Structure de Calabi-Yau

Maxime REBOUT
Sous la direction de Vadim SCHECHTMAN

Juin 2004

Table des matières

Introduction

Dans la théorie des algébroïdes vertex, les structures de Calabi-Yau apparaissent comme des objets plus simples que les structures vertex (dans [1], il est dit que si on regarde l'origine physique de cette théorie, on peut comparer une structure vertex à des fluctuations de cordes et une structure de Calabi-Yau à des fluctuations de particules). Leur étude n'en est pas moins intéressante et permet de mieux comprendre les résultats sur les structures vertex (par exemple, il existe des résulats analogues à ceux présentés en 1.3 dans la théorie des algébroïdes vertex,*cf.* [1])

Le but de ce mémoire sera d'étudier la notion de structure de Calabi-Yau sur les algèbres extérieures et en particulier sur l'algèbre extérieure du fibré cotangent à une algèbre. Dans le premier chapitre, on reviendra sur la notion de structure de Calabi-Yau dans le cas pair : on présentera les différentes définitions et les premières propriétés. Le second chapitre sera consacré à l'introduction d'outils relatifs à la superalgèbre (en particulier, le berezinien qui est une généralisation du determinant) qui nous seront utiles pour l'étude du cas général dans le dernier chapitre. L'annexe A sera reservée pour exposer une construction (malheureusement incomplète) de structure de T-module à droite utile dans le cas général.

Je tiens enfin à remercier M Schechtman pour m'avoir fourni ce sujet et m'avoir consacré son temps pour me guider dans mon travail.

Chapitre 1

Structure de Calabi-Yau dans le cas pair

On présente dans ce premier chapitre les différentes définitions de la notion de structure ce Calabi-Yau sur un algébroïde de Lie dans le cas pair et certaines propriétés sur l'ensemble de ces structures.

Tout au long de ce chapitre, k désignera un corps commutatif et A une k-algèbre commutative.

1.1 Algébroïde de Lie

Définition. *Une A-algébroïde de Lie est une algèbre de Lie T agissant sur A et équipée d'une structure de A-module vérifiant pour tout a appartenant à A et tout τ, τ' appartenant à T :*

$$[\tau, a\tau'] = a[\tau, \tau'] + \tau(a)\tau';$$

$$(a\tau)(b) = a\tau(b).$$

Pushout. Soit B une A-algèbre - i le morphisme de structure - et T une A-algébroïde de Lie. Supposons que T, en tant qu'algèbre de Lie, agisse sur B par dérivation de telle sorte que i soit un morphisme de T-modules et que, pour $a \in A$, $b \in B$ et $\tau \in T$, on ait $(a\tau)(b) = a\tau(b)$.

Alors le B-module $T_B = B \otimes_A T$ admet une structure canonique de B-algébroïde de Lie.
Plus précisement, le crochet de Lie sur T_B est défini par

$$[b \otimes \tau, b' \otimes \tau'] = bb' \otimes [\tau, \tau'] + \tau(b')b \otimes \tau' - \tau'(b)b' \otimes \tau$$

et l'action de T_B sur B est définie par

$$(b \otimes \tau)(b') = b\tau(b').$$

Exemple fondamental. L'algèbre de Lie des k-dérivations de A, notée T_A, est une A-algèbroïde de Lie. L'action de A est définie par $\tau.a = \tau(a)$ (c'est bien une action par dérivation) et le crochet de Lie sur T est le commutateur des deux éléments.

On remarque par ailleurs que T_A agit sur le A-module des 1-différentielles de Kähler Ω_A. Cette action est définie par :

$$\tau(adb) = \tau db + ad\tau(b).$$

La différentielle de de Rham $d : A \to \Omega_A$ commute avec l'action de T_A. On a un accouplement A-bilinéaire canonique

$$\begin{array}{rccc} \langle .,. \rangle : & T_A \times \Omega_A & \longrightarrow & A \\ & (\tau, adb) & \longrightarrow & a\tau(b). \end{array}$$

Ces opérations vérifient les relations suivantes : $a \in A$, τ, $\tau' \in T_A$ et $\omega \in \Omega_A$

$$\tau(a\omega) = \tau(a)\omega + a\tau(\omega);$$

$$(a\tau)(\omega) = a\tau(\omega) + \langle \tau, \omega \rangle da;$$

$$\tau(\langle \tau', \omega \rangle) = \langle [\tau, \tau'], \omega \rangle + \langle \tau', \tau(\omega) \rangle.$$

1.2 Définition et premières propriétés

Définition. *Soit T une algébroïde de Lie. Une structure de Calabi-Yau sur T est un morphisme de k-modules $c : T \longrightarrow A$ vérifiant :*
◇ $c(a\tau) = ac(\tau) + \tau(a)$;
◇ $c([\tau, \tau']) = \tau c(\tau') - \tau' c(\tau)$.
Une paire $\mathcal{A} = (T, c)$ sera appelée une 0-algébroïde vertex (au dessus de A) et l'ensemble des structures de Calabi-Yau sur T sera noté $\mathcal{CY}(T)$.

Exemple. Une 0-algébroïde vertex au dessus de k est un couple $(\mathfrak{g}, c)$ où $\mathfrak{g}$ est une k-algébroïde de Lie et $c \in Z_1(\mathfrak{g}, k)$ est un 1-cocycle de Lie à coefficients dans k. On a donc $\mathcal{CY}(\mathfrak{g}) = Z_1(\mathfrak{g}, k)$.

Auto-compatibilités.

◇ Si le premier axiome est vrai pour les couples (a, τ) et (ab, τ), alors il sera vrai pour les paires $(a, b\tau)$.

◇ Si le premier axiome est vrai pour les couples (a, τ), $(a, [\tau, \tau'])$ et $(\tau'(a), \tau])$ et le second est vrai pour les paires (τ, τ'), alors ce dernier sera encore vérifié pour les couples $(a\tau, \tau')$.

Corollaire. Soit $\mathfrak{g} \subset T$ une sous-k-algèbre de Lie telle que $T = A\mathfrak{g}$. Supposons que les deux axiomes soient vrais pour tout $a \in A$ et τ, $\tau' \in \mathfrak{g}$. Alors ils seront encore vérifiés pour tout $a \in A$ et τ, $\tau' \in T$.

Corollaire. Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie et $c \in \mathcal{CY}(\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathfrak{g}$ agisse par dérivation sur A; et posons $\mathfrak{g}_A = A \otimes_k \mathfrak{g}$ (c'est une A-algébroïde de Lie). Alors il existe une unique extension de c en une application $c_A : \mathfrak{g}_A \to A$ qui vérifie les deux axiomes de la définition précédente. Elle est donnée par

$$c_A(a \otimes \tau) = ac(\tau) + \tau(a).$$

On obtient ainsi une 0-algébroïde vertex $\mathcal{A}_A = (\mathfrak{g}_A, c_A)$ au dessus de A.

1.3 Structure de l'ensemble $\mathcal{CY}(T)$

Soient c et c' deux structures de Calabi-Yau sur T. On pose $\omega = c' - c : T \to A$. Le premier axiome de la définition d'une structure de Calabi-Yau nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \omega(a\tau) &= c'(a\tau) - c(a\tau) \\ &= ac'(\tau) + \tau(a) - ac(\tau) - \tau(a) \\ &= a(c' - c)(\tau) = a\omega(\tau). \end{aligned}$$

L'application ω est donc A-linéaire, c'est-à-dire $\omega \in Hom_A(T, A) = \Omega_A$. Par ailleurs, le second axiome nous affirme que

$$\omega([\tau, \tau']) = \tau\omega(\tau') - \tau'\omega(\tau).$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$d_{DR}\omega = 0;$$

où $d_{DR} : \Omega_A \to \Omega^2(T) = Hom_A(\Lambda_A^2 T, A)$ est la différentielle de de Rham définie par

$$d_{DR}(\tau, \tau') = -\omega([\tau, \tau']) + \tau\omega(\tau') - \tau'\omega(\tau).$$

L'application ω est donc fermée ; *i.e.* $\omega \in \Omega^{1,fer}$.
Réciproquement, si $c \in \mathcal{CY}(T)$ et $\omega \in \Omega^{1,fer}$, alors $c + \omega$ est encore une structure de Calabi-Yau sur T.

On en déduit donc que, si $c \in \mathcal{CY}(T)$, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{1,fer} & \longrightarrow & \mathcal{CY}(T) \\ \omega & \longrightarrow & c + \omega \end{array}$$

est une bijection.

Théorème. *Si $\mathcal{CY}(T) \neq 0$, alors $\mathcal{CY}(T) \cong \Omega^{1,fer}$. On dit que $\mathcal{CY}(T)$ est un $\Omega^{1,fer}$-torseur.*

1.4 Si T admet une base abélienne

Construction d'une structure de Calabi-Yau. On suppose que T admette une base ablélienne $\mathfrak{g}$; c'est à dire une A-base constituée d'éléments commutants (*i.e.* le crochet de deux éléments de cette base est nul). Le couple $(\mathfrak{g}, 0)$ est une 0-algébroïde vertex au dessus de k ; par conséquent (*cf.* 1.2), on obtient une structure de Calabi-Yau $c_\mathfrak{g} \in \mathcal{CY}(T)$ donnée par

$$c_\mathfrak{g}(a\tau) = \tau(a) \qquad \text{pour } a \in A \text{ et } \tau \in \mathfrak{g}.$$

Changement de cadre. On veut maintenant regarder comment intervient le choix de la base dans la constuction de cette structure de Calabi-Yau. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux cadres abéliens de T. On voudrait donc connaitre plus en détails l'élément $\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} = c_{\mathfrak{g}'} - c_\mathfrak{g}$.

