*(H)$ et à la multiplicité de $f_*(H)$. Je laisse au lecteur le soin de faire un dessin similaire pour traiter le cas où q est infiniment proche de p . \square

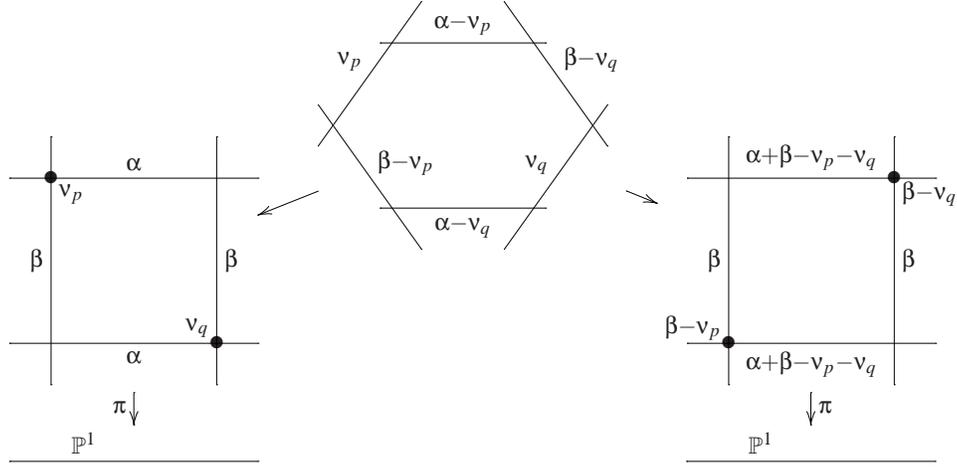


FIG. 1.2 – Preuve en image de la proposition 9.

Posons $\beta = \max_i \beta_i$, définissons s comme le plus grand indice tel que $\beta = \beta_s$, et notons m le nombre (forcément pair) de points base de b_s . Remarquons que $\beta_r = 1$ et $\beta_{r-1} = \alpha_r \geq 2$, d'autre part $\beta_1 = 1$, donc $1 < s < r$. Le principe de la preuve est de chercher à réécrire la relation $(\star\star)$ à l'aide des relations listées dans le théorème de façon à faire baisser les entiers (β, s, m) ordonnés par ordre lexicographique. Je découpe l'argument original d'Iskovskikh en les trois lemmes suivants.

Lemme 10. *Si $m = 1$ on peut faire baisser s , sans faire monter β .*

Preuve. Par hypothèse $b_s = ce_{pq}$, où $c \in A \cap B$. On transforme la relation $(\star\star)$ en utilisant (\star) :

$$b_1 \tau \cdots b_{s-1} (\tau c \tau) (\tau e_{pq} \tau) b_{s+1} \cdots \tau b_r = b_1 \tau \cdots b_{s-1} \tau c \tau (a e_{p'q'} \tau e_{pq}) b_{s+1} \cdots \tau b_r.$$

Remarquons que $\tau c \tau a \in A \cap B$, ainsi les nombres β_i associés à cette nouvelle relation sont les mêmes que ceux de l'ancienne relation, à ceci près que l'ancien β_s a disparu et que les anciens β_i , $i > s$ ont vu leur indice baisser d'un. On constate que s a diminué ; de plus β diminue éventuellement (si s était l'unique indice pour lequel $\beta = \beta_s$) ou au pire reste constant. \square

Soient p_1, \dots, p_{2m} les points base de b_s , et v_1, \dots, v_{2m} les multiplicités de ces points dans le système linéaire $(\tau b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r)_*(H)$.

Lemme 11. *Supposons que pour tous i, j on ait $v_i + v_j \leq \beta_{s+1}$. Alors $m = 1$.*

Preuve. Écrivons b_s comme un produit de m transformations élémentaires : $b_s = ce_{p_{2m} p_{2m-1}} \cdots e_{p_1 p_2}$ où $c \in A \cap B$. La proposition 9 donne :

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \alpha(ce_{p_{2m} p_{2m-1}} \cdots e_{p_1 p_2} \tau b_{s+1} \cdots \tau b_r) \\ &= \alpha(e_{p_{2m-2} p_{2m-3}} \cdots e_{p_1 p_2} \tau b_{s+1} \cdots \tau b_r) + \alpha_{s+1} - \nu_{2m} - \nu_{2m-1}.\end{aligned}$$

En appliquant m fois ce même calcul, et en se souvenant que $\alpha_{s+1} = \beta_s = \beta$, on obtient

$$\beta \geq \beta_{s-1} = \alpha_s = \beta_{s+1} + m\beta - \sum_{i=1}^{2m} \nu_i.$$

Ceci donne la deuxième des inégalités ci-dessous, la première découlant de l'hypothèse du lemme :

$$(m-1)\beta_{s+1} \geq \sum_{i=1}^{2m} \nu_i - \beta_{s+1} \geq (m-1)\beta$$

Finalement $m = 1$, car $\beta_{s+1} < \beta$ par maximalité de s . \square

Lemme 12. *Supposons que $m \geq 2$ et qu'il existe deux points, disons p_1 et p_2 quitte à renommer, tels que $\nu_1 + \nu_2 > \beta_{s+1}$. Alors on peut faire baisser m de 1, en gardant β et s constants.*

Preuve. Remarquons que si p_j est un point infiniment proche de p_i , alors $\nu_j \leq \nu_i$. Ainsi on peut supposer que p_1, p_2 sont les deux premiers points base⁷ de b_s et écrire $b_s = b'_s e_{p_1 p_2}$. Par (\star) on a $e_{p_1 p_2} \tau = a \tau e_{p_1 p_2} \tau e_{p'_1 p'_2}$ et donc $(\star\star)$ s'écrit maintenant

$$b_1 \tau b_2 \tau \cdots \tau b'_s a \tau e_{p_1 p_2} \tau e_{p'_1 p'_2} b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r.$$

On a :

$$\begin{aligned}\beta(e_{p'_1 p'_2} b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r) &= \beta_{s+1} < \beta \text{ (par maximalité de } s) \\ \alpha(e_{p'_1 p'_2} b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r) &= \alpha_{s+1} + \beta_{s+1} - \nu_1 - \nu_2 < \alpha_{s+1} = \beta \\ \beta(e_{p_1 p_2} \tau e_{p'_1 p'_2} b_{s+1} \tau \cdots \tau b_r) &= \alpha_{s+1} + \beta_{s+1} - \nu_1 - \nu_2 < \beta.\end{aligned}$$

Donc le nombre β ainsi que l'indice s restent constants. De plus $b'_s a$ a deux points base de moins que b_s , autrement dit m a diminué de 1. \square

Le théorème d'Iskovskikh est une récurrence immédiate à partir de ces trois lemmes : remarquons qu'après avoir appliqué le lemme 10 il se peut que la relation ne soit plus réduite (certains b_i sont dans A), dans ce cas on réduit en diminuant éventuellement (β, s, m) et en obtenant peut-être une relation triviale du type $a' = a'$; c'est cette dernière situation qui achève la récurrence.

⁷ Par contre rien n'exclut que p_2 soit infiniment proche de p_1 , et donc qu'il faille utiliser la version de (\star) dérivée de la relation secondaire...

Chapitre 2

Sous-groupes d'automorphismes du plan

Introduction

Dans le chapitre précédent j'ai expliqué comment obtenir une description du groupe des automorphismes $\text{Aut}(V)$ pour V appartenant à une large classe de surfaces affines rationnelles. Je vais maintenant me concentrer sur le cas où V est le plan affine \mathbb{A}^2 , et illustrer comment on peut exploiter la structure de produit amalgamé de $\text{Aut}(\mathbb{A}^2)$ pour répondre à diverses questions concernant ce groupe.

Le point de départ de l'article fondateur de Friedland et Milnor [20] est la remarque suivante : le théorème de Jung permet d'obtenir des formes normales pour étudier la dynamique des automorphismes du plan affine complexe. Ceci justifie en particulier la restriction de l'étude aux automorphismes de Hénon¹, par opposition aux automorphismes élémentaires qui présentent eux une dynamique pauvre. Dans ma thèse je remarque qu'une construction classique due à Bass et Serre, qui associe un arbre simplicial \mathcal{T} à un produit amalgamé, permet de retrouver la dichotomie de Friedland et Milnor. Précisément, en terme d'action sur l'arbre \mathcal{T} , un automorphisme f présente une dynamique pauvre (resp. riche) si et seulement s'il admet au moins un point fixe dans \mathcal{T} (resp. aucun point fixe dans \mathcal{T}). Un des intérêts de ce point de vue est qu'il fournit de façon naturelle des « boîtes » où ranger non seulement les éléments de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, mais également ses sous-groupes. On obtient ainsi quatre classes naturelles de sous-groupes : elliptiques, paraboliques, hyperboliques élémentaires et hyperboliques généraux.

Après avoir rappelé dans la section 2.1 la construction de l'arbre \mathcal{T} , j'expose

¹Ou pour être précis : à des composées d'applications de Hénon généralisées.

dans la section suivante mes résultats [31] concernant la dynamique des sous-groupes de type parabolique, qui sont certains sous-groupes abéliens de torsion. L'idée de départ était de chercher à adapter les techniques d'analyse complexe utilisées pour étudier la dynamique d'un seul automorphisme, et en particulier les ensembles de type fractal qui lui sont associés.

Mentionnons un résultat basique qui permet de se faire une idée de ce qu'on entend par une dynamique riche. Un automorphisme de type Hénon, tel par exemple $g: (x, y) \rightarrow (y, P(y) - x)$, admet toujours une infinité de points périodiques de type selle. Chacun de ces points p admet donc une variété stable $W^s(p)$, qui est une immersion (mais certainement pas un plongement) de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 , définie comme l'ensemble des points tendant vers l'orbite de p sous itération positive de g . Le fait surprenant est que même si par définition $W^s(p_1)$ et $W^s(p_2)$ sont disjointes dès que p_1, p_2 ont des orbites disjointes, on a toujours égalité entre les adhérences : $\forall p_1, p_2, \overline{W^s(p_1)} = \overline{W^s(p_2)}$. L'ensemble de Julia (positif) J_g^+ est défini comme le bord topologique de l'ensemble des points à orbites positives bornées. On peut montrer que J_g^+ est égal à l'adhérence d'une quelconque de ces variétés stables. La topologie de J_g^+ est donc certainement compliquée : cet ensemble contient une infinité d'immersions de la droite \mathbb{C} , deux à deux disjointes et toutes denses.

L'analyse complexe entre en jeu via le fait remarquable suivant : l'ensemble de Julia J_g^+ est le support d'un courant μ_g^+ positif, fermé et de type $(1, 1)$. Les courants sont aux formes différentielles ce que les distributions sont aux fonctions. Un exemple basique de courant positif, fermé et de type $(1, 1)$ sur \mathbb{P}^2 est le courant d'intégration sur une courbe algébrique. Le courant μ_g^+ ci-dessus s'obtient comme une limite, en un sens adéquat, des courants d'intégration le long des courbes $g^{-n}(C)$, où $C \subset \mathbb{C}^2$ est une courbe arbitraire.

Dans le cadre des groupes paraboliques, il est aussi possible de définir un ensemble de Julia où vient se concentrer la dynamique chaotique. Par exemple, dans le cas d'un groupe parabolique localement linéarisable, l'ensemble de Julia se trouve coïncider avec le bord du bassin de linéarisation. J'explique dans la section 2.2 pourquoi je ne rencontre qu'un succès partiel dans ma tentative de définir un courant supporté par cet ensemble de Julia.

Au cours de l'étude des groupes hyperboliques élémentaires d'une part, et paraboliques d'autre part, on est amené à étudier des applications de type Hénon présentant beaucoup de symétries. En particulier on produit des groupes hyperboliques élémentaires maximaux (résolubles mais non abéliens) à partir d'application de Hénon qui sont conjuguées à leur inverse ; et les groupes paraboliques sont liés à l'existence de suite d'applications de Hénon dont les centralisateurs forment une suite croissante de sous-groupes cycliques. Le statut de ces ques-

tions transposées dans le contexte du groupe de Cremona n'est pas clair, et fait l'objet d'une courte digression, de nature spéculative, dans le §2.3. J'inclus également une remarque concernant l'existence de structures de produit amalgamé pour le groupe de Cremona d'une part, et le groupe des automorphismes modérés de \mathbb{C}^3 d'autre part.

Une question naturelle concernant le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ est la classification, à conjugaison près, des plongements de divers groupes classiques dans ce groupe. Par exemple un exemple intéressant, point de départ des questions abordées dans [8], est celui du groupe fondamental d'une surface compacte. Un tel groupe est naturellement un sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$, mais il est moins clair de voir s'il est possible de réaliser un tel groupe comme un sous-groupe hyperbolique général (c'est-à-dire, contenant des éléments hyperboliques).

Je présente dans la section 2.4 les résultats de rigidité obtenus dans l'article [8]. J'illustre également les techniques utilisées dans cet article en produisant un nouvel exemple de plongement exotique du groupe fondamental d'une surface de genre 2 dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$.

Je termine cette introduction par une brève présentation de l'article [34], qui prolonge des résultats obtenus dans ma thèse. C'est un fait remarquable que le théorème de Jung est valable sur un corps quelconque. Ceci est à mettre en contraste avec le théorème de Noether concernant le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$, où l'hypothèse k algébriquement clos est cruciale. J'exploite dans [34] la structure du groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ pour $k = \mathbb{C}(t)$ le corps des fractions rationnelles, pour obtenir une description de certaines classes particulières d'automorphismes en dimension supérieure. Considérant les groupes $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ et identifiant leurs algèbres de Lie respectives à \mathbb{C}^4 et \mathbb{C}^3 , je m'intéresse aux automorphismes de \mathbb{C}^4 et \mathbb{C}^3 qui respectent l'action adjointe de ces deux groupes sur leur algèbre de Lie. Je montre que l'étude se ramène dans les deux cas à comprendre le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^3 qui préservent une forme quadratique (provenant du déterminant); autrement dit le groupe orthogonal non linéaire en dimension 3. J'avais étudié ce dernier groupe dans ma thèse. Dans [34] je reprends et clarifie l'argument qui permet d'établir un isomorphisme entre ce groupe orthogonal non linéaire en dimension 3 et certains sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ à paramètre polynomial. Autrement dit, on se ramène à une étude d'un sous-groupe H de $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ avec $k = \mathbb{C}(t)$, où la dépendance des éléments de H en le paramètre t est polynomiale. Il est bien connu depuis Nagata qu'un tel automorphisme à paramètre polynomial peut admettre une décomposition dans le produit amalgamé $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}(t)}^2)$ dont les facteurs vont être à dépendance rationnelle en t . Il est alors possible de transporter ces exemples dans le groupe orthogonal non linéaire, et de

répondre par la négative à une question de Drenski et Yu concernant une classe d'éléments candidate à être un système de générateurs pour ce groupe.