Pour cela, on commence par écrire les éléments de la base $\mathfrak{g}'$ dans la base $\mathfrak{g}$ (on utilise la notation d'Einstein) :

$$\tau_i' = \varphi^{ij}\tau_j,$$

où la matrice $\left(\varphi^{ij}\right)_{ij}$ appartient à $GL_n(A)$.
Commençons par regarder une formule utile pour la suite : la base $\mathfrak{g}'$ est abélienne, donc $[\tau_i', \tau_j'] = 0$ et par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= [\varphi^{ip}\tau_p, \varphi^{jq}\tau_q] \\ &= \varphi^{ip}\tau_p(\varphi^{jq})\tau_q - \varphi^{jq}\tau_q(\varphi^{ip})\tau_p. \end{aligned}$$

Or les $\{\tau_i\}$ forment une base de T, on a donc, pour tout a :

$$\varphi^{ip}\tau_p(\varphi^{ja}) = \varphi^{jp}\tau_p(\varphi^{ia});$$

c'est-à-dire

$$\tau_i'(\varphi^{ja}) = \tau_j'(\varphi^{ia}) \qquad \text{pour tout } a.$$

On a de même

$$\tau_i(\varphi^{-1ja}) = \tau_j(\varphi^{-1ia}) \qquad \text{pour tout } a.$$

Ces formules vont nous permettre d'énoncer le résultat suivant :

Théorème.

$$\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} = \mathrm{tr}(\varphi d\varphi^{-1}).$$

Démonstration. Il suffit de calculer la valeur de $\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}}$ sur n'importe quelle base. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \tau_i, \omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} \rangle &= c_{\mathfrak{g}'}(\tau_i) - \underbrace{c_{\mathfrak{g}}(\tau_i)}_{=0} = c_{\mathfrak{g}'}(\varphi^{-1ij}\tau_j') \\ &= \tau_j'(\varphi^{-1ij}) = \varphi^{jk}\tau_k(\varphi^{-1ij}) \\ &= \varphi^{jk}\tau_i(\varphi^{-1kj}) = tr(\varphi\tau_i(\varphi^{-1})) \\ &= \langle \tau_i, tr(\varphi d\varphi^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Grâce à la A-bilinéarité des chevrons, le résultat est démontré. □

1.5 Seconde définition

Soit T une A-algébroïde de Lie.

Définition. *Un T-module à droite est un A-module M sur lequel T agit à droite ; c'est-à-dire que l'on a une multiplication* $\begin{array}{ccc} A\otimes_k T & \longrightarrow & A \\ (a,\tau) & \longrightarrow & a\tau \end{array}$ *telle que :*

$$(xa)\tau = x(a\tau),$$

$$(x\tau)a = xa\tau + x\tau(a),$$

$$(x\tau)\tau' - (x\tau')\tau = x[\tau, \tau'];$$

pour tout $x \in M$, $a \in A$ et $\tau \in T$.

Il faut remarquer que A ne possède pas de structure naturelle de T-module à droite.

Par contre, si on se donne une structure de Calabi-Yau c sur T, on va pouvoir construire une telle multiplication : on pose, pour $a \in A$ et $\tau \in T$,

$$a\tau = -c(a\tau) = -ac(\tau) - \tau(a).$$

Vérifions que les trois axiomes d'une structure de T-module sont vérifiés :

$$\begin{aligned} a(b\tau) &= -ac(b\tau) - (b\tau)(a) \\ &= -abc(\tau) - a\tau(b) - b\tau(a) \\ &= -abc(\tau) - \tau(ab) = (ab)\tau. \end{aligned}$$

Le premier axiome est vérifié.

$$\begin{aligned} (a\tau)b &= (-ac(\tau) - \tau(a))b \\ &= -abc(\tau) - b\tau(a) \\ &= \underbrace{-ac(b\tau) - b\tau(a)}_{=a(b\tau)} + \underbrace{ac(b\tau) - abc(\tau)}_{=a\tau(b)}. \end{aligned}$$

Le second axiome est vérifié.

$$\begin{aligned} (a\tau)\tau' - (a\tau')\tau &= (-ac(\tau) - \tau(a))\tau' - (-ac(\tau') - \tau'(a))\tau \\ &= ac(\tau)c(\tau') + \tau'(ac(\tau)) + \tau(a)c(\tau') + \tau'(\tau(a)) \\ &\quad -(ac(\tau')c(\tau) + \tau(ac(\tau')) + \tau'(a)c(\tau) + \tau(\tau'(a))) \\ &= a\tau'(c(\tau)) - a\tau(c(\tau')) + \tau'\tau(a) - \tau\tau'(a) \\ &= -ac([\tau, \tau']) - [\tau, \tau'](a) = a[\tau, \tau']. \end{aligned}$$

Le troisième axiome est lui aussi vérifié.

Réciproquement, si on se donne une action de T à droite sur A, on peut construire une structure de Calabi-Yau en posant

$$c(\tau) = -1\tau.$$

En effet, on a :

$$c(a\tau) = -1(a\tau) = -((1\tau)a - \tau(a)) = ac(\tau) + \tau(a)$$

et

$$\begin{aligned} c([\tau, \tau']) &= -1[\tau, \tau'] = (-1\tau)\tau' - (-1\tau')\tau = c(\tau)\tau' - c(\tau')\tau \\ &= -c(c(\tau)\tau') + c(c(\tau')\tau) = -\tau'(c\tau) + \tau(c\tau'). \end{aligned}$$

On peut donc maintenant donner une nouvelle définiton de la notion de structure de Calabi-Yau :

Définition. *Une structure de Calabi-Yau sur T est une structure de T-module à droite sur A.*

1.6 Troisième définition

Avant d'arriver à une nouvelle définition de la notion de structure de Calabi-Yau, on va tout d'abord monter un résultat général.

Soit T une A-algébroïde de Lie. On suppose que T est un A-module projectif de rang n. On veut montrer que pour un A-module M, on peut construire une bijection canonique entre les structures de T-modules à gauche sur M et les structures de T-modules à droite sur $M \otimes \Omega^n(T)$; où $\Omega^n(T) = Hom_A(\Lambda^n T, A)$.

Pour cela, on commence par montrer les lemmes suivants :

Lemme. Le module $\Omega^n(T)$ peut être muni d'une structure canonique de T-module à droite donnée par :

$$\omega\tau = -\tau(\omega) \qquad \text{pour } \tau \in T \text{ et } \omega \in \Omega^n(T) \ (cf.\ [1]).$$

Démonstration. Vérifions les axiomes d'une structure de T-module à droite. La formule de Cartan nous affirme que, pour tout $\tau \in T$ et tout $\omega \in \Omega^\bullet(T)$,

$$\tau(\omega) = d\imath_\tau\omega + \imath_\tau d\omega.$$

Or, T est un T-module projectif de rang n et par conséquent, $\Omega^{n+1}(T) = 0$ et donc $d\omega = 0$ si $\omega \in \Omega^n(T)$. Dans ce cas, la formule de Cartan devient

$$\tau(\omega) = d\langle\tau, \omega\rangle.$$

Soit $\tau \in T$, $a \in A$ et $\omega \in \Omega^n(T)$, on a

$$(\omega a).\tau = (a\omega).\tau = -\tau(a\omega) = -d\langle\tau, a\omega\rangle,$$

or les chevrons sont A-bilinéaires donc

$$(\omega a).\tau = -d\langle a\tau, \omega\rangle = -a\tau(\omega) = \omega.(a\tau).$$

Le premier axiome d'une structure de T-module à droite est bien vérifié.
Par ailleurs,

$$d(a\langle\tau, \omega\rangle) = da\langle\tau, \omega\rangle + ad\langle\tau, \omega\rangle,$$

or

$$0 = \langle\tau, da\omega\rangle = \langle\tau, da\rangle\omega - da\langle\tau, \omega\rangle;$$

D'où

$$(\omega\tau)a = \omega a\tau + \tau(a)\omega.$$

Pour le dernier axiome, on écrit :

$$(\omega\tau)\tau' - (\omega\tau')\tau = -\tau'(\omega\tau) + \tau(\omega\tau') = \tau'\tau\omega - \tau\tau'\omega = -[\tau, \tau'](\omega) = \omega[\tau, \tau'].$$

□

Lemme. Si M est un T-module à gauche et N est un T-module à droite, alors $M \otimes_A N$ peut être muni d'une structure de T-module à droite en posant :

$$(m \otimes n)\tau = -(\tau m) \otimes n + m \otimes (n\tau).$$

Démonstration. On vérifie encore une fois les trois axiomes d'uns structure de T-module à droite.

◇ Premier axiome :

$$\begin{aligned}
(m \otimes n)(a\tau) &= -(a\tau)m \otimes n + m \otimes n(a\tau) \\
&= -a(\tau m) \otimes n + m \otimes (na)\tau \\
&= -(\tau m) \otimes na + m \otimes (na)\tau \\
&= (m \otimes na)\tau = ((m \otimes n)a)\tau.
\end{aligned}$$

◇ Second axiome :

$$\begin{aligned}
((m \otimes n)\tau)a &= -a\tau m \otimes n + am \otimes n\tau \\
&= -\tau(am) \otimes n + \tau(a)m \otimes n + am \otimes n\tau \\
&= (am \otimes n)\tau + \tau + \tau(a)m \otimes n.
\end{aligned}$$

◇ Troisième axiome :

$$\begin{aligned}
((m \otimes n)\tau)\tau' - ((m \otimes n)\tau')\tau &= (-\tau m \otimes n + m \otimes n\tau)\tau' \\
&\quad +(\tau' m) \otimes n + m \otimes n\tau')\tau \\
&= \tau'\tau m \otimes n - \tau m \otimes n\tau' \\
&\qquad +\tau' m \otimes n\tau - m \otimes n\tau\tau' \\
&\quad -\tau\tau' m \otimes n + \tau' m \otimes n\tau \\
&\qquad -\tau m \otimes n\tau' + m \otimes n\tau'\tau \\
&= -[\tau, \tau']m \otimes n + m \otimes n[\tau, \tau'] \\
&= (m \otimes n)[\tau, \tau'].
\end{aligned}$$

□

Maintenant, lorsque que l'on a un T-module à gauche M, on peut naturellement lui associer le T-module à droite $M \otimes_A \Omega^n(T)$. Cette association fournit un foncteur canonique entre les structures de T-modules à gauche sur M et les structures de T-modules à droite sur $M \otimes_A \Omega^n(T)$. On cherche alors à construire le foncteur inverse. Pour cela, on a la proposition suivante :

Lemme. Si M et N sont deux T-modules à droite, alors $Hom(M; N)$ peut être muni d'une structure de T-module à gauche en posant :

$$(\tau f)(x) = -f(x)\tau + f(x\tau).$$

Démonstration. Encore une fois, on vérifie les trois axiomes :

◇ Premier axiome :

$$\begin{aligned}
((a\tau)f)(x) &= -f(x)(a\tau) + f(x(a\tau)) \\
&= -(f(x)a)\tau + f((x\tau)a) \\
&= -(af(x))\tau + (af)(x\tau) \\
&= (\tau f)(xa) = a(\tau f)(x).
\end{aligned}$$

◇ Second axiome :

$$\begin{aligned}(\tau(af))(x) - (a(\tau f))(x) &= -(af)(x)\tau + (af)(x\tau) + f(x)\tau a - f(x\tau)a \\ &= -f(x)(a\tau) + ((f(x)\tau)a \\ &= -(f(x)\tau)a + f(x)\tau(a) + (f(x)\tau)a \\ &= (\tau(a)f)(x).\end{aligned}$$

◇ Troisième axiome :

$$\begin{aligned}[\tau,\tau']f(x) &= -f(x)[\tau,\tau'] + f(x[\tau,\tau']) \\ &= -f(x)\tau\tau' + f(x)\tau'\tau + f(x\tau\tau') - f(x\tau'\tau) \\ &= -f(x)\tau\tau' + f(x\tau)\tau' - f(x\tau)\tau' + f(x)\tau'\tau \\ &\quad + f(x\tau\tau') - f(x\tau')\tau + f(x\tau')\tau - f(x\tau'\tau) \\ &= (\tau f)(x)\tau' + (\tau' f)(x\tau) - (\tau' f)(x)\tau - (\tau f)(x\tau') \\ &= (\tau\tau' f)(x) - (\tau'\tau f)(x).\end{aligned}$$

□

Cette nouvelle construction nous permet donc d'associer naturellement à un T-module à droite M un T-module à gauche en prenant $Hom(\Omega^n(T); M)$.

Proposition. *Pour tout A-module M, on a une bijection :*

$$\Big\{\textit{Structures de } T\textit{-module à gauche sur } M\Big\}$$

$$\xrightarrow{\sim} \Big\{\textit{Structures de } T\textit{-module à droite sur } M \otimes_A \Omega^n(T)\Big\}$$

donnée par

$$(m \otimes \omega)\tau = -\tau m \otimes \omega - m \otimes \tau(\omega).$$

Démonstration. Ce que l'on veut montrer, c'est qu'il existe un isomorphisme canonique entre $Hom_A(\Omega^n(T), M \otimes_A \Omega^n(T))$ et M. Pour cela, on commence par remarquer que se donner un homomorphisme de $\Omega^n(T)$ dans $M \otimes_A \Omega^n(T)$ revient à se donner un homomorphisme de $\Omega^n(T)$ dans M et un endomorphisme de $\Omega^n(T)$. Or $\Omega^n(T)$ est un A-module libre de rang 1, donc $Hom(\Omega^n(T), \Omega^n(T)) = \Omega^n(T)$. On a donc

$$Hom_A(\Omega^n(T), M \otimes_A \Omega^n(T)) \cong Hom_A(\Omega^n(T), M) \otimes_A \Omega^n(T).$$

Par ailleurs, il existe un morphisme naturel entre ce dernier ensemble et M : le morphisme d'évaluation.

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(\Omega^n(T), M) \otimes_A \Omega^n(T) & \qquad & f \otimes \omega \\ \Big\downarrow {\scriptstyle ev} & & \Big\downarrow \\ M & & f(\omega) \end{array}$$

Il est clair que ce morphisme est surjectif ; et il est facile de montrer qu'il est injectif.
On a donc le résultat voulu. □

En particulier, une structure de T-module à droite sur A est la même chose que structure de T-module à gauche sur $Hom(\Omega^n(T), M) = \Lambda^n T = \det T$. Cette dernière remarque nous permet alors de donner une troisième définition de la notion de structure de Calabi-Yau.

Définition. *Une structure de Calabi-Yau sur T est la donnée d'une structure de T-module à gauche sur* $\det(T) = \Lambda^n T$.

Chapitre 2

Introduction à la superalgèbre

On veut maintenant généraliser les constructions précédentes au cas de la superalgèbre et plus particulièrement regarder quelles structures de Calabi-Yau sont possibles sur l'algèbre extérieure du fibré cotangent d'une algèbre commutative. Avant cela, on va commencer par faire des rappels sur la superalgèbre linéaire et introduire la notion de berezinien qui nous sera utile pour la suite.

2.1 Algèbre linéaire dans les superespaces

La première propriété caractéristique de la superalgèbre est que tous les groupes additifs qui aparaissent sont $\mathbb{Z}_2$-gradués. On notera tous ces groupes additifs avec la convention $A = A_0 \oplus A_1$. Si $a \in A_\epsilon$ est un élément homogène de degré ϵ, alors on pose $\tilde{a} = \epsilon$. Les éléments de A_0 sont dits pairs et ceux de A_1 impairs. Toute loi multiplicative est compatible avec la graduation, c'est-à-dire $\widetilde{(ab)} = \tilde{a} + \tilde{b}$.

La seconde propriété caractéristique de la superalgèbre est que dans les définitions et les axiomes des structures de base, et dans les identités multilinéaires qui en sont dérivées, il y a, en comparaison de l'algèbre ordinaire, des facteurs ± 1. Il y a une règle générale heuristique pour le calcul de ces facteurs.

Règle des signes. *Si dans une formule d'algèbre usuelle, il y a des monômes avec des échanges de termes, alors dans la formule correspondante dans la superalgèbre toute intervertion de termes voisins, par exemple a et b, est accompagnée par la multiplication du monôme par le facteur $(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}$.*

Cette règle s'applique dans beaucoup de cas, mais il faut faire attention car il existe des exceptions (par exemple la généralisation du déterminant, *cf.* 2.3).

2.1.1 Anneaux, commutateurs et supercommutativité

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ un anneau $\mathbb{Z}_2$-gradué. Dans l'axiome d'associativité, il n'y a pas d'intervertion de termes, par conséquent cet axiome reste vrai dans le cas de la superalgèbre. Le supercommutateur d'une paire d'éléments a, b de A est défini par :

$$[a, b] = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba.$$

Remarque. Pour ce type d'expression, on suppose toujours que a et b sont homogènes et que la définition est étendue aux éléments non-homogènes par additivité.

On dira que les deux éléments a et b (super)commutent si $[a, b] = 0$. Par exemple, deux éléments impairs supercommutent si $ab = -ba$. On dira par ailleurs que l'anneau A est (super)commutatif si toute paire d'éléments de A supercommute.

2.1.2 Exemples

- ◇ Pour $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, on note par $\Lambda(n)$ ou $\Lambda[\xi]$ l'algèbre de Grassman en n variables. C'est l'algèbre engendrée par les $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et vérifiant les relations
$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i \qquad \text{pout tout } i, j.$$
On introduit une structure de superalgèbre sur $\Lambda(n)$ en posant $\tilde{\xi_i} = 1$.
- ◇ Plus généralement, soit B un anneau commutatif et S un B-module. On pose $A = \Lambda^{\bullet}_B(S)$ avec $A_0 = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^{2i}_B(S)$ et $A_1 = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^{2i+1}_B(S)$. Alors A est un anneau supercommutatif.
- ◇ Dans n'importe quel anneau B, le supercommutateur vérifie deux égalités fondamentales :
$$[a, b] = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[b, a];$$
$$[a, [b, c]] + (-1)^{\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})}[b, [c, a]] + (-1)^{\tilde{c}(\tilde{a}+\tilde{b})}[c, [a, b]] = 0.$$
On reconnait en fait que ces deux formules sont les formules usuelles d'anticommutativité du commutateur et de Jacobi auxquelles on a appliqué la règle des signes. On peut aussi vérifier que si B est une A-algèbre, alors le supercommutateur est A-linéaire dans le sens suivant ($a \in A$; b, $c \in B$) :
$$a[b, c] = [ab, c] = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[ba, c] = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[b, ac] = (-1)^{\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})}[b, c]a.$$
Toutes ces identités deviennent les axiomes pour les superalgèbres de Lie.

2.1.3 Modules

Les axiomes pour les structures de A-module à gauche, de A-modules à droite et de A-bimodules en superalgèbre sont les mêmes que les axiomes usuels ; il n'y a pas de changement de signe additionnel.
Si l'anneau A est supercommutatif, alors, de même qu'en algèbre commutative, un module unilatère peut être transformé canoniquement en module bilatère. Plus précisément, on dit qu'une structure de module à droite et une structure de module à gauche sur S sont consistantes si, pour $a \in A$ et $s \in S$, on a $as = (-1)^{\tilde{a}\tilde{s}} sa$. Alors :

- ◇ Si on se donne une structure de A-module à gauche sur S, il existe une unique structure de A-module à droite consistante avec la première structure ; et inversement.
- ◇ Un module muni de structures consistantes est un bimodule (on vérifie que $a(sb) = (as)b$).

Morphismes de modules. Une application additive f entre deux A-modules S et T est appelé morphisme pair si elle preserve la graduation et est A-linéaire. Alors, de $f(as) = af(s)$, il vient que $f(sb) = f(s)b$, et inversement ; par conséquent, un morphisme pair de module unilatère est automatiquement un morphisme de bimodule. On notera le groupe additif de tels morphismes par $Hom_0(S,T)$.
Une application additive f entre deux A-modules S et T est appelé morphisme impair si elle inverse la graduation (*i.e.* $\widetilde{f(s)} = \tilde{s}+1$) et est A-linéaire en respectant la règle des signes : $f(as) = (-1)^{\tilde{a}}af(s)$, $f(sb) = f(s)b$. On notera le groupe additif de tels morphismes par $Hom_1(S,T)$.
On pose alors

$$Hom(S,T) = Hom_0(S,T) \oplus Hom_1(S,T).$$

On peut introduire une structure de A-module sur $Hom(S,T)$ par la formule usuelle $(af)(s) = a(f(s))$.