2.1 L'arbre de Bass-Serre

La théorie de Bass et Serre [42] associe un arbre simplicial à tout produit amalgamé. Je rappelle ici cette construction dans le cas du produit amalgamé produit par le théorème 2 ; en effet, celle-ci est fondamentale dans plusieurs de mes travaux.

On définit l'ensemble des sommets de l'arbre \mathcal{T} comme étant constitué de l'union disjointe des classes à gauche du groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ modulo A et modulo E . De façon similaire l'ensemble des arêtes est égal aux classes à gauche modulo S (rappelons que l'on note $S = A \cap E$). Par convention, pour tout $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$, l'arête φS relie les sommets φA et φE . Ce recollement définit un graphe, connexe puisque A et E engendrent $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$, et sans boucle du fait de la structure de produit amalgamé.

Cette construction est analogue à celle du graphe de Cayley d'un groupe libre. A noter cependant que le nombre des classes à gauche dans A ou E modulo S étant non dénombrable, cet arbre simplicial n'est pas localement compact (de chaque sommet est issu un nombre non dénombrable d'arêtes). Il est cependant possible de visualiser l'arbre en termes d'organisation des mots de longueur donnée : partant de l'arête $\text{id}S$, les arêtes voisines correspondent aux mots modulo S de longueur croissante 1, 2, etc, et peuvent être représentées comme sur la figure 2.1, où les mots commençant par un automorphisme affine sont à gauche de l'arête $\text{id}S$, et ceux commençant par un automorphisme élémentaire sont à droite.

En décidant que chaque arête est isométrique au segment $[0, 1]$ on définit une métrique naturelle sur \mathcal{T} . Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ agit sur cet arbre par translation à gauche : pour toute arête $\varphi S \in \mathcal{T}$ et $f \in \text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$, on a $f \cdot \varphi S = (f\varphi)S$ (idem pour l'action sur les sommets). On obtient ainsi un plongement² de $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ dans le groupe des isométries de l'arbre \mathcal{T} . On peut en particulier distinguer deux classes d'automorphismes, en fonction de leur point fixe sur l'arbre :

- (1) Un automorphisme f induit une isométrie **elliptique** sur \mathcal{T} , i.e. avec au moins un point fixe, si et seulement si f est conjugué dans $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ à un automorphisme affine ou élémentaire ;

² Il n'est pas vrai que ce soit un plongement pour tout produit amalgamé : considérer par exemple $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/6$ où le centre $\mathbb{Z}/2$ agit trivialement sur l'arbre. Cependant c'est bien un plongement dans le cas qui nous occupe.

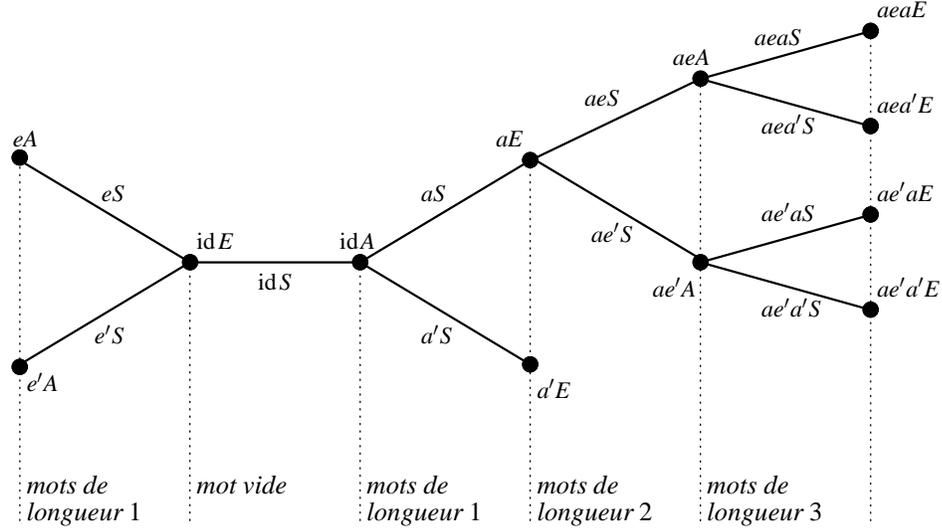


FIG. 2.1 – Quelques arêtes et sommets de l'arbre $\mathcal{T}(a, a' \in A \setminus E, e, e' \in E \setminus A)$.

- (2) Un automorphisme g induit une isométrie **hyperbolique** sur \mathcal{T} , i.e. sans aucun point fixe, si et seulement si g est conjugué à un mot réduit de longueur paire dans le produit amalgamé.

Dans le second cas, il existe une unique géodésique $\text{Géo}(g)$ dans \mathcal{T} sur laquelle g agit par translation. Par ailleurs si $k = \mathbb{C}$, en conjuguant encore dans S et quitte à passer à l'inverse on peut se ramener à une composée d'applications de Hénon généralisées $g_n \circ \dots \circ g_1$ où $g_i(x, y) = (y, P_i(y) - a_i x)$, avec chaque polynôme P_i de degré au moins 2.

2.2 Dynamique des sous-groupes paraboliques

2.2.1 Bref retour sur ma thèse

Dans ma thèse j'obtiens une classification des sous-groupes résolubles de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Considérant l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ sur son arbre de Bass-Serre \mathcal{T} on dit qu'un sous-groupe $G \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ est :

- (1) **elliptique**, si G admet (au moins) un point fixe dans \mathcal{T} ;
- (2) **parabolique**, si G est non elliptique, et fixe un unique bout de \mathcal{T} ;
- (3) **hyperbolique élémentaire**, si G contient au moins une isométrie hyperbolique et fixe deux bouts de \mathcal{T} ;

- (4) **hyperbolique général**, si G contient au moins deux isométries hyperboliques avec des géodésiques différentes.

Par construction même de l'arbre de Bass-Serre, un groupe elliptique est conjugué à un sous-groupe du groupe affine ou du groupe élémentaire. Par ailleurs, un argument simple de ping-pong montre qu'un groupe hyperbolique général contient un groupe libre sur deux générateurs³.

Il s'agit donc d'étudier les deux cas restants, et dans ma thèse j'obtiens :

Proposition 13. *Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$.*

- (1) *Si G est parabolique, alors G est égal à une union croissante de groupes finis cycliques. En particulier G est abélien, de torsion, et n'est pas de type fini ;*
- (2) *Si G est hyperbolique élémentaire, alors G est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/n$ ou à $(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/n) \rtimes \mathbb{Z}/2$. En particulier G est résoluble, et contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini.*

Exemple 14 (Groupes paraboliques). Des exemples de groupes paraboliques ont été donnés initialement par Wright [48]. A conjugaison près, tout sous-groupe parabolique est de la forme suivante.

Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 2 , et soient $(\alpha_k, \beta_k)_{k \geq 0}$ des couples de racines primitives de l'unité du même ordre satisfaisant $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 1)$ et $\alpha_k^{p_k} = \alpha_{k-1}$, $\beta_k^{p_k} = \beta_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

Posons $f_k = (\alpha_k x, \beta_k y)$. On veut maintenant choisir une suite (g_k) de composées d'applications de Hénon généralisées⁴ de façon à ce que l'union des groupes cycliques H_k engendrés par les

$$h_k = (g_1^{-1} \cdots g_k^{-1}) f_k (g_k \cdots g_1)$$

donne un exemple de groupe parabolique.

La condition sur les g_k s'exprime plus agréablement à l'aide de l'arbre de Bass-Serre. Une suite (g_k) définit une suite d'arêtes (non contiguës) $\text{id}S, g_1^{-1}S, g_1^{-1}g_2^{-1}S, \dots, g_1^{-1}g_2^{-1} \cdots g_k^{-1}S, \dots$ et également une suite décroissante de demi-géodésiques infinies Γ_k : Γ_k est définie comme le plus petit sous-arbre contenant toutes les arêtes de la suite précédente à partir de $g_1^{-1}g_2^{-1} \cdots g_k^{-1}S$. On choisit les g_k de façon à ce que pour tout k on ait

$$\Gamma_k \subset \text{Fix}(h_k) \text{ mais } \Gamma_{k-1} \not\subset \text{Fix}(h_k)$$

³ Il faut quand même éviter la pathologie suivante : deux isométries hyperboliques dont les géodésiques s'intersectent le long d'une demi-géodésique. Je ne connais pas d'argument général pour exclure cette possibilité.

⁴ Autrement dit la décomposition de chaque g_k dans le produit amalgamé $A *_A \cap E E$ est de longueur paire et commence (à gauche) par un élément de A .

Il s'agit essentiellement de choisir g_k qui commute avec f_{k-1} (et donc aussi avec tous les f_j d'indice $j < k$), mais pas avec f_k . Par exemple, en notant $d = \text{ordre}(\alpha_{k-1})$, si $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ on peut prendre $g_k = (y, y^{d+1} - x)$; et si $\alpha_{k-1}^p = \beta_{k-1}$, $\beta_{k-1}^q = \alpha_{k-1}$ avec $2 \leq p, q < d$, on peut prendre $g_k = (y, y^p - x) \circ (y, y^q - x)$.

Exemple 15 (Groupes hyperboliques élémentaires). Voici plusieurs exemples de la seconde situation dans la proposition 13. Soit $n \geq 3$, α une racine n ième de l'unité, et posons $g = (y, y^{n-1} - x)$, $f = (\alpha x, \alpha^{-1}y)$, $a = (y, x)$. On vérifie que f commute avec g^2 (mais pas avec g), et que l'involution a conjugue g à son inverse g^{-1} . Ainsi le groupe $\langle g, f, a \rangle$ est un groupe hyperbolique élémentaire isomorphe à $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n) \rtimes \mathbb{Z}/2$.

Si l'on remplace g par $g = (y, y^{n-1} - 2x)$, alors comme le déterminant jacobien de g est maintenant 2 il n'est plus possible de conjuguer g à son inverse, et $\langle g, f \rangle$ est un groupe hyperbolique élémentaire maximal isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$.

Dans ces deux exemples si l'on remplace f par $f = (\alpha x, \alpha y)$ on obtient des produits directs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$.

Comme mentionné dans l'introduction un automorphisme hyperbolique g admet une dynamique intéressante : il existe des ensembles de Julia J_g^+ et J_g^- associés à g , sur lesquels la dynamique (respectivement positive ou négative) de g est chaotique. Pour rendre compte de ces phénomènes on peut définir des courants positifs fermés μ_g^+ et μ_g^- dont les supports sont exactement J_g^+ et J_g^- (voir Bedford-Smillie [3] et Sibony-Fornaess [19]). Les potentiels de ces courants sont des fonctions plurisousharmoniques appelés les fonctions de Green associées à g .

Dans ma thèse j'établis un lien entre l'action sur l'arbre de Bass-Serre et la dynamique sur \mathbb{C}^2 , en montrant en particulier que deux applications de type Hénon f et g ont mêmes ensembles de Julia si et seulement si elles ont mêmes géodésiques. Ceci ne peut se produire que s'il existe $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $f^n = g^m$; ce qui peut aussi s'exprimer en disant que l'ensemble de Julia de f ne peut admettre qu'un nombre fini de symétries. Ceci est à rapprocher des résultats de Beardon, Baker et Erëmenko [2, 1] dans le cadre des ensembles de Julia des polynômes à une variable.

2.2.2 Courant invariant pour un groupe parabolique

On a ainsi obtenu une ébauche de dictionnaire entre la théorie de Bass-Serre et la théorie pluripotentielle, où chacun des bouts de la géodésique $\text{Géo}(g)$ dans l'arbre correspond à un courant invariant dans \mathbb{C}^2 . Il semblait plausible de pouvoir inclure les groupes paraboliques dans cette correspondance. Ceux-ci fixant un bout de l'arbre, il semble naturel de chercher un ensemble de Julia et un courant invariant associés à un tel groupe. Cette vague analogie est soutenue par

l'argument suivant.

Rappelons la construction du courant μ_g^+ dans le cas d'un automorphisme g égal à une composée d'application de Hénon. Choisissons une courbe algébrique évitant le point $[0 : 1 : 0]$, qui est l'unique point d'indétermination du prolongement de g^{-1} à \mathbb{P}^2 , et considérons le courant T obtenue en intégrant le long de cette courbe. Alors pour tout $k \geq 1$ le courant $(g^k)^*T$ est un courant d'intégration le long d'une courbe de degré d^k , où d est le degré de g . La suite $\frac{(g^k)^*T}{d^k}$ de courants de masse 1 converge vers le courant μ_g^+ .

Considérons maintenant un groupe parabolique normalisé H , c'est-à-dire sous la forme donnée dans l'exemple 14, dont on conserve les notations. En choisissant T comme ci-dessus, pour tout $k \geq 1$ le courant $(g_k \circ \dots \circ g_1)^*T$ est un courant d'intégration le long d'une courbe de degré $\prod_{i=1}^k d_i$ où $d_i = \deg(g_i)$. En normalisant on obtient une suite de courants de masse 1 :

$$\frac{(g_k \circ \dots \circ g_1)^*T}{\prod_{i=1}^k d_i}.$$

Si cette suite converge vers un courant⁵ μ_H^+ , il est facile de voir que μ_H^+ est invariant par tout élément de H . Le seul problème est que cette suite pourrait converger vers le courant nul (ce qui revient à dire que sur \mathbb{P}^2 elle converge vers le courant d'intégration le long de la droite à l'infini).