Dual d'un module. Le A-module $M^* = Hom_A(M,A)$ est appelé le dual de M. L'accouplement canonique entre M^* et M est noté $(.,.)$. On a alors

$$(m^*a, a) = (m^*, am);$$

$$(am^*, m) = a(m^*, m);$$

$$(m^*, ma) = (m^*, m)a.$$

Pour tout A-module M, il y a un isomorphisme canonique I_M entre M et $M^{**} = (M^*)^*$ donné par la formule

$$(I_M(m), m^*) = (-1)^{\tilde{m}\widetilde{m^*}}(m^*, m).$$

Si on se donne un élément $F \in Hom_A(M,N)$, on va pouvoir construire l'opérateur adjoint $F^* \in Hom_A(N^*, M^*)$ en posant

$$(F^*n^*, m) = (-1)^{\tilde{F}\widetilde{n^*}}(n^*, Fm).$$

L'opérateur adjoint vérifie alors les propriétés suivantes :
- ◇ La parité de F^* est la même que celle de F ;
- ◇ Si $F \in Hom_A(M,N)$ et $G \in Hom_A(N,L)$, alors $(GF)^* = (-1)^{\tilde{F}\tilde{G}}F^*G^*$;
- ◇ Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "I_M"'] & N \arrow[d, "I_N"] \\ M^{**} \arrow[r, "F^{**}"'] & N^{**} \end{tikzcd}$$

2.1.4 Foncteur de changement de parité

Soit S un A-module. On définit le module ΠS par ces conditions :
- ◇ $(\Pi S)_0 = S_1$ et $(\Pi S)_1 = S_0$;
- ◇ l'addition dans ΠS est la même que dans S ; la multiplication à droite par un élément de A est la même que dans S, la multiplication à gauche diffère par un signe : $a(\Pi s) = (-1)^{\tilde{a}}\Pi(as)$.

À un morphisme $f : S \to T$, on associe $f^\Pi : \Pi S \to \Pi T$ le morphisme qui coïncide avec f en tant qu'application entre ensembles. On remarque alors que ceci fait de l'association $S \to \Pi S$ un foncteur, avec $\Pi^2 = Id$.

De plus, si on se donne un morphisme $f : S \to T$, on peut construire des morphismes Πf et $f\Pi$ en posant

$$\begin{array}{rccc} \Pi f : & S & \longrightarrow & \Pi T \\ & s & \longrightarrow & \Pi(f(s)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f\Pi : & \Pi S & \longrightarrow & T \\ & \Pi s & \longrightarrow & f(s) \end{array}.$$

On a clairement $f^\Pi = \Pi f \Pi$.

2.1.5 Modules libres

Soit I un ensemble divisé en deux sous-ensembles disjoints I_0 et I_1. Une base d'un A-module est un ensemble d'éléments homogènes $(m_i)_{i\in I}$ vérifiant $\widetilde{m_i} = 0$ si $i \in I_0$ et $\widetilde{m_i} = 1$ si $i \in I_1$ et tel que tout $m \in M$ peut s'exprimer de manière unique comme une somme $\sum \mu_i m_i$ avec les $\mu_i \in A$ sont presque tous nuls.

Un A-module M est dit libre de rang $p|q$ s'il possède une base avec p éléments pairs et q impairs. Le rang de M ne dépend pas de la base choisie.

On remarque que les A-modules libres avec un unique générateur se divisent en deux cas :

◇ le générateur est pair et le module est isomorphe à A ;

◇ le générateur est impair et le module coïncide avec ΠA.

Si M est libre de rang $p|q$, alors M est isomorphe à $A^{p|q} := A^p \oplus (\Pi A)^q$.

2.2 Matrices en superalgèbre linéaire

Un format de matrice consiste en deux ensembles finis qui sont divisés en couple de sous-ensembles disjoints d'éléments pairs et impairs : $I = I_0 \cup I_1$ et $J = J_0 \cup J_1$. Une matrice dans le format donné à valeurs dans l'anneau A est une fonction $a : I \times J \to A$ où les valeurs $a(i,j) = a_{ij}$ sont les éléments de la matrice. La parité de la position (ij) dans le format de matrice donné est $\tilde{i} + \tilde{j}$. Une matrice dans le format donné est dite paire si $\widetilde{a_{ij}} = \tilde{i} + \tilde{j}$ pour tout i, j et impaire si $\widetilde{a_{ij}} = \tilde{i} + \tilde{j} + 1$ pour tout i, j.

Un format de matrice standard est le format avec $I_0 = (1, \ldots, m)$, $I_1 = (m+1, \ldots, m+n)$ et $J_0 = (1, \ldots, p)$, $J_1 = (p+1, \ldots, p+q)$. Une matrice dans le format standard se décompose en quatre blocs :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est paire (*resp.* impaire) si les blocs B_1 et B_4 sont remplis avec des éléments pairs (*impairs*) de l'anneau alors que les blocs B_2 et B_3 sont remplis avec des éléments impairs (*resp.* pairs).

L'ensemble des matrices dans le format standard à coefficients dans A est noté $\mathcal{M}(m|n, p|q; A)$. Cet ensemble forme un module $\mathbb{Z}_2$-gradué et avec la multiplication usuelle des matrices, il est naturellement isomorphique à l'ensemble $Hom(A^{p|q}, A^{m|n})$. La composition des morphismes correspondant à la multiplication des matrices

$$\mathcal{M}(m|n, p|q; A) \times \mathcal{M}(p|q, r|s; A) \to \mathcal{M}(m|n, r|s; A).$$

2.2.1 Supertransposition

Soit B la matrice dans le format standard décrivant un morphisme pair ou impair $b : S \to T$ de A-modules libres. Il existe un morphisme naturel $b^* : T^* \to S^*$ vérifiant :

$$(b^*(t^*), s) = (-1)^{\tilde{b}\tilde{t}}(t^*, b(s)) \qquad \text{pour tout } t^* \in T^*,\ s \in S.$$

On note alors B^{st} la matrice de b^* dans les bases de T^* et S^* qui sont les bases duales à gauches de celles de S et T utilisées pour définir B. On a alors de formules pour exprimer B^{st} suivant la parité de B :

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^{st} = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_1^t & B_3^t \\ -B_2^t & B_4^t \end{pmatrix} & \text{pour } \tilde{B} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} B_1^t & -B_3^t \\ B_2^t & B_4^t \end{pmatrix} & \text{pour } \tilde{B} = 1 \end{cases}$$

où t représente la transposition usuelle.

Propriétés. Voila quelques propriétés de l'opération de supertransposition :
- ◇ $(B + C)^{st} = B^{st} + C^{st}$;
- ◇ $(BC)^{st} = (-1)^{\tilde{B}\tilde{C}} C^{st} B^{st}$;
- ◇ $(st)^4 = Id$, $(st)^2 \neq Id$.

2.2.2 Π-transposition

Avec les mêmes hypothèses, on note B^{Π} la matrice du morphisme b^{Π} dans le format standard avec les mêmes bases, où le bloc d'éléments pairs à été placé avant le bloc d'éléments impairs. Alors

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^{\Pi} = \begin{pmatrix} B_4 & B_3 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés. Voila quelques propriétés de l'opération de Π-transposition :
- ◇ $(B + C)^{\Pi} = B^{\Pi}$;
- ◇ $(BC)^{\Pi} = B^{\Pi} C^{\Pi}$;
- ◇ $\Pi^2 = Id$ et $\Pi \circ st \circ \Pi = st$.

2.3 Berizinien

Soit A une superalgèbre commutative. On note $GL(p|q; A)$ le groupe multiplicatif des automorphismes pairs de $A^{p|q}$. On veut définir un homomorphisme : $GL(p|q; A) \to GL(1|0; A)$ qui soit l'analogue du déterminant usuel.

2.3.1 Définition

Soit B un élément de $GL(p|q; A)$. En écrivant B dans le format standard, on pose

$$Ber \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \det(B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3) \det B_4^{-1}.$$

Le membre de droite est bien défini pour $B_1 \in GL(p|0; A_0)$ et $B_4 \in GL(q|0; A_0)$. Il appartient à A_0 et est inversible ; c'est-à-dire il est dans $GL(1|0; A_0)$.

Théorème. *L'application* $Ber : GL(p|q;A) \to GL(1|0;A)$ *est un homomorphisme de groupes qui coïncide avec le déterminant usuel lorsque* $q = 0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $Ber(BC) = BerB.BerC$ pour tout B, $C \in GL(p|q;A)$. Tout d'abord, on remarque que toute matrice de $GL(p|q,A)$ peut se décomposer sous la forme :

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} Id & C_2C_4^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix}}_{C_+} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 - C_2C_4^{-1}C_3 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}}_{C_0} \underbrace{\begin{pmatrix} Id & 0 \\ C_4^{-1}C_3 & Id \end{pmatrix}}_{C_-}$$

et que la première matrice du membre de droite peut elle-même s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} Id & C+C' \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & C \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & C' \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Donc le groupe $GL(p|q;A)$ est engendré par les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ C_3 & Id \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Id & C_2 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

où C_2 est élémentaire, *i.e.* C_2 possède un seul élément non nul. On pose alors :

$$G = \{C \in GL(p|q;A) | \forall B \in GL(p|q;A), Ber(BC) = BerB.BerC\}.$$

Cet ensemble est un groupe ; on veut montrer que $G = GL(p|q;A)$. Pour cela, il suffit de vérifier que les matrices précédentes appartiennent à G. Pour les deux premières, la vérification est immédiate. La troisième demande un peu plus de travail : soit $C_+ = \left(\begin{smallmatrix} Id & C \\ 0 & Id \end{smallmatrix}\right)$ où C est élémentaire. On veut montrer que $Ber(BC) = Ber(B)Ber(C)$ pour toute matrice B. On décompose la matrice B comme ci-dessus : $B = B_+B_0B_-$. Un calcul direct montre que la multiplication à gauche par B_+ et B_- est multiplicative par rapport au berezinien ; il suffit donc de considérer $B = B_-$. On a

$$B_-C_+ = \begin{pmatrix} Id & C \\ B & Id + BC \end{pmatrix},$$

$$Ber(B_-C_+) = \det(Id - C(Id + BC)^{-1}B)\det(Id + BC)^{-1}.$$

Or le seul élément c non nul de C appartient à A_1 donc $c^2 = 0$; par conséquent le produit de deux éléments quelconques des matrices BC et $C(Id+BC)^{-1}B$ est nul. Pour une telle matrice D, on sait que $(Id+D)^{-1} = Id-D$ et $\det(Id+D) = trD + 1$. On en déduit alors que

$$Ber(B_-C_+) = \det(Id - CB)det(Id + BC)^{-1} = (1 - tr(CB))(1 - tr(BC)) = 1.$$

□

2.3.2 Propriétés du Berizinien

◇ Si S est un A-module libre de rang fini et $b \in GL(S)$, on pose $Ber\, b = Ber\, B$, où B est une matrice quelconque dans le format standard qui représente b. Cette définition ne dépend pas du choix de la base pour S ;

◇ $Ber(B^{st}) = Ber\, B$; donc $Ber\, b^* = Ber\, b$;

◇ $Ber(B^{\Pi}) = (Ber\, B)^{-1}$ et donc $Ber\,(b^{\Pi}) = (Ber\, b)^{-1}$;

2.3.3 Berezinien d'un A-module libre

Soit S un A-module libre de rang $p|q$. On va définir un A-module libre $Ber\,S$ de rang $1|0$ si q est pair ou de rang $0|1$ si q est impair qui sera fonctorial vis-à-vis des isomorphismes pairs de A-modules et qui coïncidera avec $\Lambda^p S$ si q est nul.

Plus précisément, on définit $Ber\,S$ sur une classe de bases : à chaque base standard (s_i) du module S, on associe une base (*i.e.* un seul élément) $D(s_i) \in Ber\,S$ avec la relation :

$$\text{si } (s_i') = B(s_i),\ D(s_i') = Ber(B)D(s_i).$$

Par ailleurs, pour tout isomorphisme pair $b : S \to S'$, il y a un isomorphisme correspondant $Ber\,b : Ber\,S \to Ber\,S'$ qui envoie $D(s_i)$ sur $D(b(s_i))$. Si $S = S'$, alors $Ber\,b$ peut être naturellement identifié avec la multiplication par un élément de A_0 : c'est le $Ber\,b$ de la section 2.3.2.)

Chapitre 3

Structure de Calabi-Yau sur une algèbre extérieure

L'objectif est maintenant de généraliser la notion de structure de structure de Calabi-Yau à des super-espaces. En particulier, on voudra regarder l'analogue du résultat du paragraphe 1.3 pour une algèbre extérieure ΛE (vue comme une superalgèbre ; *cf.* 2.1.2). Enfin, on appliquera ce résultat au cas particulier $E = \Omega = Hom_A(T, A)$.

3.1 Définitions

Soit A une k-superalgèbre commutative.

Définition. *Une superalgébroïde de Lie sur A est une k-superalgèbre de Lie agissant sur A par dérivation,* i.e. $\tau(ab) = \tau(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\tau}} a\tau(b)$ *et équipé d'une structure de A-module telle que :*

$$[\tau, a\tau'] = (-1)^{\tilde{a}\tilde{\tau}}[\tau, \tau'] + \tau(a)\tau';$$

$$(a\tau)(b) = a\tau(b).$$

Définition. *Soit T une superalgébroïde de Lie sur A. Une structure de Calabi-Yau sur T est une application paire k-linéaire $c : T \to A$ telle que, pour tout τ, τ' appartenant à T et a appartenant à A :*

$$c(a\tau) = ac(\tau) + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\tau}}\tau(a),$$

$$c([\tau, \tau']) - \tau(c(\tau')) + \tau'(c(\tau)) = 0.$$

Là encore, on va pouvoir donner d'autres définitions de cette notion :

Définition. *Un T-module à droite est un A-module M sur lequel T agit à droite ; c'est-à-dire que l'on a une multiplication* $\begin{array}{ccc} A \otimes_k T & \longrightarrow & A \\ (a, \tau) & \longrightarrow & a\tau \end{array}$ *telle que :*

$$(xa)\tau = x(a\tau),$$

$$(x\tau)a = (-1)^{\tilde{a}\tilde{\tau}} xa\tau + x\tau(a),$$

$$(x\tau)\tau' - (-1)^{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'}(x\tau')\tau = x[\tau, \tau'];$$

pour tout $x \in M$, $a \in A$ et $\tau \in T$.

Proposition. *Se donner une structure de Calabi-Yau sur T est équivalent à se donner une structure de T-module à droite sur A.*

- ◇ *Si on a une structure de T-module à droite sur A, on construit $c : T \to A$ en posant*

$$c(\tau) = -1\tau.$$

- ◇ *Si on a une structure de Calabi-Yau sur T, on pose :*

$$a\tau = c(a\tau) = ac(\tau) + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\tau}}\tau(a).$$

La démonstration de cette assertion est identique à celle du cas pair (*cf.* 1.5).

On verra dans le paragraphe 3.3 l'équivalent de la troisième définition du chapitre 1 dans le cas de la superalgèbre.

3.2 Sur l'algèbre extérieure

Soit A une k-algèbre commutative. On suppose que le module T_A des dérivations de A est libre et admet une base abélienne $\{\overline{\tau}_i\}$. Soit E un A-module libre de rang m, avec une base $\{\Phi_\alpha\}$. On appelera l'ensemble $\mathfrak{g} = \{\overline{\tau}_i, \Phi_\alpha\} \subset A \oplus E$ un cadre de (A, E).

Considérons la A-superalgèbre commutative $\Lambda E = \bigoplus_{i=0}^m \Lambda_A^i(E)$ où la parité de $\Lambda_A^i(E)$ est égale à celle de i. Chaque cadre $\mathfrak{g}$ permet alors de définir une ΛE-base $\{\tau_i, \psi_\alpha\}$ de la superalgébroïde de Lie $T_{\Lambda E} = Der_k(\Lambda E)$:

On étend chaque champ $\overline{\tau}_i$ en une dérivation τ_i de la superalgèbre ΛE par la règle

$$\tau_i(a) = \overline{\tau}_i(a), \qquad \tau_i(\sum a_\alpha \Phi_\alpha) = \sum \overline{\tau}_i(a_\alpha)\Phi_\alpha$$

et on étend τ_i à ΛE tout entier grâce à la formule de Leibniz. Les champs $\{\tau_i\}$ sont des éléments pairs de $T_{\Lambda E}$ et ils forment une famille libre.

On définit les champs de vecteurs impairs ψ_α par

$$\psi_\alpha(\sum a_\nu \Phi_\nu) = a_\alpha; \qquad \psi_\alpha(a) = 0.$$

Comme dans le cas pair, cette base va permettre de construire une structure de Calabi-Yau sur $T_{\Lambda E}$ (*cf.* 1.4).

3.2.1 Changement de cadre

Soit $\mathfrak{g} = \{\overline{\tau}'_i, \Phi'_\alpha\}$ un autre cadre de (A, E) ; avec $\overline{\tau}'_i = g^{ij}\overline{\tau}_j$ et $\Phi'_\alpha = \Gamma^{\alpha\beta}\Phi_\beta$ où $g = (g^{ij}) \in GL_n(A)$ et $\Gamma = (\Gamma^{\alpha\beta}) \in GL_m(A)$.

Les nouvelles bases correspondantes sont alors égales à :

$$\tau'_i = g^{ip}\tau_p + g^{i\alpha\gamma}\Phi_\gamma\psi_\alpha \qquad \text{où} \qquad g^{i\alpha\gamma} = g^{iq}\tau_q(\Gamma^{-1\alpha\mu})\Gamma^{\mu\gamma};$$

$$\psi'_\alpha = \Gamma^{-1\mu\alpha}\psi_\mu.$$

Les formules pour la transformations inverses sont :

$$\tau_q = g^{-1qi}\tau'_i + \tau_q(\Gamma^{\alpha\gamma})\Phi_\gamma\psi'_\alpha;$$

$$\psi_\beta = \Gamma^{\alpha\beta}\psi'_\alpha.$$

Théorème. *On pose* $\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} = c_{\mathfrak{g}'} - c_{\mathfrak{g}} \quad \in \Omega^{1,cl}(\Lambda E)$. *Alors*

$$\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} = tr(gdg^{-1}) - tr(\Gamma^{-1}d\Gamma).$$

Démonstration. Il suffit de calculer les valeurs de $\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}}$ sur n'importe quelle base. On a

$$\begin{aligned}
< \tau_q, \omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} > &= c_{\mathfrak{g}'}(\tau_q) - c_{\mathfrak{g}}(\tau_q) \\
&= c_{\mathfrak{g}'}(\tau_q) \\
&= c_{\mathfrak{g}'}(g^{-1qi}\tau'_i + \tau_q(\Gamma^{\alpha\gamma})\Phi_\gamma\psi'_\alpha) \\
&= \tau'_i(g^{-1qi}) + (-1)^{\widetilde{\psi'_\alpha}\left(\widetilde{\tau_q(\Gamma^{\alpha\gamma})\Phi_\gamma}\right)}\psi'_\alpha(\tau_q(\Gamma^{\alpha\gamma})\Phi_\gamma) \\
&= g^{ip}\tau_p(g^{-1qi}) + \underbrace{g^{i\alpha\gamma}\Phi_\gamma\psi_\alpha(g^{-1qi})}_{=0} + (-1)^1\Gamma^{-1\mu\alpha}\psi_\mu(\tau_q(\Gamma^{\alpha\gamma})\Phi_\gamma) \\
&= g^{ip}\tau_p(g^{-1qi}) - \Gamma^{-1\mu\alpha}\tau_q(\Gamma^{\alpha\mu}) \\
&= g^{ip}\tau_q(g^{-1pi}) - \Gamma^{-1\mu\alpha}\tau_q(\Gamma^{\alpha\mu}) \\
&= tr(g\tau_q(g^{-1})) - tr(\Gamma^{-1}\tau_q(\Gamma)) \\
&= < \tau_q, tr(gdg^{-1}) - tr(\Gamma^{-1}d\Gamma) >;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< \psi_\beta, \omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} > &= c_{\mathfrak{g}'}(\psi_\beta) - c_{\mathfrak{g}}(\psi_\alpha) \\
&= c_{\mathfrak{g}'}(\Gamma^{\alpha\beta}\psi'_\alpha) \\
&= \psi'_\alpha(\Gamma^{\alpha\beta}) = 0 \\
&= < \psi_\beta, tr(gdg^{-1}) - tr(\Gamma^{-1}d\Gamma) > .
\end{aligned}$$