Dans le cas du courant μ_g^+ cet écueil est évité en considérant un recouvrement de \mathbb{C}^2 par trois zones qui permettent de coder la dynamique de g : on écrit $\mathbb{C}^2 = V \cup V^+ \cup V^-$ où V est compact, V^+ est un voisinage de $[1 : 0 : 0]$ et V^- est un voisinage de $[0 : 1 : 0]$ tels que

$$\begin{aligned} \forall z \in V^-, g(z) \in V^- \text{ et } \|g(z)\| &\geq \|z\|^d; \\ \forall z \in V^+, g^{-1}(z) \in V^+ \text{ et } \|g^{-1}(z)\| &\geq \|z\|^d; \\ g(V) &\in V \cup V^-; \\ g^{-1}(V) &\in V \cup V^+. \end{aligned}$$

Suivant [20] pour $R \in \mathbb{R}$ suffisamment grand les définitions suivantes conviennent

⁵ Le + dans la notation μ_H^+ est là pour souligner l'analogie avec μ_g^+ ; cependant il n'y a pas de μ_H^- . On pourrait être tenté de noter simplement μ_H mais ceci risquerait de faire penser à une mesure, par analogie avec la mesure d'entropie maximale μ_g associée à g . L'existence d'une mesure rendant compte d'une hypothétique entropie du groupe H est une des questions mentionnées à la fin de [31], à laquelle je ne sais toujours pas répondre.

(voir figure 2.2) :

$$V = \{(x, y); |x| \leq R, |y| \leq R\};$$

$$V^+ = \{(x, y); |x| \geq R, |x| \geq |y|\};$$

$$V^- = \{(x, y); |y| \geq R, |y| \geq |x|\};$$

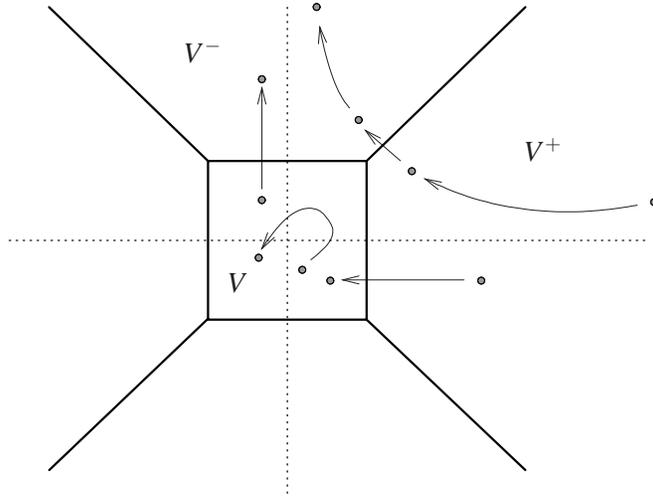


FIG. 2.2 – Les flèches donnent une idée de la dynamique par itération de g .

Si l'on suppose de plus que la courbe définissant le courant T est incluse dans $V \cup V^+$, alors tous les courants $(g^k)^*T$ sont également de support contenu dans $V \cup V^+$, ce qui interdit à la limite μ_g^+ de mettre de la masse au point $[0 : 1 : 0]$ et donc exclut la possibilité que μ_g^+ soit le courant d'intégration sur la droite à l'infini.

Dans le cas d'un groupe parabolique on peut user exactement du même argument s'il existe un recouvrement (V, V^+, V^-) de \mathbb{C}^2 qui convient simultanément pour tous les g_i . Je dis dans ce cas que le groupe parabolique est **uniforme**, et j'obtiens le

Théorème 16. *Soit H un groupe parabolique uniforme. Il existe un courant μ_H^+ positif fermé de type $(1, 1)$ et de masse 1 dans \mathbb{C}^2 , qui est invariant par H : pour tout $h \in H$ on a $h^*\mu_H^+ = \mu_H^+$.*

Un second aspect du papier [31] est la mise en évidence d'exemples pathologiques lorsqu'on supprime l'hypothèse d'uniformité. C'est en fait la mise au point de ces exemples qui était à mes yeux l'aspect le plus intéressant de ce travail, et qui m'avait demandé le plus d'effort. J'obtiens la

Proposition 17. *Il existe des groupes paraboliques H sans aucun courant invariant (parmi la classe des courants positifs fermés de type $(1,1)$ et de masse finie). De plus on peut produire de tels exemples où H est localement, ou même globalement, linéarisable.*

L'existence de tels groupes H qui soit localement linéarisables est particulièrement surprenante au vue de l'analogie suivante, qui me semblait a priori naturelle :

Dans le cas d'un automorphisme g de type Hénon, si g admet un point périodique attractif p alors le bord topologique du bassin d'attraction de p est exactement le support⁶ du courant μ_g^+ , autrement dit l'ensemble de Julia J_g^+ .

Dans le cas d'un groupe parabolique H localement linéarisable, on s'attendrait à ce que le bord du bassin de linéarisation soit le support du courant d'un courant invariant par H .

Or cette idée est doublement mise en défaut : d'une part il semble qu'un groupe parabolique uniforme ne soit jamais localement linéarisable ; en tous cas je ne sais produire aucun exemple où H serait à la fois localement linéarisable et où le théorème 16 produirait un courant invariant (sans même parler de vérifier que le support du courant est le bord du bassin de linéarisation). D'autre part la proposition 17 dit qu'il existe des exemples sans aucun courant invariant, supporté sur le bord du bassin ou non.

Je termine ce paragraphe avec quelques commentaires sur une remarque qui m'avait échappée lors de la rédaction de [31] ; à savoir que la preuve de la proposition 17 peut produire des exemples globalement linéarisables. Par exemple, reprenons les notations de l'exemple 14, et posons pour tout $k \geq 1$: $p_k = 2$, $\alpha_k = \beta_k$ racine de l'unité d'ordre $d_k = 2^k$, et

$$g_k = (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x) \circ (y, c_k y^{d_k} + x) \circ (y, \varepsilon_k y^{d_k} + x)$$

avec $0 < \varepsilon_k < c_k$. Alors si les c_k (et donc aussi les ε_k) décroissent suffisamment rapidement vers 0 on obtient un groupe globalement linéarisable :

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{2k} \circ \cdots \circ g_1$$

est un automorphisme holomorphe de \mathbb{C}^2 (on prend des composés jusqu'à l'indice $2k$ dans la limite ci-dessus pour avoir des automorphismes tangents à l'identité). D'autre part, une fois les c_k fixés, si l'on prend les ε_k suffisamment petits

⁶ En particulier si g admet plusieurs tels points attractifs on obtient plusieurs bassins avec le même bord topologique. G. Buzzard [6] a même construit des exemples avec une infinité de tels bassins !

devant les c_k on garantit qu'il n'existe pas de courant invariant par H (voir [31, §6.3]).

Ceci semble en contradiction avec le raisonnement suivant : si H est un groupe parabolique et φ est un automorphisme holomorphe de \mathbb{C}^2 tels que $\varphi H \varphi^{-1}$ soit un groupe de rotations linéaires $R = \{(\alpha x, \beta y)\}$, alors on peut prendre une droite invariante par R et considérer le tiré en arrière par φ du courant d'intégration sur cette droite pour obtenir un courant invariant par H . Le point est que la proposition 17 ne prend en compte que les courants de masse finie ; or la construction précédente produit un courant certes invariant par H mais de masse infinie. En effet $\varphi^* T$ est la limite des courants $(g_{2k} \circ \dots \circ g_1)^* T$ dont la masse, égale au degré de $g_{2k} \circ \dots \circ g_1$, tend vers l'infini avec k . Il resterait à explorer l'idée qu'en admettant des courants de masse infinie on puisse se débarrasser du résultat négatif de la proposition 17.

2.3 Digressions

2.3.1 Transformations réversibles

Dans l'exemple 15 on a pu constater qu'il existait des automorphismes hyperboliques qui sont conjugués à leur inverse dans $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Ceci est lié à la notion d'application réversible qui est une notion importante d'un point de vue physique (voir [30]). Une condition nécessaire est que le déterminant jacobien soit égal à ± 1 . On peut montrer par un calcul explicite que tout automorphisme hyperbolique de déterminant jacobien 1 et de longueur 2 ou 4 est conjugué à son inverse. Cependant, à l'aide de la notion de couleur introduite dans [21, §1.5] il est possible de montrer qu'un automorphisme g hyperbolique de déterminant jacobien 1, générique et de longueur au moins 6, n'est pas conjugué à son inverse. Voici brièvement l'argument :

Pour tout chemin \mathcal{P} de deux arêtes fS, gS dont le sommet central est de type E , on appelle **couleur** de \mathcal{P} la double classe $Sfg^{-1}S$. La couleur est invariante sous action de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ sur l'arbre de Bass-Serre, et la géodésique d'un automorphisme hyperbolique g de longueur $2l$ porte l couleurs qui se répètent de façon périodique. Si ces couleurs sont deux à deux distinctes (ce qui est une condition générique) et si $l \geq 3$, alors les suites associées à g et g^{-1} sont différentes (même à permutation cyclique près) ce qui interdit à g et g^{-1} d'être conjugués.

Dans le groupe de Cremona je m'attends à ce que la situation soit similaire, mais je ne connais pas la réponse à la question suivante :

Question 18. Est-il vrai qu'un élément générique⁷ du groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ n'est pas conjugué à son inverse ?

2.3.2 Groupes de torsion

Dans le contexte d'origine des groupes linéaires, l'alternative de Tits s'énonce de façon légèrement différente suivant la caractéristique du corps de base. Plus précisément, une hypothèse de type fini est nécessaire en caractéristique positive, mais est superflue en caractéristique nulle. Ainsi, il paraît naturel de vouloir se passer de toute hypothèse de finitude pour énoncer une alternative de Tits pour le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, ou pour le groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$. Pourtant S. Cantat se trouve contraint de rajouter une telle hypothèse pour prouver l'alternative dans ce dernier cas [7]. Le problème vient de ce qu'on ne dispose pas d'une classification suffisamment précise des sous-groupes de $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ ne contenant aucun élément hyperbolique. Par exemple je ne connais pas la réponse à la question suivante.

Question 19. Soit H un sous-groupe de torsion dans le groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$, dont le degré des éléments n'est pas borné. Alors H est-il forcément abélien ?

Dans le cadre des automorphismes polynomiaux un tel groupe serait un groupe parabolique, et donc en particulier abélien.

2.3.3 Produits amalgamés

La structure de produit amalgamé du groupe des automorphismes du plan est tellement riche de conséquences qu'il est tentant de chercher une structure analogue dans des situations voisines.

Dans [49] Wright remarque que la présentation par générateurs et relations du groupe de Cremona due à Iskovskikh peut s'exprimer en termes d'un produit amalgamé de trois groupes le long de leurs intersections deux à deux. Les sous-groupes en question sont $H_1 = (\text{PGL}_2 \times \text{PGL}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2$, i.e. le groupe des transformations birationnelles qui s'étendent en des automorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; H_2 le groupe de Jonquières des transformations préservant le pinceau des droites verticales $x = cte$; et $H_3 = \text{PGL}_3$.

Je voudrais maintenant signaler l'existence d'une structure de produit amalgamé qui est moins connue, dans le contexte des automorphismes modérés en dimension 3. Rappelons que le groupe des automorphismes polynomiaux modérés de \mathbb{C}^n est défini comme le groupe engendré par les automorphismes affines et

⁷ dans un sens à préciser, mais qui devrait exclure les éléments d'ordre fini...

triangulaires. Dans [46] Umirbaev donne un système de relations pour le groupe modéré de \mathbb{C}^3 . Voici une manière (j’espère éclairante) de réinterpréter son résultat.

Étant donnée la compactification de \mathbb{C}^3 en l’espace projectif \mathbb{P}^3 par ajout d’un plan à l’infini, considérons les drapeaux (D, p) où D est une droite à l’infini et p est un point de D . On peut penser à D comme à une famille de plans parallèles de \mathbb{C}^3 (D étant l’intersection d’un quelconque de ces plans avec le plan à l’infini), et à p comme à une famille de droites parallèles contenues dans ces plans. A l’aide de ces drapeaux nous définissons une famille de groupes généralisant le groupe triangulaire E . Notons $E_{(D,p)}$ le groupe des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^3 , admettant l’origine comme point fixe, tangents à l’identité en ce point, et préservant le drapeau (D, p) , ou autrement dit préservant les familles de plans et droites associées à (D, p) . Ainsi, si $[x : y : z : 0]$ sont les coordonnées homogènes du plan à l’infini, et si nous prenons D la droite $z = 0$ et $p = [1 : 0 : 0 : 0]$, alors $E_{(D,p)}$ est le groupe triangulaire usuel (avec partie linéaire triviale).

Le résultat suivant montre que, contrairement à ce qui semble être l’opinion générale, il existe bien une structure de produit amalgamé pour le groupe modéré en dimension 3 (dont on peut d’ailleurs se demander si elle n’a pas un équivalent en toute dimension⁸).

Proposition 20. *Le groupe G des automorphismes modérés de \mathbb{C}^3 fixant l’origine et tangent à l’identité est le produit amalgamé des $E_{(D,p)}$ le long de leurs intersections deux à deux.*

Il n’est pas difficile de vérifier que les $E_{(D,p)}$ engendrent G . En ce qui concerne les relations, il suffit de vérifier que chacune des relations listées par Umirbaev [46] est une relation à l’intérieur de l’un des $E_{(D,p)}$.

Je dois avouer que je ne suis pas convaincu que l’on puisse tirer la moindre conséquence utile de ces structures de produit amalgamé, aussi bien pour le groupe de Cremona que pour le groupe modéré (ou plus exactement le sous-groupe G). C’est bien la structure de produit amalgamé sur *deux* facteurs qui est essentielle dans le cas du plan affine. Notons cependant que la proposition 20 est essentiellement équivalente au fait que le groupe modéré en dimension 3 n’est pas égal au groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ entier. La preuve repose en effet lourdement sur le papier [45] de Shestakov et Umirbaev dans lequel ils prouvent qu’il existe des automorphismes non modérés sur \mathbb{C}^3 , tel par exemple l’automorphisme de Na-

⁸En dimension 2 il n’est pas difficile de déduire du théorème de Jung que le groupe des automorphismes fixant l’origine et tangents à l’identité est le produit *libre* des E_p , où E_p est le sous-groupe des automorphismes préservant le pinceau des droites passant par le point à l’infini p .

gata. Inversement une preuve directe (géométrique ?) de la proposition 20 aurait certainement pour corollaire une preuve simplifiée du résultat principal de [45].