□

3.2.2 Dans le cas du fibré cotangent

Si on regarde maintenant le cas où l'on remplace E par $\Omega_A = Hom_A(T_A, A)$, la base de Ω_A considérée est la base duale de celle de T et, suivant les notations précédentes, la matrice de changement de base Γ devient ${}^t(g^{-1})$.
On calcule alors la valeur de $\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathfrak{g}',\mathfrak{g}} &= tr(gdg^{-1}) - tr(\Gamma^{-1}d\Gamma)) \\
&= tr(gdg^{-1}) - tr\Big(({}^t(g^{-1}))^{-1}d({}^t(g^{-1}))\Big) \\
&= tr(gdg^{-1}) - tr({}^t(dg^{-1})g) \\
&= tr(gdg^{-1}) - tr(gdg^{-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Ce dernier calcul nous permet alors d'affirmer qu'il existe une structure de Calabi-Yau canonique sur $T_{\Lambda\Omega_A}$.

3.3 Structure de T-modules à droites et Berezinien

Soit T une A-superalgébroïde de Lie. Dans cette section, on veut construire l'analogue de la troisième définition de la notion de structure de Calabi-Yau (*cf.* 1.6). Dans le cas pair, on commençait par munir $\Omega^n(T)$ d'une structure de T-module à droite ; or $\Omega^n(T) = Hom_A(\Lambda^n T, A)$ et $\Lambda^n T = \det T$, dans notre cas, c'est donc sur l'ensemble $Hom_A(Ber(T), A)$ que l'on veut introduire une structure naturelle de T-module à droite. Par ailleurs, on remarque que $Hom_A(Ber(T), A) = Ber(\Omega)$ où $\Omega = Hom_A(T, A)$; en effet, se donner un homomorphisme de $Ber(T)$ dans A, c'est équivalent à associer à un élément de base de $Ber(T)$ un élément a de A ; c'est à dire associer à une base $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ de T l'élément a - en notant $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base duale - on associe alors à ce morphisme l'élément $aD(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de $Ber(\Omega)$. On vérifie alors facilement que ce morphisme est indépendant de la base de T. En effet, si on se donne une autre base $\{\tau_1', \dots, \tau_n'\}$ de T, avec $\tau' = b\tau$; alors

$$D(\tau_1', \dots, \tau_n') = Ber(b)D(\tau_1, \dots, \tau_n);$$

$$\omega = b^*\omega' \qquad \text{et} \qquad D(\omega_1, \dots, \omega_n) = Ber(b^*)D(\omega_1', \dots, \omega_n').$$

D'où

$$aBer(b)D(\omega_1', \dots, \omega_n') = aBer(b)(Ber(b^*))^{-1}D(\omega_1, \dots, \omega_n) = aD(\omega_1, \dots, \omega_n).$$

Le but est donc désormais de munir $Ber(\Omega)$ d'une structure de T-module à droite.

Une idée pour la construction de cette action de T sur $Ber(\Omega)$ est fournie dans l'annexe A.

Grâce à cette structure, on peut maintenant faire des constructions analogues à celle de paragraphe 1.6 et ainsi trouver, pour tout A-module M, une bijection canonique entre les structures de T-module à gauche sur M et les structures de T-module à droite sur $M \otimes_A Ber(\Omega)$.

Proposition. *Se donner une structure de Calabi-Yau sur T est équivalent à se donner une structure de T-module à gauche sur $Ber(T)$.*

3.3.1 Sur l'algèbre extérieure

Théorème. *On reprend les mêmes hypothèses que dans le paragraphe 3.2 ; on a alors*

$$Ber(\Omega_{\Lambda E}) = \Lambda E \otimes_A \left(\Omega^n(T_A) \otimes_A \det(E)^{-1}\right).$$

Avant de démontrer le théorème, on va s'intéresser à deux lemmes techniques.

Lemme. Soit C une superalgèbre commutative. Si on se donne une suite exacte de C-modules libres :

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0,$$

alors

$$Ber(V) = Ber(V') \otimes_C Ber(V'').$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{b}'$ une base de V' et $\mathfrak{b}''$ une base de V''. En relevant dans V la base de V'', on obtient une base de V. Maintenant, si on choisit d'autres bases pour V' et V'' ; par exemple $\widetilde{\mathfrak{b}'} = B'\mathfrak{b}'$ avec $B' = \begin{pmatrix} B_1' & B_2' \\ B_3' & B_4' \end{pmatrix}$ dans le format standard et $\widetilde{\mathfrak{b}''} = B''\mathfrak{b}''$ avec $B'' = \begin{pmatrix} B_1'' & B_2'' \\ B_3'' & B_4'' \end{pmatrix}$ dans le format standard. La matrice de transition entre les bases $\widetilde{\mathfrak{b}}$ et $\mathfrak{b}$ sera alors de la forme (dans le format standard)(les $\star$ représentent des éléments quelconques de C) :

$$B = \begin{pmatrix} B_1' & \star & B_2' & \star \\ 0 & B_1'' & 0 & B_2'' \\ B_3' & \star & B_4' & \star \\ 0 & B_3'' & 0 & B_4'' \end{pmatrix}.$$

Le calcul du berezinien nous donne alors :

$$Ber(B) = \det\left(\begin{pmatrix} B_1' & \star \\ 0 & B_1'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_2' & \star \\ 0 & B_2'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_4' & \star \\ 0 & B_4'' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_3' & \star \\ 0 & B_3'' \end{pmatrix}\right)$$

$$* \det\left(\begin{pmatrix} B_4' & \star \\ 0 & B_4'' \end{pmatrix}^{-1}\right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Ber(B) &= \det(B_1' - B_2'B_4'^{-1}B_3')\det(B_1'' - B_2''B_4''^{-1}B_3'')\det(B_1')^{-1}\det(B_1'')^{-1} \\ &= Ber(B')Ber(B''). \end{aligned}$$

Cette équation nous permet donc de construire un morphisme canonique entre $Ber(V') \otimes_C Ber(V'')$ et $Ber(V)$; de plus, ce morphisme est clairement une bijection. □

Lemme. Soit C une superalgèbre commutative et M un C-module libre. Alors

$$Ber(\Pi M) = Ber(M)^{-1}.$$

Démonstration. Si on se donne deux bases $\{m_1, \ldots, m_n\}$ et $\{m_1', \ldots, m_n'\}$ de M - la matrice de transition entre ces des bases est B - en appliquant l'application de changement de parité, on obtient alors deux bases de ΠM : $\{\Pi m_1, \ldots, \Pi m_n\}$ et $\{\Pi m_1, \ldots, \Pi m_n\}$. La matrice de passage entre ces deux bases est B^{Π}. Or, on sait que (*cf.* 2.3.2) $Ber(B^{\Pi}) = Ber(B)^{-1}$. Cela nous permet donc de construire un isomrphisme canonique entre $Ber(M) \otimes_C Ber(\Pi M)$ et C. □

Démonstration du théorème. En reprenant la construction de la base de $T_{\Lambda E}$, on s'aperçoit que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_A \otimes_A \Lambda E \longrightarrow T_{\Lambda E} \longrightarrow \Pi E^* \otimes_A \Lambda E \longrightarrow 0.$$

En effet, pour voir d'où vient cette suite, on écrit que

$$T_{\Lambda E} = \underbrace{\bigoplus_i \tau_i}_{\cong T_A \otimes_A \Lambda E} \oplus \underbrace{\bigoplus_\alpha \psi_\alpha}_{\cong \Pi E^* \otimes_A \Lambda E}.$$

Si ici, c'est ΠE qui apparait, c'est dû au fait que dans la construction de la base, les dérivations associées à E^* sont impaires.
En prenant la suite duale, on a :

$$0 \longleftarrow \Omega_A \otimes_A \Lambda E \longleftarrow \Omega_{\Lambda E} \longleftarrow \Pi E \otimes_A \Lambda E \longleftarrow 0$$

On en déduit alors que

$$Ber(\Omega_{\Lambda E}) = Ber(\Omega_A \otimes_A \Lambda_E) \otimes_A (Ber(\Pi E \otimes_A \Lambda E))$$

i.e.

$$Ber(\Omega_{\Lambda E}) = \Lambda E \otimes_A \det(\Omega) \otimes_A Ber(\Pi E).$$

car Ω ne possède pas d'élément impair.
Enfin, on sait que $Ber(\Pi E) = Ber(E)^{-1}$; d'où le résultat □

3.3.2 Dans le cas du fibré cotangent

Théorème. *Le module $Ber(T_{\Lambda\Omega_A})$ est trivial.*

Lemme. Soit C une superalgèbre commutative et M un C-module libre. Alors

$$Ber(M^*) = Ber(M)^{-1}.$$

Démonstration. Si on se donne deux bases $\{m_1, \dots, m_n\}$ et $\{m'_1, \dots, m'_n\}$ de M, avec $m = Bm'$; alors la matrice de transition entre les bases duales sera B^{st}. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "B"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M^* & M^* \arrow[l, "B^{st}"] \end{tikzcd}$$

Enfin, comme $Ber(B) = Ber(B^{st})$ (*cf.* 2.3.2), on peut construire un isomorphisme canonique entre $Ber(M) \otimes_C Ber(M^*)$ et C. □

Démonstration du théorème. Si on remplace E par Ω_A, d'après le théorème précédent, on voit bien que $Ber(\Omega_{\Lambda\Omega_A})$ est trivial.
Or $Ber(\Omega_{\Lambda\Omega_A}) = Ber((T_{\Lambda\Omega_A})^*) = Ber(T_{\Lambda\Omega_A})^{-1}$. Par conséquent, $Ber(T_{\Lambda\Omega_A})$ est aussi trivial. □

Ce résultat implique qu'il existe une structure de Calabi-Yau canonique sur $T_{\Lambda\Omega_A}$ (*cf.* 3.2.2).