2.4 Plongements de réseaux

2.4.1 Résumé des résultats

Trois observations amusantes sont à l'origine de l'article [8], co-écrit avec Serge Cantat.

D'une part, considérons un automorphisme f du plan affine réel qui soit un homéomorphisme de Brouwer, c'est-à-dire sans point fixe et préservant l'orientation. Il n'était pas clair qu'un tel automorphisme soit à dynamique complètement triviale : par exemple il n'est pas difficile de produire des exemples d'homéomorphismes de Brouwer analytiques réels admettant une infinité de bandes de Brouwer. Cependant on parvient sans trop de mal à prouver que tout homéomorphisme de Brouwer polynomial est globalement analytiquement conjugué à une translation (voir [8, proposition 4.5]).

D'autre part, il est possible de produire des sous-groupes libres de $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$ dont tous les éléments non triviaux sont de type Hénon (dynamique riche sur \mathbb{C}^2) et de Brouwer (conjugué à des translations sur \mathbb{R}^2 par la remarque précédente).

Enfin, on peut se demander s'il est possible de plonger des réseaux plus généraux de façon exotique dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$, où $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un problème que je n'avais su résoudre au moment de ma thèse était par exemple la question de l'existence de plongements du groupe fondamental d'une surface de genre 2 dans $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$, de façon à ce que l'image contienne des automorphismes de type Hénon. Il se trouve finalement qu'il existe une stratégie générale pour produire (sans doute) une multitude de tels exemples, sur le corps \mathbb{C} ou \mathbb{R} indifféremment (voir [8, §5.3] et §2.4.2 ci-dessous).

Ceci laissait ouverte la possibilité d'une action polynomiale et proprement discontinue de Γ_g (le groupe fondamental d'une surface de genre g) sur le plan réel. Nous prouvons cependant le résultat négatif :

Théorème 21 ([8, théorème 5.1]). *Tout sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$ isomorphe à Γ_g (où $g \geq 2$) contient un élément distinct de l'identité qui possède un point fixe dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.*

La preuve est basée sur les mêmes idées que la construction du paragraphe suivant : on considère le graphe de groupe obtenu en quotientant l'arbre de Bass-Serre par l'action d'un tel groupe. On sait, par un résultat remontant à Stallings, qu'un tel graphe de groupe provient d'un certain découpage de la surface de

genre g par des courbes simples. En particulier, certains groupes fondamentaux des composantes connexes résultant de ce découpage doivent être des groupes libres non abéliens. Or il n'est pas difficile de montrer que si un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$ ne contient que des automorphismes de Brouwer alors les stabilisateurs des sommets dans l'arbre de Bass-Serre sont tous résolubles. On obtient ainsi la contradiction attendue.

Par ailleurs les cas des groupes libres et des groupes fondamentaux de surfaces épuisent la liste des candidats (au moins pour les réseaux sans torsion), à cause du résultat de rigidité :

Théorème 22 ([8, théorème 3.1]). *Soit k un corps, et soit $\Gamma \subset G$ un réseau d'un groupe de Lie réel simple. S'il existe un morphisme injectif $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$, le groupe G est isomorphe à $\text{PSO}_{1,n}$ ou à $\text{PSU}_{1,n}$ pour un certain n . De plus, si G est différent de $\text{PSO}_{1,2}$, l'image de ρ est contenue dans un conjugué du groupe affine.*

La première assertion est une simple conséquence de la propriété (T). Pour traiter le cas des groupes $\text{PSO}_{1,n}$ ou $\text{PSU}_{1,n}$, qui ne satisfont pas la propriété (T), on utilise un résultat de Shalom [44] qui caractérise les actions sans point fixe d'un réseau $\Gamma \subset \text{PSO}_{1,n}$ ou $\text{PSU}_{1,n}$ sur un arbre.

2.4.2 Un nouvel exemple de plongement

Je me propose ici de donner un nouvel exemple de plongement de Γ_2 , groupe fondamental de la surface de genre 2, dans $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$. Je commence par expliquer la stratégie générale, avant de l'appliquer à un exemple particulier.

Étant donnée S une surface compacte de genre g , on considère sur S un système de courbes fermées simples deux à deux disjointes $(C_i)_{i=1}^n$, de telle façon que chacune des composantes connexes de $S \setminus \cup C_i$ admette un groupe libre pour groupe fondamental. On construit ensuite un graphe de groupes, qui va coder comment reconstruire le groupe fondamental Γ_g à partir de la donnée de ces groupes libres. Les courbes C_i se répartissent en deux types, suivant que leur découpage vient augmenter le nombre de composantes connexes du complément ou non. Dans le premier cas (telle la courbe centrale sur la figure 2.3), on amalgame deux groupes, suivant la procédure bien connue de van Kampen. Dans le second cas (telle la courbe de droite sur la figure 2.3), on réalise une extension HNN, qui consiste à ajouter une « lettre stable » conjuguant les cycles de part et d'autre de la courbe C_i supprimée. Chaque composante connexe du complément des C_i correspond à un sommet du graphe de groupes, étiqueté par son groupe

fondamental. Chaque arête est étiquetée par \mathbb{Z} , et vient avec deux morphismes injectifs de \mathbb{Z} dans chacun des groupes libres correspondant aux sommets extrémaux de l'arête. Ces deux sommets sont distincts lorsque la courbe C_i est de type produit amalgamé ; ils coïncident lorsque la courbe C_i est de type extension HNN.

Par ailleurs, si $G \subset \text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$ est un sous-groupe d'automorphismes, on peut obtenir un graphe de groupes en considérant le quotient de l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre. La question suivante est alors naturelle :

Question 23. Tout graphe de groupe provenant d'une décomposition d'une surface de genre g peut-il être réalisée par un plongement de Γ_g dans $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$?

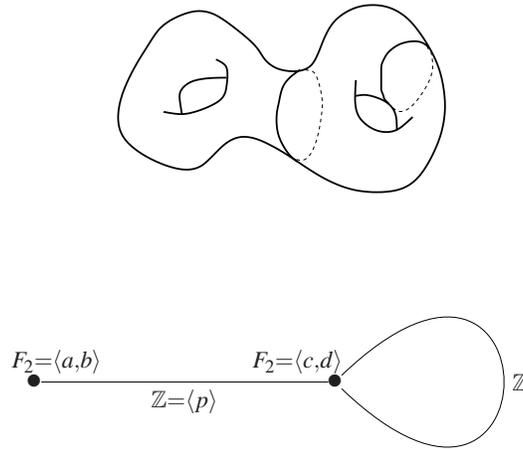


FIG. 2.3 – Découpage de la surface de genre 2 et graphe de groupes correspondant.

Restreignons-nous maintenant au genre 2. Dans ce cas, à isotopie près il y a exactement deux façons de découper la surface S à l'aide d'une seule courbe (l'une ou l'autre des deux courbes représentées sur la figure 2.3). Le paragraphe 5.3 de [8] montre que chacun des deux graphes de groupes provenant des découpages le long de l'une de ces courbes est réalisable. Pour étayer un peu la spéculation qui ouvre ce même paragraphe, à savoir que la réponse à la question 23 est probablement positive, je me propose ici de donner un nouvel exemple correspondant au découpage de la surface par 2 courbes, comme indiqué sur la figure 2.3.

Le graphe de groupes est indiqué sur la figure, et une présentation est (je laisse le lecteur dessiner les cycles correspondant à chaque générateur) :

$$\Gamma_2 = \langle a, b, c, d, p, q; aba^{-1}b^{-1} = p = c^{-1}d, c = qdq^{-1} \rangle.$$

Je définis maintenant un morphisme φ de Γ_2 dans $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$. Posons $\varphi(p) = P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et choisissons e un automorphisme triangulaire qui commute avec P ; par exemple $e = (x+y^3, y)$ convient. En considérant un quadrilatère idéal dans le disque de Poincaré, il est aisé de voir qu'il existe deux matrices $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ engendrant un groupe libre et dont le commutateur est égal à P (voir [8, Lemme 5.4]). On pose alors $\varphi(a) = eAe^{-1}$ et $\varphi(b) = eBe^{-1}$. Par ailleurs, il existe deux matrices paraboliques $C, D \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ qui satisfont $D = CP$ (voir figure 2.4). Il existe donc $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ tel que MDM^{-1} soit triangulaire, et donc commute avec e . On peut vérifier que les matrices paraboliques C et D ont même trace⁹, elles sont donc conjuguées : $C = NDN^{-1}$ avec $N \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Posons finalement $\varphi(c) = C$, $\varphi(d) = D$ et $\varphi(q) = g = NM^{-1}eM$.

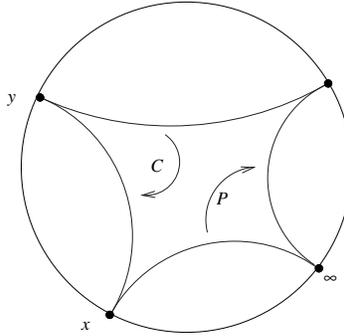


FIG. 2.4 – Les matrices P, C et $D = CP$ sont paraboliques, fixant respectivement les points au bord ∞, y et x .

Par construction on a les égalités

$$P = (eAe^{-1})(eBe^{-1})(eA^{-1}e^{-1})(eB^{-1}e^{-1}) = C^{-1}D \quad (2.1)$$

$$(NM^{-1}eM)D(NM^{-1}eM)^{-1} = C. \quad (2.2)$$

En conséquence $\varphi: \Gamma_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ est un morphisme. Reste à voir qu'il est injectif. Ceci peut être vérifié de façon similaire à la preuve de [8, Proposition 5.7]. Je n'inclus pas les détails, car je ne sais pas simplifier le pénible argument de cette preuve¹⁰. Il est possible que je sois passé ici à côté d'un argument plus conceptuel. En tous cas, le manque d'un tel argument me semble le principal obstacle pour répondre positivement à la question 23.

⁹ On a $CP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix} = D$, ainsi si les traces $a+d$ et $c-a-d$ de C et D étaient opposées (2 et -2) on aurait $c = 0$, ce qui contredirait $x \neq \infty$ sur la figure 2.4.

¹⁰...dont je suis responsable.

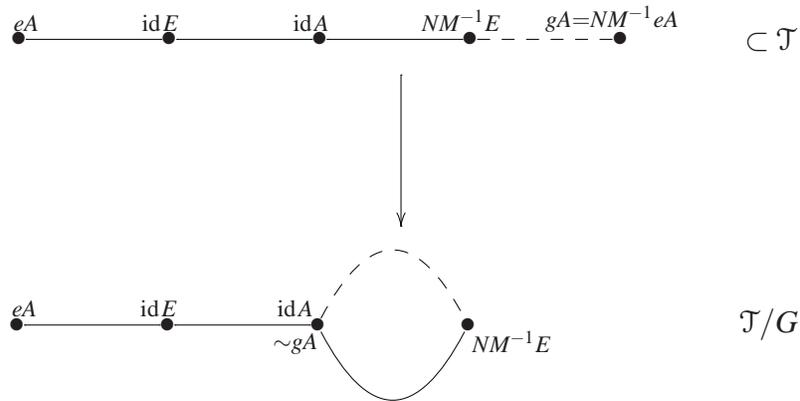


FIG. 2.5 – Le graphe quotient, un sous-arbre maximal et son relevé dans \mathcal{T} .

Admettant l'injectivité de φ , on peut vérifier que l'on obtient bien le graphe de groupes attendu en quotientant \mathcal{T} par $G = \varphi(\Gamma_2)$. On représente sur la figure 2.5 le graphe quotient \mathcal{T}/G , où on obtient un sous-arbre maximal en enlevant l'arête représentée en pointillés. Suivant la procédure décrite dans [8, §2.4] on relève cet arbre maximal dans \mathcal{T} . Notons tout d'abord que les sommets de type E sont ici superflus, car ils correspondent à des produits amalgamés triviaux du type $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Oublions-les, et vérifions qu'on obtient alors le même graphe de groupe que celui de la page précédente.

D'une part les stabilisateurs des sommets eA , idA et de l'arête $eA - idA$ sont respectivement les groupes $F_2 = \langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle$, $F_2 = \langle \varphi(c), \varphi(d) \rangle$ et $\langle \varphi(p) \rangle$, avec les plongements du troisième dans les deux premiers provenant des égalités (2.1).

D'autre part, comme $C = gDg^{-1}$, le stabilisateur de l'arête $idA - gA$ est le groupe $\mathbb{Z} = \langle C \rangle$. Comme l'automorphisme $g = NM^{-1}eM$ envoie idA sur gA , et que $gDg^{-1} = C$, on récupère les deux plongements de \mathbb{Z} dans $F_2 = \langle C, D \rangle$ attendus.

Chapitre 3

Construction de sous-groupes normaux

Introduction

Je présente dans ce chapitre les articles [21] et [9]. Il s'agit de la construction de sous-groupes normaux dans le groupe G des automorphismes unimodulaires du plan affine d'une part, et dans le groupe de Cremona d'autre part.