Remarque. Il est possible d'arriver directement à ce résultat sans faire appel au théorème précédent : on sait *a priori* que $Ber(T_{\Lambda E})$ est isomorphe à ΛE mais que cet isomorphisme n'est pas canonique : regardons plus en details l'influence du choix de la base sur cet isomorphisme.

On se donne deux cadres de (A, E) : $\mathfrak{g} = (\bar{\tau}_i, \Phi_\alpha)$ et $\mathfrak{g} = (\bar{\tau}_i, \Phi_\alpha)$ et on reprend les notations de la section 3.2.1. La matrice de transition entre les bases de $T_{\Lambda E}$ est de la forme

$$P = \left(\begin{array}{c|c} g & \bigstar \\ \hline 0 & {}^t(\Gamma^{-1}) \end{array}\right).$$

Par conséquent,

$$Ber(P) = \det g (\det {}^t(\Gamma^{-1}))^{-1} = \det g \det \Gamma.$$

Donc,

$$D(\mathfrak{g}') = \det g \det \Gamma D(\mathfrak{g}).$$

Maintenant, si on se place dans le cas où $E = \Omega_A$, alors $\Gamma = {}^t g^{-1}$ et donc

$$D(\mathfrak{g}') = D(\mathfrak{g}).$$

L'isomorphisme est donc canonique.

Annexe A

Construction de l'action de T à droite sur $Ber(\Omega)$

Dans cette partie, j'explique le raisonnement que j'ai appliqué pour essayer de construire une structure de T-module à droite sur $Ber(\Omega)$, accompagné de tous les calculs effectués. L'idée directrice de cette construction à été d'analyser ce qui se passe dans le cas pair et de le modifier pour l'appliquer au cas général. Comme nous allons le voir, cette démarche est relativement intéressante; malheureusement il me reste un problème pour affirmer que la construction proposée est bonne ou non.

Pour définir la structure de T-module à droite sur $Ber(\Omega)$, on revient au cas pair où l'on veut regarder un peu plus en détails l'action de T sur $\det(\Omega)$. On connait l'action de T sur $\Omega^n(T)$: elle est définie par $\omega\tau = -\tau(\omega)$ et on connait l'isomorphisme canonique entre $\Omega^n(T)$ et $\det(\Omega)$: si on se donne une base $\tau_1, \dots, \tau_n$ de T, en notant $\omega_1, \dots, \omega_n$ la base duale, on définit cet isomorphisme par :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(T) & \longrightarrow & \det(\Omega) \\ \omega & \longrightarrow & \omega(\tau_1, \dots, \tau_n)\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \end{array}.$$

Maintenant, si on note a l'élément $\omega(\tau_1, \dots, \tau_n)$, alors $(a\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n)\tau = \omega\tau = -\tau(\omega)$ et

$$\begin{aligned} -\tau(\omega)(\tau_1, \dots, \tau_n) &= -\tau(\omega(\tau_1, \dots, \tau_n)) + \sum_p \omega(\tau_1, \dots, [\tau, \tau_p], \dots) \\ &= -\tau(a) + \sum_p \omega(\tau_1, \dots, \Big[\sum_i a_i\tau_i, \tau_p\Big], \dots) \\ &= -\sum_i \Big(a_i\tau_i(a) + \tau(a_i)a\Big) \\ &= -\sum_i \tau_i(a_i a) \end{aligned}$$

L'action de T sur $\det(\Omega)$ est alors donné par :

$$(a\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n)(\sum_i a_i\tau_i) = -\Big(\sum_i \tau_i(a_i a)\Big)\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Le but est maintenant de généraliser cette formule au cas général ; pour cela, on applique la règle des signes :

Définition. *Soit $\{\tau_i\}_{i=1..n}$ une base de T et $\mathfrak{b} = \{\omega_i\}_{i=1..n}$ le base de Ω. On pose alors, pour $a \in A$:*

$$\Big(D(\mathfrak{b})a\Big)\Big(\sum_i a_i\tau_i\Big) := -\sum_i(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b})\tau_i(aa_i).$$

Pour que cette définition soit licite, il faut vérifier que cette opération ne dépende pas de la base choisie. On regardera ce point après la proposition suivante.

Proposition. *Cette opération vérifie les trois axiomes d'une structure de T-module à droite sur $Ber(\Omega)$.*

Démonstration du théorème. Le premier axiome est clairement vérifié. Regardons le second :

$$\begin{aligned}
\big(D(\mathfrak{b})a\tau\big)b &= -\sum_i(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b})\tau_i(aa_i)b \\
&= -\sum_i(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b})\Big(\tau_i(aa_ib) - (-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}aa_i\tau_i(b)\Big) \\
&= -\sum_i\Big((-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{b})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}\widetilde{b}}(-1)^{\widetilde{a_i}\widetilde{b}}D(\mathfrak{b})\tau_i(aba_i)\Big) \\
&\qquad\qquad +D(\mathfrak{b})a\tau(b) \\
&= (-1)^{\widetilde{b}(\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i})}D(\mathfrak{b})b\tau + D(\mathfrak{b})\tau(b).
\end{aligned}$$

Le second axiome est bien vérifié. On vérifie maintenant le dernier axiome :

$$\begin{aligned}
&\big((D(\mathfrak{b})a)\tau\big)\tau' - (-1)^{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau'}}\big((D(\mathfrak{b})a)\tau'\big)\tau = \\
&\quad = -\Big(\sum_i(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b})\tau_i(aa_i)\Big)\tau' \\
&\qquad + (-1)^{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau'}}\Big(\sum_j(-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j})}D(\mathfrak{b})\tau_j(aa'_j)\Big)\tau \\
&\quad = \sum_{i,j}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}(-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{\tau_i}+\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{a'_j})}D(\mathfrak{b})\tau_j\big(\tau_i(aa_i)a'_j\big) \\
&\qquad - \sum_{i,j}(-1)^{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau'}}(-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{\tau_j}+\widetilde{a}+\widetilde{a'_j}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b})\tau_i\big(\tau_j(aa'_j)a_i\big).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
\big(D(\mathfrak{b})a\big)[\tau,\tau'] =& \\
=&\big(D(\mathfrak{b})a\big)\Big(\sum_{i,j} a_i\tau_i(a'_j)\tau_j - (-1)^{(\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i})(\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j})}a'_j\tau_j(a_i)\tau_i\Big)\\
=&-\sum_{i,j} D(\mathfrak{b})\Big((-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i}+\widetilde{a'_j})}\tau_j\big(aa_i\tau_i(a'_j)\big)\\
&-(-1)^{(\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i})(\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j}+\widetilde{a_i})}\tau_i\big(aa'_j\tau_j(a_i)\big)\Big)\\
=&-\sum_{i,j} D(\mathfrak{b})\Bigg((-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i}+\widetilde{a'_j})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}\\
&\qquad\Big(\tau_j\tau_i(aa_ia'_j)-\tau_j\big(\tau_i(aa_i)a'_j\big)\Big)\\
&-(-1)^{(\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i})(\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j}+\widetilde{a_i})}(-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j})}\\
&\qquad\Big(\tau_i\tau_j(aa'_ja_i)-\tau_i\big(\tau_j(aa'_j)a_i\big)\Big)\Bigg)\\
=&\sum_{i,j} D(\mathfrak{b})\Bigg((-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{\tau_i}+\widetilde{a'_j})}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}\tau_j\big(\tau_i(aa_i)a'_j\big)\\
&-(-1)^{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau'}}(-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j}+\widetilde{\tau_j}+\widetilde{a_i})}(-1)^{\widetilde{\tau_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a'_j})}\tau_i\big(\tau_j(aa'_j)a_i\big)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Le troisième axiome d'une structure de T-module à droite est donc vérifié ; ce qui conclut la preuve. □

Il reste encore à vérifier que la définition de cette action est indépendante de la base choisie. Pour cela, on choisit une seconde base $\{\tau'_1,\dots,\tau'_n\}$ de T avec $\tau'_i=\sum_j B^{ij}\tau_j$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
\big(D(\mathfrak{b})a\big)\big(\sum_i a_i\tau_i\big) =& \\
=&\big(D(\mathfrak{b}')Ber(B)a\big)\Big(\sum_j\big(\sum_i a_iB^{-1ij}\big)\tau'_j\Big)\\
=&-\sum_j(-1)^{\widetilde{\tau'_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{B^{-1ij}})}D(\mathfrak{b}')\tau'_j\big(Ber(B)a\sum_i(a_iB^{-1ij})\big)\\
=&-\sum_{i,j}(-1)^{\widetilde{\tau'_j}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}+\widetilde{B^{-1ij}})}(-1)^{\widetilde{B^{-1ij}}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})}D(\mathfrak{b}')\\
&\Big(\tau'_j(Ber(B)B^{-1ij})aa_i+(-1)^{\widetilde{B^{-1ij}}\widetilde{\tau'_j}}Ber(B)B^{-1ij}\tau'_j(aa_i)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= - \sum_{i,j} \Bigg((-1)^{(\widetilde{B^{-1ij}} + \widetilde{\tau'_j})(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})} D(\mathfrak{b}') Ber(B) B^{-1ij} \tau'_j(aa_i) \\
&\qquad + (-1)^{(\widetilde{B^{-1ij}} + \widetilde{\tau'_j})(\widetilde{a}+\widetilde{a_i}) + \widetilde{B^{-1ij}}\widetilde{\tau'_j}} \tau'_j(Ber(B) B^{-1ij}) aa_i \Bigg) \\
&= - \sum_i (-1)^{\widetilde{\tau_i}(\widetilde{a}+\widetilde{a_i})} D(\mathfrak{b}) \tau_i(aa_i) \\
&\qquad - \sum_{i,j} (-1)^{\widetilde{B^{-1ij}}\widetilde{\tau'_j}} aa_i \tau'_j(Ber(B) B^{-1ij}).
\end{aligned}
$$