Dans le cas des automorphismes polynomiaux, la structure de produit amalgamé permet d'appliquer une version de la théorie de la petite simplification, comme expliqué dans le livre de référence de Lyndon et Schupp [36, chap. V.11]. Ceci avait été noté dès 1974 par Danilov [14], qui remarque que tout automorphisme suffisamment générique de longueur paire ≥ 26 satisfait la condition classique $C'(1/6)$, et donc engendre un sous-groupe normal propre. Dans [21], Jean-Philippe Furter et moi-même raffinons le résultat de Danilov et obtenons le

Théorème 24. *Soit G le groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ de déterminant jacobien 1, et soit $f \in G$.*

- (1) *Si f est non trivial et de longueur ≤ 8 , alors le groupe normal engendré par f est égal à G .*
- (2) *Si f est suffisamment générique et conjugué à un élément de longueur paire ≥ 14 , alors le groupe normal engendré par f (dans G , ou même dans $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$) est un sous-groupe strict de G .*

La preuve est basée sur la construction de diagrammes de van Kampen, dont on contrôle la courbure à l'aide de calculs fins dans l'arbre de Bass-Serre. Je donne une idée de la preuve dans le §3.2, après avoir rappelé la construction des

diagrammes de van Kampen dans le §3.1.

Comme indiqué dans l'introduction de [21], une motivation pour ce travail était de chercher à montrer, par une méthode analogue, la non-simplicité du groupe de Cremona. En effet en un sens le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ n'est pas loin d'être un produit amalgamé : par le résultat d'Iskovskikh [25] présenté au chapitre 1, on peut voir le groupe de Cremona comme le quotient du produit amalgamé de deux sous-groupes par une *unique* relation. Il restait cependant à voir que seule la relation principale de l'énoncé du théorème 8 est indispensable : les diagrammes de van Kampen permettent de visualiser comment la seconde relation se déduit (de façon plutôt non évidente) de la première (voir §3.1.3).

Si l'utilisation des diagrammes de van Kampen permet de compléter de façon convaincante le résultat d'Iskovskikh, cette technique semble par contre devoir échouer en ce qui concerne la non-simplicité du groupe de Cremona. En effet la relation imposée étant de longueur trop petite (à savoir 6), on ne se retrouve pas dans des conditions de petite simplification : les diagrammes de van Kampen que l'on obtient contiennent à la fois des triangles et des sommets de valence 3... Après tout cela n'a rien d'étonnant, déjà dans le monde des groupes de présentation finie les groupes satisfaisant la condition $C'(1/6)$ ne forment qu'une petite sous-classe des groupes hyperboliques. Ainsi dans le classique modèle à densité dû à Gromov, ces propriétés sont satisfaites presque sûrement respectivement pour les densités $d < 1/12$ et $d < 1/2$ (voir par exemple [41, chapitre I]).

La preuve exposée dans [9] de la non-simplicité de $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ utilise le fait remarquable que le groupe de Cremona agit par isométries sur un espace hyperbolique de dimension infinie. Ceci a été remarqué par Serge Cantat, qui a exploité ce fait pour démontrer par exemple que le groupe de Cremona satisfait l'alternative de Tits [7]. J'avais moi-même prouvé dans ma thèse [32] l'alternative de Tits pour $\text{Aut}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2)$ en utilisant l'action sur l'arbre de Bass-Serre. Il était tentant de pousser l'analogie et de chercher à obtenir une preuve de la non-simplicité qui soit parallèle à l'argument de petite simplification du cas polynomial : il s'agit de faire jouer à l'espace hyperbolique de dimension infinie le rôle précédemment tenu par l'arbre de Bass-Serre. Il se trouve que cette stratégie fonctionne étonnamment bien !

J'explique dans la section 3.3 comment la non-simplicité du groupe de Cremona se ramène à un critère général concernant un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. Je donne ensuite une preuve complète de ce critère dans le cas d'un groupe agissant sur un arbre. A noter que la preuve du cas général se ramène essentiellement à ce cas particulier, via un lemme usuel

qui permet d'approximer uniformément un nombre fini n de segments d'un espace hyperbolique par un arbre.

3.1 Diagrammes de van Kampen et petite simplification

Dans cette section je décris la construction de diagrammes de van Kampen dans le cas d'un produit amalgamé de deux facteurs $G = G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$. Je veux à la fois introduire le minimum nécessaire pour le §3.1.3 (fin de la preuve du théorème d'Iskovskikh) et le §3.2 (idée de preuve du théorème 24), et tenter d'être un peu moins aride que dans [21]. A noter que si la théorie de la petite simplification dans le cas classique d'un groupe de présentation finie est bien documentée dans la littérature, les cas d'un produit libre et, pire, d'un produit amalgamé sont moins bien lotis. En particulier nous avons été incapables de localiser une référence pour les deux définitions équivalentes de condition $C'(\lambda)$ (voir [21, lemme 33]). J'en donne ci-dessous une preuve complète (lemme 26, suivant l'idée de preuve donnée dans [21]), en guise d'illustration des notions introduites dans ce paragraphe.

3.1.1 Diagrammes

Soit $G = G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$ un produit amalgamé, équipé de la métrique des mots $|\cdot|$. Rappelons qu'une composition $u_1 \cdots u_n$, où $u_i \in G$, est dite **réduite** (resp. **semi-réduite**) si $|u_1 \cdots u_n| = |u_1| + \cdots + |u_n|$ (resp. si $|u_i u_{i+1}| \geq |u_i| + |u_{i+1}| - 1$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$). D'autre part un mot réduit $u = x_1 \cdots x_m$, où $x_i \in G_1$ ou G_2 , est **strictement** (resp. **faiblement**) **cycliquement réduit** si $m \leq 1$ ou si x_m et x_1 sont dans des facteurs différents de G (resp. le produit $x_m x_1$ n'est pas dans $G_1 \cap G_2$).

Soit $N \triangleleft G$ un sous-groupe normal. Les diagrammes de van Kampen sont un outil combinatoire pour visualiser les éventuelles simplifications qui apparaissent lorsqu'on compose des éléments du groupe N . Introduisons la notion d'ensemble symétrisé, dont les éléments vont venir étiqueter les régions de nos diagrammes. Un sous-ensemble R de G est **symétrisé** si tous les éléments de R sont faiblement cycliquement réduits et si pour tout $r \in R$, tous les conjugués faiblement cycliquement réduits de r et r^{-1} appartiennent à R . Dans le cas typique où R ne contient que des isométries hyperboliques (pour l'action sur l'arbre de Bass-Serre associé à G), la condition r « faiblement (resp. strictement) cycliquement réduits » revient à dire que la géodésique $\text{Géo}(r)$ intersecte (resp. contient)

l'arête $\text{id}(G_1 \cap G_2)$. En particulier, on peut associer un ensemble symétrisé R au sous-groupe normal N en considérant l'union de tous les éléments de N faiblement cycliquement réduits. On peut alors écrire tout élément $h \in N$ sous la forme

$$h = \psi_1 r_1 \psi_1^{-1} \circ \dots \circ \psi_n r_n \psi_n^{-1},$$

avec $r_i \in R$ pour tout i , et tel que chaque facteur $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$ soit semi-réduit.

J'explique maintenant comment associer un diagramme à une telle factorisation de $h \in N$, en illustrant cette procédure générale par l'exemple suivant.

Exemple 25. Considérons $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, et notons a, b des générateurs respectifs de chaque facteur. Supposons que R soit un ensemble symétrisé contenant $r_1 = bab^2a$, $r_2 = ba^{-2}b^{-1}ab$ et $r_3 = ab^{-2}ab^{-1}$ (r_1 et r_3 sont strictement cycliquement réduits, alors que r_2 n'est que faiblement cycliquement réduit). Notons $N \triangleleft G$ le sous-groupe normal engendré par r_1, r_2 et r_3 . Considérons

$$h = ba^{-1}r_1ab^{-1}r_2r_3 \in N.$$

Autrement dit $\psi_1 = ba^{-1}$ et $\psi_2 = \psi_3 = \text{id}$. L'usage des diagrammes va permettre de visualiser les simplifications qui amènent à l'égalité $h = ab^{-1}abab$.

En première approximation pour chaque facteur $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$ on considère le diagramme en forme de lasso obtenu en juxtaposant des segments étiquetés par les lettres¹ composant le mot ψ_i , puis en formant une boucle correspondant au mot r_i (englobant ainsi une région D_i), et enfin en parcourant la première série de segments en sens inverse, ce qui correspond à ψ_i^{-1} . Le problème est que ce diagramme n'est presque jamais réduit², au sens où l'un des deux problèmes suivants apparaît :

- ou bien r est strictement cycliquement réduit, et alors on a deux segments consécutifs dans le même facteur (c'est le cas pour le premier facteur de l'exemple 25) ;
- ou bien r est faiblement cycliquement réduit, et le mot lu en parcourant la boucle admet deux segments avec étiquettes dans le même facteur (c'est le cas pour le deuxième facteur de l'exemple 25).

On sort de ce dilemme en admettant des demi-segments et des sommets secondaires, comme illustré sur la figure 3.1. Dans ces diagrammes les segments

¹ Comme on considère ici le groupe libre $F_2 = \langle a, b \rangle$ comme un produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, les « lettres » sont de la forme a^n ou b^n avec $n \in \mathbb{Z}$. Ceci est différent de la théorie classique dans le contexte des groupes de présentation finie, où les lettres pour le groupe libre à deux générateurs seraient limitées à a, b, a^{-1} et b^{-1} .

² En fait $\psi r \psi^{-1}$ donne lieu à un diagramme réduit si et seulement si r est strictement cycliquement réduit et $\psi \in G_1 \cap G_2$, ce qui est le cas pour le troisième facteur de l'exemple 25.

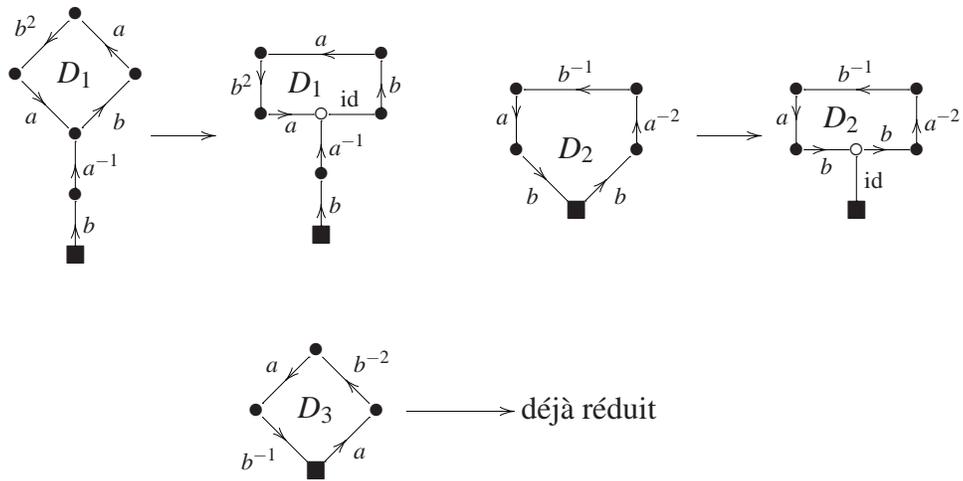


FIG. 3.1 – Les trois lassos de l'exemple 25, correspondant à $ba^{-1}r_1ab^{-1}$, r_2 et r_3 .

• — • reliant des sommets primaires sont par convention de longueur 1. Il y a en principe un sommet secondaire \circ au milieu de chaque segment, mais on ne les représente que lorsqu'ils sont de valence au moins 3. Ainsi tout demi-segment \bullet — \circ reliant un sommet primaire à un sommet secondaire est de longueur $1/2$. Le point base \blacksquare est un sommet primaire distingué.

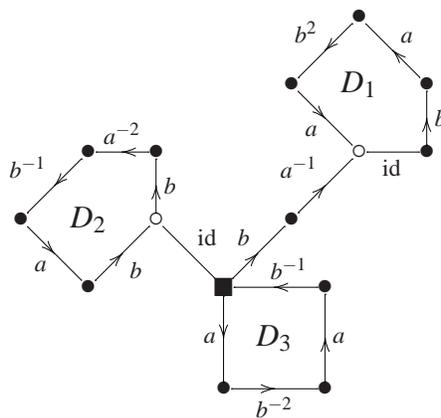


FIG. 3.2 – Le bouquet de lassos.

On forme ensuite un diagramme planaire en identifiant les points bases des

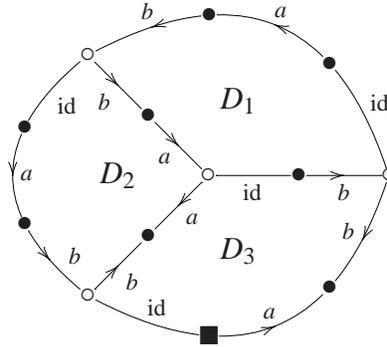


FIG. 3.3 – Le diagramme de van Kampen réduit.

lassos précédents, et en les disposant dans le sens trigonométrique comme représenté sur la figure 3.2.

On obtient ainsi un diagramme où le défaut de réduction peut se produire pour les segments se succédant au point base. Lorsque deux segments successifs ont des étiquettes dans le même facteur on peut procéder à un re-étiquetage local et à une identification qui fait chuter le périmètre global par 1 ou 2 (voir [21, étape 3 de la preuve du théorème 36]). Après un nombre fini de telles identifications, on obtient un diagramme de van Kampen réduit (voir figure 3.3). A noter que le périmètre des régions D_1, D_2 et D_3 est resté constant (égal à 4) au cours de ces identifications. En parcourant le périmètre de ce dernier diagramme à partir du point base ■, on lit le mot $h = ab^{-1}abab$ comme annoncé.

3.1.2 Petite simplification

Dans ce paragraphe je prouve l'équivalence entre deux définitions possibles de la condition $C'(\lambda)$. Cette équivalence est bien connue dans le contexte des groupes de présentation finie ; mais J.-P. Furter et moi-même n'avons pu trouver une référence dans le cadre d'un produit amalgamé. A noter que le +1 dans le point (2) du lemme 26 n'apparaît pas dans le contexte des groupes de présentation finie : c'est probablement ce qui a trompé Danilov qui, comme mentionné dans l'introduction de [21], utilise une version erronée de la condition $C'(1/6)$ dans la note [14].