Montrer l'invarience de la définition par changement de base est donc équivalent à montrer que le second terme du membre de droite est nul, ceci pour tout a et tout a_i. donc l'invarience par changement de base est équivalent à :

$$\sum_j (-1)^{\widetilde{B^{-1ij}}\widetilde{\tau'_j}} \tau'_j(Ber(B) B^{-1ij}) = 0, \qquad \text{pour tout } i.$$

Pour essayer de comprendre d'où viennent ces égalités, on revient encore une fois au cas pair. Un calcul analogue au précédent nous donne cette condition :

$$\sum_j \tau'_j(B^{-1ij} \det(B)) = 0 \qquad \text{pour tout } i.$$

On peut réécrire ces équations sous la forme :

$$\sum_j \tau'_j(Com(B)_{ji}) = 0 \qquad \text{où } Com(B) \text{ désigne la comatrice de } B.$$

On commence par regarder le cas particulier $n = 3$ et $i = 1$ pour voir ce qui se passe :

$$
\begin{aligned}
&\tau'_1(Com(B)_{11}) + \tau'_2(Com(B)_{21}) + \tau'_1(Com(B)_{31}) = \\
&= \tau'_1(B^{22}B^{33} - B^{23}B^{32}) - \tau'_2(B^{12}B^{33} - B^{13}B^{32}) + \tau'_3(B^{12}B^{23} - B^{13}B^{22}) \\
&= \tau'_1(B^{22})B^{33} + B^{22}\tau'_1(B^{33}) - \tau'_1(B^{23})B^{32} - B^{23}\tau'_1(B^{32}) \\
&\quad - \tau'_2(B^{12})B^{33} - B^{12}\tau'_2(B^{33}) + \tau'_2(B^{13})B^{32} + B^{13}\tau'_2(B^{32}) \\
&\quad + \tau'_3(B^{12})B^{23} + B^{12}\tau'_3(B^{23}) - \tau'_3(B^{13})B^{22} - B^{13}\tau'_3(B^{22}) \\
&\qquad\qquad \text{or on sait que } \tau'_i(B^{jk}) = \tau'_j(B^{ik}) \\
&= \tau'_1(B^{22})B^{33} + B^{22}\tau'_1(B^{33}) - \tau'_1(B^{23})B^{32} - B^{23}\tau'_1(B^{32}) \\
&\quad - \tau'_1(B^{22})B^{33} - B^{12}\tau'_2(B^{33}) + \tau'_1(B^{23})B^{32} + B^{13}\tau'_2(B^{32}) \\
&\quad + \tau'_1(B^{32})B^{23} + B^{12}\tau'_2(B^{33}) - \tau'_1(B^{33})B^{22} - B^{13}\tau'_2(B^{32}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

On regarde maintenant le cas général :

$$\sum_j \tau'_j(Com(B)_{ji}) =$$

$$=\sum_j(-1)^{i+j}\tau'_j\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\epsilon(\sigma)\prod_{k\neq j}B^{k\sigma(k)}\Big)$$

où σ est considérée comme une application de $[1,n]\backslash j$ dans $[1,n]\backslash i$.

$$=\sum_j(-1)^{i+j}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\epsilon(\sigma)\sum_{k\neq j}B^{1\sigma(1)}\dots\tau'_j(B^{k\sigma(k)})\dots$$

$$=\sum_j\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}(-1)^{i+j}\epsilon(\sigma)\Big(\sum_{k<j}B^{1\sigma(1)}\dots\tau'_j(B^{k\sigma(k)})\dots B^{(j+1)\sigma(j+1)}\dots$$

$$+\sum_{k>j}B^{1\sigma(1)}\dots B^{(j-1)\sigma(j-1)}\dots\tau'_k(B^{j\sigma(k)})\dots\Big)$$

Maintenant, on voit facilement que le terme :

$$(-1)^{i+j}\epsilon(\sigma)B^{1\sigma(1)}\dots B^{(j-1)\sigma(j-1)}\dots\tau'_k(B^{j\sigma(k)})\dots$$

va s'annuler avec le terme :

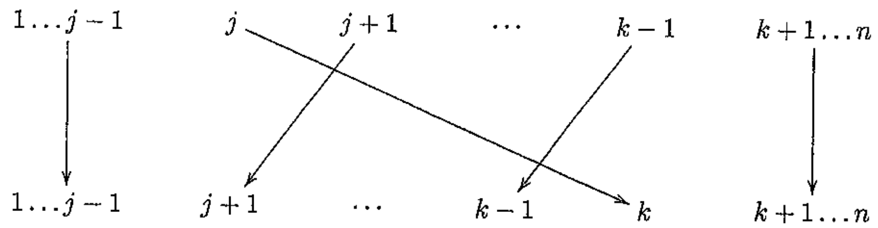
$$(-1)^{i+k}\epsilon(\bar\sigma)B^{1\bar\sigma(1)}\dots B^{(j-1)\bar\sigma(j-1)}\dots\tau'_k(B^{j\bar\sigma(k)})\dots$$

où $\bar\sigma : [1,n]\backslash k \to [1,n]\backslash i$ est défini par :

$$\bar\sigma(t)=\sigma(t)\qquad\text{pour } t\neq k,j;$$

$$\bar\sigma(j)=\sigma(k).$$

On remarque que la permutation $\bar\sigma$ est en fait la composition de la "permutation"



qui est de signature $(-1)^{k-j+1}$ avec σ. La signature de $\bar\sigma$ est donc $(-1)^{k-j+1}\epsilon(\sigma)$.

Ce calcul termine ainsi l'étude de l'invariance par changement de base pour le cas pair. Ce que l'on veut maintenant faire, c'est généraliser cette approche dans le cas général.

On va commencer par regarder le cas particulier où le module T est de rang $1|1$. On se donne donc deux bases $\{\tau_1,\tau_2\}$ et $\{\tau'_1,\tau'_2\}$ avec $\tau'_i = B^{i1}\tau_1 + B^{i2}\tau_2$. On sait que B^{11} et B^{22} sont des éléments inversibles de A_0 et que B^{12} et B^{21} sont impairs. L'inverse de la matrice $B=\left(\begin{smallmatrix}B^{11} & B^{12}\\ B^{21} & B^{22}\end{smallmatrix}\right)$ est alors

$$\begin{pmatrix}(B^{11})^{-1}+B^{12}B^{21}(B^{11})^{-2}(B^{22})^{-1} & -B^{12}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-1}\\ -B^{21}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-1} & (B^{22})^{-1}+B^{21}B^{12}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-2}\end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_j (-1)^{\widetilde{B^{-1\ 1j}}\widetilde{\tau'_j}}\tau'_j\big(Ber(B)B^{-1\ 1j}\big) = \tau'_1(Ber(B)B^{-1\ 11}) - \tau'_2(Ber(B)B^{-1\ 12})\\
=&\tau'_1\Big(\big(B^{11} - B^{12}(B^{22})^{-1}B^{21}\big)(B^{22})^{-1}\big((B^{11})^{-1} + B^{12}B^{21}(B^{11})^{-2}(B^{22})^{-1}\big)\Big)\\
&-\tau'_2\Big(\big(B^{11} - B^{12}(B^{22})^{-1}B^{21}\big)(B^{22})^{-1}\big(-B^{12}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-1}\big)\Big)\\
=&\tau'_1\Big((B^{22})^{-1} - B^{12}B^{21}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-2} + B^{12}B^{21}(B^{11})^{-1}(B^{22})^{-2} - 0\Big)\\
&-\tau'_2\Big(-B^{12}(B^{22})^{-2} - 0\Big)\\
=&\tau'_1((B^{22})^{-1}) + \tau'_2(B^{12}(B^{22})^{-2})\\
=&-(B^{22})^{-2}\tau'_1(B^{22}) + (B^{22})^{-2}\tau'_2(B^{12}) + \tau'_2((B^{22})^{-2})B^{12};
\end{aligned}$$

or on sait que $\tau'_i(B^{jk}) = (-1)^{\widetilde{\tau'_i}\widetilde{\tau'_j}}\tau'_j(B^{ik})$; la démonstration de cette équation est analogue à la démonstration de l'équation associée dans le cas pair (*cf.* 1.3). Donc

$$\sum_j (-1)^{\widetilde{B^{-1\ 1j}}\widetilde{\tau'_j}}\tau'_j\big(Ber(B)B^{-1\ 1j}\big) = \tau'_2((B^{22})^{-2})B^{12}.$$

On a donc un problème dès le cas particulier où le rang T vaut $1|1$ pour montrer l'invarience par changement de base. Ce problème remet en doute la validité de la définition de l'action de T sur $Ber(\Omega)$.

Bibliographie

[1] GORBOUNOV V., MALIKOV F., SCHECHTMAN V. : *Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids.* Inventiones mathematicae **155** (2004).

[2] GORBOUNOV V., MALIKOV F., SCHECHTMAN V. : *Gerbes of chiral differential operators. III.* math.AG/0005201.

[3] LEITES D.A. : *Introduction to the theory of supermanifolds.* Russian Math. Survey **35** (1980).

[4] MANIN Y. : *Gauge Field Theory and Complex Geometry.* Springer-Verlag (1988).

[5] PENKOV I.B. : *$\mathcal{D}$-modules on supermanifolds.* Inventiones mathematicae **71** (1983).