Soit R un ensemble symétrisé d'un produit amalgamé $G = G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$. Un mot b est appelé une **pièce** (relativement à R) s'il existe deux éléments distincts r_1, r_2 de R tels que $r_1 = bc_1$ et $r_2 = bc_2$ soient des écritures semi-réduites. On s'intéresse en général à des ensembles symétrisés où les pièces représentent une

petite fraction de la longueur totale des r_i (typiquement, $1/6$). Pour éviter des pathologies, on fera en tous cas l'hypothèse que l'ensemble R ne contient pas d'élément qui soit à lui tout seul une pièce. Ceci entraîne que c_1, c_2 sont de longueur au moins 1 dans les décompositions ci-dessus, et que tous les éléments de R ont longueur au moins 2 (car un élément de longueur inférieure ou égale à 1 est automatiquement une pièce).

Lemme 26. *Si $0 < \lambda < 1$ et R ne contient pas de pièce, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Si $r \in R$ admet une écriture semi-réduite $r = bc$, où b est une pièce de R , alors $|b| < \lambda|r|$;*
- (2) *$\forall r_1, r_2 \in R$ tel que $r_1 r_2 \neq 1$,*

$$|r_1 r_2| > |r_1| + |r_2| - 2\lambda \min\{|r_1|, |r_2|\} + 1.$$

Preuve. Montrons d'abord le fait suivant :

Soient $r_1 = bc_1$ et $r_2 = bc_2$ des expressions semi-réduites avec $r_1 \neq r_2$, et supposons que $|b|$ est maximale parmi toutes les écritures de r_1 et r_2 de cette forme. Alors il existe b' avec $|b'| = |b|$, et c'_1, c'_2 tels que :

- (i) $r_1 = b'c'_1$ et $r_2 = b'c'_2$, et ces expressions sont semi-réduites ;
- (ii) exactement l'une de ces deux expressions est réduite ;
- (iii) l'expression $(c'_1)^{-1}c'_2$ est réduite.

L'assertion (iii) étant une conséquence immédiate de (ii), il s'agit de montrer que quitte à changer b par un élément de même longueur, on peut obtenir (i) et (ii). On note g une première lettre³ de c_1 , définie à un élément de $G_1 \cap G_2$ près ; donc c_1 admet une forme réduite $c_1 = gc'_1$. Posons $b' = bg$ et $c'_2 = g^{-1}c_2$. Supposons que la dernière lettre⁴ de b soit dans $G_2 \setminus G_1$, l'autre cas étant symétrique.

Si bc_1 et bc_2 sont toutes deux non réduites, alors en particulier $g \in G_2 \setminus G_1$. Dans ce cas l'expression $r_1 = b'c'_1$ est réduite, l'expression $r_2 = b'c'_2$ est semi-réduite. et $|b'| = |b|$.

Supposons maintenant que les expressions $r_1 = bc_1$ et $r_2 = bc_2$ soient toutes deux réduites. Alors $g \in G_1 \setminus G_2$. Dans ce cas les expressions $r_1 = b'c'_1$ et $r_2 = b'c'_2$ sont semi-réduites, et on a $|b'| = |b| + 1$, ce qui vient contredire la maximalité de $|b|$.

³L'hypothèse " R ne contient pas de pièce" permet d'éviter le cas $|c_1| = 0$; la notion de première lettre de $|c_1|$ fait ainsi sens.

⁴Par maximalité de $|b|$, on ne peut pas avoir $|b| = 0$, donc la notion de dernière lettre fait sens, toujours à un élément de $G_1 \cap G_2$ près.

Montrons maintenant l'équivalence des deux assertions du lemme.

Supposons (1). Soient $r_1, r_2 \in R$ tels que $r_1 r_2 \neq 1$. Par ce qui précède, nous pouvons écrire $r_1^{-1} = bc_1, r_2 = bc_2$ sous forme semi-réduite, où l'une exactement de ces deux expressions est réduite, et où $c_1^{-1}c_2$ est réduite. Ainsi :

$$|r_1 r_2| = |c_1^{-1}c_2| = |c_1| + |c_2| = |r_1| + |r_2| - 2|b| + 1.$$

Comme par hypothèse $|b| < \lambda \min\{|r_1|, |r_2|\}$, nous obtenons (2).

Supposons maintenant (2). Si $r \in R$ admet une écriture semi-réduite $r = bc$, où b est une pièce de R , il existe $r' \in R$ admettant une écriture semi-réduite $r' = bc'$ avec $r \neq r'$. Par ce qui précède, quitte à remplacer b par une pièce maximale on peut supposer $|r^{-1}r'| = |r| + |r'| - 2|b| + 1$. Comme par hypothèse $|r^{-1}r'| > |r| + |r'| - 2\lambda \min\{|r|, |r'|\} + 1$, on obtient $|b| < \lambda \min\{|r|, |r'|\}$, et donc $|b| < \lambda|r|$. \square

Si les assertions équivalentes du lemme 26 sont satisfaites, on dit que R satisfait la condition $C'(\lambda)$.

Je conclue ce paragraphe en rappelant l'énoncé d'un théorème classique (voir [36, Th. 11.2, p. 288]), qui illustre comment la théorie de la petite simplification permet de garantir l'existence de sous-groupes normaux.

Théorème 27. *Soit R un sous-ensemble symétrisé du produit amalgamé $G = G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$. Supposons que R satisfait la condition $C'(\lambda)$ avec $\lambda \leq 1/6$. Alors le sous-groupe normal engendré par R dans G est distinct de G .*

3.1.3 La relation secondaire d'Iskovskikh

Je complète ici la preuve du théorème 8 d'Iskovskikh, dont je reprends les notations. Les calculs qui suivent sont pour une large part dûs à Jérémy Blanc.

On veut déduire la relation secondaire

$$(\tau \circ (-x, y - x))^3 = \text{id}$$

à partir de la relation principale

$$(\tau \circ e)^3 = \text{id}.$$

Considérons les trois conjugués $c_i (\tau \circ e)^3 c_i^{-1}$ de cette dernière relation, où

$$c_1 = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right), \quad c_2 = \left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y} \right) \quad \text{et} \quad c_3 = (-x, y).$$

dont les régions soient associées à des conjugués de la relation principale, et qui admette un sommet de valence 3. Si le lecteur cherche à réaliser cela il finira probablement par obtenir une variante du diagramme donné sur la figure 3.4. Rappelons (voir §3.1) que les \circ notent les sommets secondaires ; on les représente seulement quand leur valence est au moins 3. A chacune des trois régions D_i correspond un conjugué de la relation principale : en parcourant le bord dans le sens inverse des aiguilles d'une montre on lit le mot de longueur six $\tau g_i \tau f_i \tau h_i$ (rappelons que $f_3 = f_2^{-1} f_1^{-1}$). Le périmètre externe lu à partir du point base ■ donne la relation secondaire, sous la forme (3.1).

3.2 Automorphismes unimodulaires du plan

Je présente ici une idée de la preuve de l'assertion (2) du théorème 24. Considérons donc un automorphisme $f \in G$ dont la longueur $|f|$ dans le produit amalgamé est paire, et au moins égale à 14. On va montrer (sous une hypothèse de généricité) que le groupe normal engendré par f ne contient aucun élément de petite longueur (à part l'identité).

Si $h \neq \text{id}$ est un élément du groupe normal engendré par f , on a vu qu'il était possible d'écrire h comme un produit

$$h = \psi_1 r_1 \psi_1^{-1} \cdots \psi_n r_n \psi_n^{-1}$$

où les facteurs $\psi_i r_i \psi_i^{-1}$ sont semi-réduits, et les r_i sont des conjugués de f qui sont faiblement cycliquement réduits. Autrement dit les r_i sont dans l'ensemble symétrisé $R(f)$ constitué de tous les conjugués faiblement cycliquement réduits de f et f^{-1} .

Suivant la procédure exposée au §3.1.1, on associe alors un diagramme de van Kampen à cette situation, où le bord de chaque région correspond à l'écriture de l'un des r_i , et admet donc un périmètre égal à $|f|$.

On obtient un diagramme planaire dont on veut montrer que la courbure n'est pas positive. L'idée générale est que si l'on admet des sommets de valence petite alors il faut pouvoir montrer que les régions ont beaucoup de voisins, et vice-versa. Les cas limites (courbure nulle) correspondent aux couples (valence, nombre voisins) = (6, 3), (4, 4) ou (3, 6) qui sont réalisés par les pavages réguliers du plan euclidien par des triangles, carrés ou hexagones.

Une remarque technique, facile mais cruciale, est que la longueur de l'arête entre deux régions voisines D_1, D_2 , dont les bords correspondent à des conjugués r_1, r_2 de f , est majorée par la longueur de l'intersection $\text{Géo}(r_1) \cap \text{Géo}(r_2)$ des axes des isométries hyperboliques r_1 et r_2 dans l'arbre de Bass-Serre (voir

[21, lemme 39]). J'avais essentiellement montré dans ma thèse que génériquement une telle longueur est au plus 4. Un calcul analogue (et tout aussi pénible) montre que si trois régions se rencontrent en un sommet de valence trois, alors la longueur de chacune des trois arêtes issues de ce sommet est au plus 2. Une hypothèse de généricité est indispensable pour obtenir de telles estimations ; en particulier dans l'introduction de [21] nous produisons des exemples d'automorphismes f de longueur paire arbitraire tels que le groupe normal engendré $\langle\langle f \rangle\rangle$ soit G tout entier.

Comme on sait que les régions ont périmètre au moins 14, et que les arêtes entre deux régions ont longueur au plus 4, il est immédiat que toute région intérieure du diagramme admet au moins 4 voisins.

Pour qu'un quadrilatère donne une contribution positive à la courbure il devrait admettre au moins un sommet de valence 3, mais alors on vérifie que les contraintes ci-dessus l'obligeraient à avoir un périmètre au plus 12.

De même, pour qu'un pentagone donne une contribution positive, il faudrait au moins 4 sommets de valence 3, mais ceci implique un périmètre au plus 10.

Finalement le diagramme obtenu admet une courbure négative, ce qui oblige le bord à être grand. Or le mot codé par le bord du diagramme correspond à une écriture cycliquement réduite d'un conjugué de h . En particulier, si h était de longueur minimale dans sa classe de conjugaison, le périmètre du diagramme est égal à la longueur de h . Ainsi le groupe normal engendré par f ne contient pas d'élément de petite longueur, et donc en particulier n'est pas égal à G tout entier.

3.3 Critère de non-simplicité

Cette section se veut une introduction pédagogique à l'article [9], en collaboration avec S. Cantat, et en particulier au théorème 2.9 qui donne un critère général de non-simplicité pour un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique.

Dans un premier temps j'introduis la notion d'isométrie rigide, qui est une variante d'une condition de petite simplification, et vérifie en guise d'illustration que cette condition est satisfaite dans le cas de $SL_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincaré.

Je présente ensuite le critère de non-simplicité, et discute de son application au cas du groupe de Cremona. Je résume en particulier la construction d'un espace hyperbolique sur lequel le groupe de Cremona agit par isométries.

Enfin, je donne une preuve complète du critère de non-simplicité dans le cas d'un groupe agissant sur un arbre. Ceci permet de se débarrasser de tous les

arguments d'approximation et de faire ressortir le joli argument combinatoire qui est quelque peu caché aussi bien dans [9] que dans l'article de Delzant [15, Lemme 2.4] qui nous a inspiré.

3.3.1 Rigidité sur le demi-plan de Poincaré

Soit G un groupe d'isométries du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 , et soit $g \in G$ une isométrie hyperbolique. On dit que g est **rigide** s'il n'existe pas de conjugué f de g dans G tel que l'axe⁵ de f soit arbitrairement proche de l'axe de g . Précisément, la condition est : il existe $B > 0$, $\varepsilon > 0$, tel que pour tout conjugué f de g , s'il existe un segment de longueur B dans $\text{axe}(f)$ qui est dans le ε -voisinage de $\text{axe}(g)$, alors f est égal à g ou g^{-1} .

Par exemple, si l'on prend $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$, il est facile de voir qu'aucune isométrie hyperbolique g n'est rigide : dans le modèle du disque on peut se ramener au cas où 0 appartient à l'axe de g , et en conjuguant par des rotations d'angle petit on peut produire des conjugués f de g avec $\text{axe}(f)$ proche le long d'un segment arbitrairement long de $\text{axe}(g)$.

Par contre, si l'on considère $G = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors on peut montrer que toute isométrie hyperbolique est rigide. Lorsque nous avons commencé à travailler sur la non-simplicité du groupe de Cremona, Serge Cantat et moi-même avons indépendamment résolu cet exercice pour nous convaincre que la stratégie faisait sens. Voici l'argument de Serge, qui est élémentaire :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que A induit une isométrie hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré, ce qui revient à dire que $(a+d)^2 > 4$. On calcule les deux points fixes de A situés au bord en résolvant l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d} = z.$$

On obtient les solutions

$$\lambda^\pm(A) = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

En particulier le quotient des deux points fixes est

$$\frac{\lambda^+(A)}{\lambda^-(A)} = \frac{a-d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{a-d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}.$$

⁵ L'axe d'une isométrie hyperbolique g est l'ensemble des points qui réalisent l'infimum de $d(x, g(x))$.

Supposons maintenant que $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ soit un conjugué de A . On veut montrer que si les points fixes $\lambda^\pm(B)$ de B sont proches de ceux de A , alors $A = B^{\pm 1}$. Quitte à changer B en B^{-1} , on peut supposer que $\lambda^+(B)$ est proche de $\lambda^+(A)$, et que $\lambda^-(B)$ est proche de $\lambda^-(A)$. Le quotient $\lambda^+(B)/\lambda^-(B)$ est donc proche de $\lambda^+(A)/\lambda^-(A)$. Comme A et B ont même trace $a + d$ on en déduit que $a - d$ est proche de $a' - d'$. Ces nombres étant des entiers, on en déduit que

$$a - d = a' - d'.$$

Le fait que $\lambda^+(B)$ est proche de $\lambda^+(A)$ donne alors $c' = c$, et donc les points fixes de A et B coïncident. Finalement, les polynômes $cz^2 + (d - a)z - b$ et $cz^2 + (d - a)z - b'$ ayant même racines, on obtient $b = b'$, et donc $A = B$.

3.3.2 Non-simplicité du groupe de Cremona $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$

Dans [9], nous prouvons l'énoncé suivant, qui implique la non-simplicité du groupe de Cremona.

Théorème 28. *Soit $d \geq 2$, et $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ une transformation générique de degré d . Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, tout élément $h \neq \mathrm{id}$ du groupe normal $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ engendré par g^n dans $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ satisfait l'alternative :*

- (1) *ou bien h est un conjugué de g^n ;*
- (2) *ou bien $\deg(h) > \deg(g^n) = d^n$.*

En particulier $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ ne contient pas g , et est donc un sous-groupe normal propre de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$.

La preuve repose sur l'énoncé général suivant. La notion d'isométrie rigide dans le cadre d'un espace δ -hyperbolique est exactement similaire à celle donnée dans le paragraphe précédent dans le contexte du demi-plan de Poincaré.

Théorème 29. *Soit G un groupe agissant par isométries sur un espace δ -hyperbolique \mathcal{H} . Supposons que $g \in G$ soit une isométrie hyperbolique rigide. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, tout élément $h \neq \mathrm{id}$ du groupe normal $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ engendré par g^n dans G satisfait l'alternative :*

- (1) *ou bien h est un conjugué de g^n ;*
- (2) *ou bien h induit une isométrie dont la longueur de translation satisfait $L(h) > L(g^n)$.*

En particulier $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ ne contient pas g , et est donc un sous-groupe normal propre de G .

Comme le laisse penser la similarité de ces deux énoncés, une fois ce dernier théorème acquis le point essentiel est de trouver un espace hyperbolique sur lequel agit le groupe de Cremona. Voici un résumé de cette construction.

Considérons l'ensemble de toutes les surfaces qui dominent \mathbb{P}^2 par une suite d'éclatements. Si $\pi' : X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ est obtenu à partir de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ en éclatant encore plus de points, alors $q = \pi^{-1} \circ \pi' : X' \rightarrow X$ est un morphisme et q^* plonge le groupe de Néron-Severi $N^1(X) \otimes \mathbb{R}$ dans $N^1(X') \otimes \mathbb{R}$. La limite inductive de ces espaces vectoriels $N^1(X) \otimes \mathbb{R}$ est appelée l'**espace de Picard-Manin**. Cet espace est équipé d'une forme d'intersection de signature $(1, \infty)$. L'ensemble des éléments D dans cet espace avec auto-intersection $D^2 = 1$ forme un hyperboloïde à deux feuillettes. On sélectionne le feuillet contenant la classe d'une droite sur \mathbb{P}^2 , et on le munit de la distance hyperbolique $d(\cdot, \cdot)$ suivant la formule classique

$$\cosh(d(D, D')) = D \cdot D'.$$

En considérant le complété de cet espace métrique on obtient un espace hyperbolique complet de dimension infinie $\overline{\mathbb{H}}$ sur lequel le groupe de Cremona agit fidèlement par isométries.

Pour déduire le théorème 28 du théorème général 29 il reste à vérifier qu'une transformation de Cremona générique g est rigide. Il s'agit essentiellement de montrer que si $f = \phi g \phi^{-1}$ est un conjugué de g dans le groupe de Cremona dont l'axe est proche de g , alors $\phi = \text{id}$. Nous montrons ceci en deux temps : d'une part un argument général permet de borner le degré d'un tel ϕ par 3 ; d'autre part nous excluons par une analyse au cas par cas l'existence d'un tel $\phi \neq \text{id}$ de petit degré. Je ne détaille pas ici l'argument, mais veux seulement mentionner que c'est à cet endroit de la preuve que des hypothèses sur le corps de base s'avèrent nécessaires : c'est pourquoi j'ai choisi d'énoncer le théorème 28 sur \mathbb{C} . Cependant, cette restriction n'est pas essentielle. Nous disposons d'une autre construction, mettant en jeu des transformations qui se relèvent en des automorphismes sur des surfaces rationnelles particulières (dites de Coble), où l'on sait prouver la rigidité indépendamment de la caractéristique (mais encore avec l'hypothèse k algébriquement clos). Je soupçonne qu'il est possible d'adapter ces techniques pour montrer que le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ n'est pas simple, pour tout corps de base k (par exemple le corps à deux éléments...). En fait, je pense que la réponse à la question suivante est positive.

Question 30. Soit k un corps quelconque. Considérons $g : (x, y) \rightarrow (y, y^2 + x)$. Existe-t-il un entier n tel que le groupe normal $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ soit un sous-groupe propre de $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$?

3.3.3 Groupes agissant sur un arbre

J'expose ici une preuve du critère de non-simplicité (théorème 29), dans le cas d'un groupe G agissant sur un arbre réel \mathcal{T} (au lieu d'un espace hyperbolique quelconque). En particulier ceci redonne une preuve de la non-simplicité du groupe des automorphismes polynomiaux de déterminant jacobien 1, en utilisant l'action sur l'arbre de Bass-Serre : on voit que les diagrammes de van Kampen sont un outil commode mais non indispensable.

Reformulons tout d'abord la notion de rigidité dans ce nouveau contexte.

Soit G un groupe d'isométries d'un arbre réel \mathcal{T} . Une isométrie hyperbolique $g \in G$ est dite **rigide** s'il existe $B > 0$ tel que pour tout $\varphi \in G$, la condition $\text{diam}(\text{axe}(g) \cap \varphi(\text{axe}(g))) \geq B$ implique $\varphi g \varphi^{-1} = g$ ou g^{-1} (et donc en particulier $\varphi(\text{axe}(g)) = \text{axe}(g)$). A noter que si g est rigide, alors tout itéré g^n , $n > 0$, est également rigide.

Je donne la preuve du théorème 29, qui repose sur le lemme technique 33, après avoir introduit la notion de présentation admissible.

Présentations admissibles

Soit $h \in \langle\langle g^n \rangle\rangle$ un élément du groupe normal engendré par g^n . On peut écrire h comme un produit $h_m h_{m-1} \dots h_1$ où chaque h_j est un conjugué de g^n ou de son inverse :

$$\forall 1 \leq j \leq m, \exists \psi_j \in G, h_j = \psi_j g^n \psi_j^{-1} \text{ ou } \psi_j g^{-n} \psi_j^{-1}.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{T}$ un point base. On associe trois suites de points (a_i) , (b_i) , et (x_i) , $1 \leq i \leq m$, à la donnée du point base x_0 et de la décomposition de h en le produit des h_j , en posant : a_i est le projeté de x_{i-1} sur $\text{axe}(h_i)$, $b_i = h_i(a_i)$ et $x_i = h_i(x_{i-1})$.

Notons $L = nL(g)$ la longueur de translation de g^n . Soit $[x, y] \subset \mathcal{T}$ un segment orienté. Nous dirons que $[x, y]$ est un **relateur de taille p/q** si $d(x, y) \geq \frac{p}{q}L$, et s'il existe un conjugué f de g^n tel que $[x, y]$ est contenu dans l'axe de f . Quitte à changer f en f^{-1} , on peut supposer que y et $f(x)$ sont du même côté par rapport à x . Ceci étant fait, on dit que f est le **support** de $[x, y]$ (et donc f^{-1} est le support du relateur $[y, x]$). Nous dirons que $[x, y]$ contient un relateur de taille p/q s'il existe un segment $[x', y'] \subset [x, y]$ qui est un tel relateur. Enfin, un segment $[x, y]$ sera dit **neutre** s'il ne contient aucun relateur de taille $6/10$.

Nous dirons que $h_m \dots h_1$ est une **présentation admissible** de h (par rapport au point base x_0) si tous les segments $[x_{i-1}, a_i]$ sont neutres (et donc également les segments $[b_i, x_i]$).

Lemme 31. *L'élément h admet au moins une présentation admissible.*

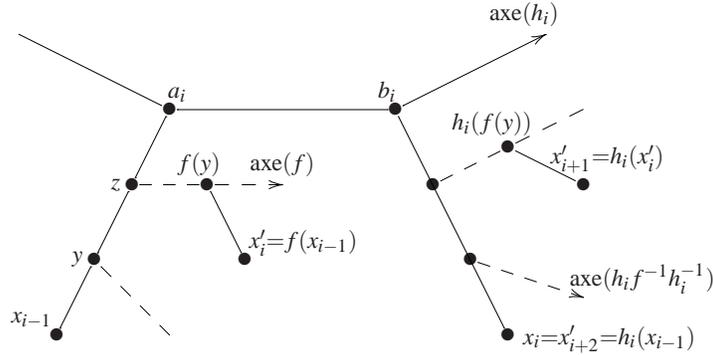


FIG. 3.5 – Preuve du lemme 31.

Preuve. Soit $h_m \cdots h_1$ une présentation de h , et soit \mathcal{J} l'ensemble des indices $1 \leq i \leq m$ tels que $[x_{i-1}, a_i]$ ne soit pas neutre. Supposons que \mathcal{J} n'est pas vide (sinon il n'y a rien à faire), et considérons $i \in \mathcal{J}$. Il existe donc f un conjugué de g^n tel que $[y, z] = \text{axe}(f) \cap [x_{i-1}, a_i]$ soit un segment de longueur au moins $\frac{6}{10}L$, avec $y \in [x_{i-1}, z]$. Quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer $d(f(y), z) < d(f^{-1}(y), z)$. On écrit alors h_i comme un produit de trois conjugués de g :

$$h_i = (h_i f^{-1} h_i^{-1}) h_i f.$$

Ceci produit une nouvelle décomposition de h , et donc de nouvelles suites de points. En ce qui concerne la suite (x_i) on a deux nouveaux points, $x'_i = f(x_{i-1})$ et $x'_{i+1} = h_i(x'_i)$. Le point $x'_{i+2} = h_i f^{-1} h_i^{-1}(x'_{i+1})$ est égal à l'ancien point $x_i = h_i(x_{i-1})$. Ainsi $[x_{i-1}, a_i]$ est remplacé par trois nouveaux segments $[x_{i-1}, y]$, $[x'_i, a_i]$ et $[x'_{i+1}, h_i(f(y))]$ (voir figure 3.5). Les autres segments $[x_{j-1}, a_j]$ ne sont pas affectés.

Puisque $[y, z]$ est de taille au moins $\frac{6}{10}L$ alors le segment $[z, f(y)]$ est de taille au plus $\frac{4}{10}L$. On vérifie ainsi facilement que

- (i) $d(x_{i-1}, y) = d(x'_{i+1}, h_i(f(y))) \leq d(x_{i-1}, a_i) - \frac{6}{10}L$;
- (ii) $d(x'_i, a_i) \leq d(x_{i-1}, a_i) - \frac{2}{10}L$.

Réalisons simultanément un tel remplacement pour chaque indice i dans \mathcal{J} . On obtient ainsi une nouvelle présentation pour h et une nouvelle liste de mauvais indices \mathcal{J}' . Si cette liste n'est pas vide, le maximum des longueurs $d(x_{j-1}, a_j)$ pris sur tous les segments non neutres $[x_{j-1}, a_j]$, $j \in \mathcal{J}'$, a chuté au moins par $\frac{2}{10}L$. Par récurrence, après un nombre fini de tels remplacements on obtient une présentation admissible pour h . \square

Le lemme suivant permet de caractériser les présentations admissibles avec un nombre minimal de facteurs.

Lemme 32. Soit $h = h_m \cdots h_1$ une présentation admissible de point base x_0 . S'il existe deux indices $j > i$ tels que $h_j = h_i^{-1}$, alors h admet une présentation admissible de même point base x_0 comptant seulement $m - 2$ facteurs.

Preuve. Notons que l'on peut supposer $j \geq i + 2$, sinon il y a une simplification évidente. La décomposition de h s'écrit

$$h = h_m \cdots h_{j+1} h_i^{-1} h_{j-1} \cdots h_{i+1} h_i h_{i-1} \cdots h_1,$$

où éventuellement i peut être égal à 1, et j peut être égal à m . Alors

$$h = h_m \cdots h_{j+1} (h_i^{-1} h_{j-1} h_i) \cdots (h_i^{-1} h_{i+1} h_i) h_{i-1} \cdots h_1$$

est une présentation admissible de point base x_0 et comptant $m - 2$ facteurs. \square

Preuve du critère de non-simplicité

Considérons $B > 0$ la constante associée à la rigidité de g , et choisissons $n \geq 1$ tel que la longueur de translation $L = nL(g)$ de g^n satisfasse

$$\frac{L}{10} \geq 2B.$$

Soit h un élément non trivial dans $\langle\langle g^n \rangle\rangle$. Fixons un point base⁶ $x_0 \in \text{axe}(h)$. Le lemme 31 dit qu'il existe une présentation admissible

$$h = h_m \circ \cdots \circ h_1$$

par rapport au point x_0 . Nous pouvons supposer que m est minimal, parmi toutes les présentations admissibles pour h de point base x_0 . Le lemme 32 implique alors que h_j est différent de h_i^{-1} pour tout $1 \leq i < j \leq m$. Soient (a_i) , (b_i) , (x_i) les suites de points définies en 3.3.3. Nous introduisons la définition suivante pour garder l'énoncé du lemme 33 raisonnablement concis :

Une suite de points $(c_{-1}, c_0, \cdots, c_k, c_{k+1})$ dans $[x_0, x_j]$ est une **configuration d'ordre** $k \geq 1$ pour le segment $[x_0, x_j]$ si

- (i) La suite est monotone, avec $x_0 = c_{-1}$ et $x_j = c_{k+1}$;
- (ii) Pour tout $0 \leq i \leq k$ le segment $[c_i, c_{i+1}]$ est soit neutre soit un relateur, avec les règles suivantes :
 - (a) Il n'y a jamais deux segments neutres consécutifs ;
 - (b) le dernier segment $[c_k, c_{k+1}] = [c_k, x_j]$ est neutre ;

⁶ La preuve va montrer que h est hyperbolique, mais *a priori* h pourrait être elliptique. Dans ce cas on définit $\text{axe}(h)$ comme l'ensemble des points fixes de h .

- (c) le second segment $[c_0, c_1]$ est un relateur de taille $9/10$ si $k = 1$, ou de taille $8/10$ si $k > 1$;
- (d) pour tout autre relateur $[c_{i-1}, c_i]$, avec $i > 1$, la taille est $3/10$ si $[c_i, c_{i+1}]$ est neutre et $2/10$ sinon.
- (iii) Pour tout $0 \leq i \leq k$, si $[c_i, c_{i+1}]$ est un relateur, alors il existe un indice l avec $1 \leq l \leq m$ tel que h_l soit le support du relateur $[c_i, c_{i+1}]$.

A noter que les propriétés (ii) et (iii) ne concernent pas le segment initial $[x_0, c_0]$.

Lemme 33. *Pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe $k \geq 1$ tel que le segment $[x_0, x_j]$ admette une configuration d'ordre k .*

De plus si $j \geq 2$ et $k = 1$ alors le segment initial $[x_0, c_0]$ de la configuration a longueur au moins $\frac{1}{10}L + B$.

Preuve. La preuve est par récurrence sur j . Quand $j = 1$ il suffit de poser $c_0 = a_1, c_1 = b_1$ pour obtenir une configuration d'ordre 1.

Supposons maintenant que $[x_0, x_j]$ admette une configuration d'ordre k . Nous voulons trouver une configuration d'ordre k' pour $[x_0, x_{j+1}]$. Nous travaillons dans le tripode $T \subset \mathcal{T}$ défini par les points x_0, x_j, x_{j+1} . Nous notons p le point de branchement de T (par convention $p = x_j$ dans le cas où T est dégénéré).

Les inégalités suivantes sont immédiates, en se souvenant que $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ est un relateur et que $[x_j, a_{j+1}], [b_{j+1}, x_{j+1}]$ sont neutres :

Fait 34. (1) *Si $[c_i, c_{i+1}]$ est neutre alors*

$$\text{diam}([a_{j+1}, b_{j+1}] \cap [c_i, c_{i+1}]) \leq \frac{6}{10}L;$$

(2) *Si $[c_i, c_{i+1}]$ est un relateur alors*

$$\begin{aligned} \text{diam}([a_{j+1}, b_{j+1}] \cap [c_i, c_{i+1}]) &\leq B; \\ \text{diam}([x_j, a_{j+1}] \cap [c_i, c_{i+1}]) &\leq \frac{6}{10}L; \\ \text{diam}([b_{j+1}, x_{j+1}] \cap [c_i, c_{i+1}]) &\leq \frac{6}{10}L \end{aligned}$$

On en déduit le

Fait 35. (1) *Le segment $[b_{j+1}, a_{j+1}]$ n'est pas contenu dans le segment $[c_0, x_j]$;*

(2) *Le segment $[c_0, c_1]$ n'est pas contenu dans $[x_{j+1}, x_j]$.*

En effet supposons que $[b_{j+1}, a_{j+1}] \subset [c_0, x_j]$. D'après le fait 34 (1), $[b_{j+1}, a_{j+1}]$ intersecte au moins un relateur $[c_i, c_{i+1}]$; le fait 34 (2) implique que $[c_i, c_{i+1}]$ n'est pas contenu dans $[a_{j+1}, b_{j+1}]$: il doit intersecter l'une des extrémités de

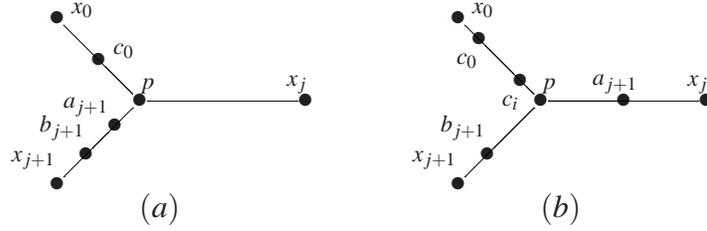


FIG. 3.6 – Les deux cas dans la preuve du lemme 33.

$[a_{j+1}, b_{j+1}]$. Donc $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ intersecte au plus deux relateurs et un segment neutre ; on obtient l'inégalité contradictoire $\frac{7}{10}L \geq 2B + \frac{6}{10}L \geq L$.

De même si $[c_0, c_1] \subset [x_{j+1}, x_j]$ un raisonnement similaire donnerait l'inégalité contradictoire $B + \frac{6}{10} \geq \frac{8}{10}L$.

Ceci implique que le segment ouvert $]x_{j+1}, p[$ contient le point b_{j+1} , et que le segment $]x_0, p[$ contient le point c_0 . On obtient en fait les minoration :

Fait 36. *Le segment $[c_0, p]$ est de longueur au moins $\frac{1}{10}L + B$, et le segment $[b_{j+1}, p]$ est de longueur au moins $\frac{3}{10}L$.*

En particulier le tripode T n'est dégénéré ni en x_0 ni en x_{j+1} . Pour conclure, nous distinguons deux cas en fonction de la position de a_{j+1} par rapport au point de branchement p .

Premier cas : $a_{j+1} \in [x_{j+1}, p]$ ou $d(a_{j+1}, p) < \frac{1}{10}L$; voir figure 3.6 (a).

Il suffit de poser $c_0 = a_{j+1}$ si $a_{j+1} \in [x_{j+1}, p]$, ou $c_0 = p$ sinon, et $c_1 = b_{j+1}$ pour obtenir une configuration d'ordre 1 pour $[x_0, x_{j+1}]$. Ce cas inclut la situation où x_j est un sommet dégénéré du tripode T .

Le fait 36 donne la seconde assertion du lemme.

Deuxième cas : $a_{j+1} \in [p, x_j]$ et $d(a_{j+1}, p) \geq \frac{1}{10}L$; voir figure 3.6 (b).

Il existe $i \geq 0$ uniquement déterminé tel que le segment $]c_i, c_{i+1}[$ contienne p .

On distingue encore deux sous-cas suivant la nature de $[c_i, c_{i+1}]$:

Si $[c_i, c_{i+1}]$ est neutre alors $[c_i, p]$ l'est également.

Si $[c_i, c_{i+1}]$ est un relateur alors par le fait 34 (2) le segment $[p, c_{i+1}]$ est au plus de longueur B , et $[c_{i+1}, c_{i+2}]$ est neutre. Ainsi le relateur $[c_i, c_{i+1}]$ a taille $3/10$, et $[c_i, p]$ est encore un relateur de taille $2/10$.

Par ailleurs par le fait 36 le segment $[p, b_{j+1}]$ est un relateur de taille $3/10$. Donc dans les deux sous-cas en gardant les c_j pour $j \leq i$, et en posant $c_{i+1} = p$,

$c_{i+2} = b_{j+1}$ on obtient une configuration d'ordre $i + 2$ pour $[x_0, x_{j+1}]$. \square

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du critère de non-simplicité :

Preuve du théorème 29. Par le lemme 33 il existe (c_i) une configuration d'ordre k pour $[x_0, x_m]$. Rappelons que $d(x_0, x_m) = L(h)$.

Si $k \geq 2$, on a au moins deux relateurs distincts : le premier, $[c_0, c_1]$, de taille $8/10$, et le dernier, $[c_{k-1}, c_k]$, de taille $3/10$. On conclut que $L(h) \geq \frac{11}{10}L > L$.

Si $k = 1$, on bien h est conjugué à g^n , ou bien par la seconde assertion du lemme 33 on a $d(x_0, c_0) \geq \frac{1}{10}L + B$. D'autre part $d(c_0, c_1) \geq \frac{9}{10}L$, et de nouveau on obtient $L(h) \geq L + B > L$. \square

Bibliographie

- [1] Baker I. N. et Erëmenko A. – A problem on Julia sets. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, vol. 12, n2, 1987, pp. 229–236.
- [2] Beardon A. F. – Symmetries of Julia sets. *Bull. London Math. Soc.*, vol. 22, n6, 1990, pp. 576–582.
- [3] Bedford E. et Smillie J. – Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.*, vol. 103, n1, 1991, pp. 69–99.
- [4] Blanc J. – Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group. *Comment. Math. Helv.*, à paraître.
- [5] Bruno A. et Matsuki K. – Log Sarkisov program. *Internat. J. Math.*, vol. 8, n4, 1997, pp. 451–494.
- [6] Buzzard G. T. – Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. *Ann. of Math. (2)*, vol. 145, n2, 1997, pp. 389–417.
- [7] Cantat S. – Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *Annals of Math.*, à paraître.
- [8] Cantat S. et Lamy S. – Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan. *Geom. Dedicata*, vol. 123, 2006, pp. 201–221.
- [9] Cantat S. et Lamy S. – Normal subgroups of the Cremona group. *preprint arXiv :1007.0895*, 2010.
- [10] Castelnuovo G. – Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Torino Atti*, vol. 36, 1901.
- [11] Christopher D. H. et James M. – The Sarkisov program. *preprint arXiv :0905.0946*, 2009.
- [12] Corti A. – Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. *J. Algebraic Geom.*, vol. 4, n2, 1995, pp. 223–254.
- [13] Corti A. – Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. *In : Explicit birational geometry of 3-folds*, pp. 259–312. – Cambridge Univ. Press, 2000.

- [14] Danilov V. I. – Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane. *Mat. Zametki*, vol. 15, 1974, pp. 289–293.
- [15] Delzant T. – Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, vol. 83, n3, 1996, pp. 661–682.
- [16] Dolgachev I. V. et Iskovskikh V. A. – Finite subgroups of the plane Cremona group. *preprint arXiv :math/0610595v4*, to appear in "Arithmetic and Geometry-Manin Festschrift", Birkhauser. 2010.
- [17] Dubouloz A. et Lamy S. – Variations on the log Sarkisov program for surfaces. *preprint arXiv :0802.2441*, 2008.
- [18] Flenner H., Kaliman S. et Zaidenberg M. – On the Danilov-Gizatullin isomorphism theorem. *Enseign. Math. (2)*, vol. 55, n3-4, 2009, pp. 275–283.
- [19] Fornæss J. E. et Sibony N. – Complex dynamics in higher dimensions. *In : Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, pp. 131–186. – Kluwer Acad. Publ., 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.
- [20] Friedland S. et Milnor J. – Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 9, n1, 1989, pp. 67–99.
- [21] Furter J.-P. et Lamy S. – Normal subgroup generated by a plane polynomial automorphism. *To appear in Transformation Groups*, 2009.
- [22] Gizatullin M. et Danilov V. – Automorphisms of affine surfaces. II. *Math. USSR Izvestiya*, vol. 11, 1977, pp. 51–98.
- [23] Gizatullin M. K. – Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 46, n5, 1982, pp. 909–970, 1134.
- [24] Gutierrez J., Shpilrain V. et Yu J.-T. (édité par). – *Affine algebraic geometry*. – American Mathematical Society, 2005, *Contemporary Mathematics*, volume 369. Papers from the Special Session at the 1st Joint AMS-RSME Meeting held in Seville, June 18–21, 2003.
- [25] Iskovskikh V. A. – Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, n5(245), 1985, pp. 255–256.
- [26] Jung H. W. E. – Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 184, 1942, pp. 161–174.
- [27] Kishimoto T. – The explicit factorization of the Cremona transformation which is an extension of the Nagata automorphism into elementary links. *Math. Nachr.*, vol. 278, n7-8, 2005, pp. 833–843.
- [28] Kishimoto T., Prokhorov Y. et Zaidenberg M. – Group actions on affine cones. *preprint arXiv :0905.4647v2*, 2010.

- [29] Kollár J., Smith K. E. et Corti A. – *Rational and nearly rational varieties*. – Cambridge University Press, 2004, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, volume 92.
- [30] Lamb J. S. W. et Roberts J. A. G. – Time-reversal symmetry in dynamical systems : a survey. *Phys. D*, vol. 112, n1-2, 1998, pp. 1–39. – Time-reversal symmetry in dynamical systems (Coventry, 1996).
- [31] Lamy S. – Dynamique des groupes paraboliques d’automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 . *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, vol. 32, n2, 2001, pp. 185–212.
- [32] Lamy S. – L’alternative de Tits pour $\text{Aut}[\mathbb{C}^2]$. *J. Algebra*, vol. 239, n2, 2001, pp. 413–437.
- [33] Lamy S. – Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, vol. 48, n3-4, 2002, pp. 291–315.
- [34] Lamy S. – Automorphismes polynomiaux préservant une action de groupe. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, vol. 9, n1, 2003, pp. 1–19.
- [35] Lamy S. – Sur la structure du groupe d’automorphismes de certaines surfaces affines. *Publ. Mat.*, vol. 49, n1, 2005, pp. 3–20.
- [36] Lyndon R. C. et Schupp P. E. – *Combinatorial group theory*. – Springer-Verlag, 2001, *Classics in Mathematics*. Reprint of the 1977 edition.
- [37] Makar-Limanov L. – On group of automorphisms of class of surfaces. *Israel J. Math.*, vol. 69, 1990, pp. 250–256.
- [38] Nagao H. – On $\text{GL}(2, K[x])$. *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A*, vol. 10, 1959, pp. 117–121.
- [39] Nagata M. – *On automorphism group of $k[x, y]$* . – Kinokuniya, 1972. Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 5.
- [40] Noether M. – Zur theorie der eindeutigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.*, vol. 5, 1872, pp. 635–639.
- [41] Ollivier Y. – *A January 2005 invitation to random groups*. – Sociedade Brasileira de Matemática, 2005, *Ensaio Matemáticos*, volume 10.
- [42] Serre J.-P. – *Arbres, amalgames, SL_2* . – Société Mathématique de France, 1977. Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [43] Shafarevich I. R. – *Basic algebraic geometry. 1*. – Springer-Verlag, 1994, second édition. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [44] Shalom Y. – Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group. *Ann. of Math. (2)*, vol. 152, n1, 2000, pp. 113–182.

- [45] Shestakov I. P. et Umirbaev U. U. – The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 17, n1, 2004, pp. 197–227.
- [46] Umirbaev U. U. – Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 600, 2006, pp. 203–235.
- [47] van der Kulk W. – On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wiskunde (3)*, vol. 1, 1953, pp. 33–41.
- [48] Wright D. – Abelian subgroups of $\text{Aut}_k(k[X, Y])$ and applications to actions on the affine plane. *Illinois J. Math.*, vol. 23, n4, 1979, pp. 579–634.
- [49] Wright D. – Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 331, n1, 1992, pp. 281–300.