DUALITÉ DE LANGLANDS QUANTIQUE

Vadim Schechtman[1]

Resumé

Un survol des conjectures de Drinfeld, Beilinson, Gaitsgory et al. et de résultats de Gaitsgory sur la correspondance de Langlands quantique.

Abstract

A review of conjectures due to Drinfeld, Beilinson, Gaitsgory et al. and of results of Gaitsgory on the quantum Langlands correspondence.

Introduction

La correspondance de Langlands quantique est une théorie hypothétique qui généralise et simplifie conceptuellement la correspondance de Langlands géométrique de Drinfeld, Laumon, Lafforgue. Dans cet article on revue le progrès recent dans ce domaine, d'après Gaitsgory, [G1].

La correspondance de Langlands géométrique relie les objets de nature différente: formes (faisceaux) automorphes et représentations de Galois. Par contre, la correspondance quantique fait une "interpolation" entre ces deux côtés miroirs. En effet, on introduit un nouveau paramètre modulaire dans la théorie: le *niveau*, ou la *charge centrale*, et on cherche à trouver une bijection ("une transformation de Fourier") entre des objets de la même nature: des faisceaux automorphes des niveaux duaux. La correspondance classique peut être considérée comme le cas limite de la correspondance quantique.

Dans §§1 et 2 de cet article on revue brievement, suivant [St1] et [G1], les conjectures principales globales de cette théorie, dues à Drinfeld, Feigin, Frenkel et Stoyanovsky.

[1]Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse; schechtman.at.math.ups-tlse.fr

On remarque de suite que le cas "abélien" de cette théorie n'est pas hypothétique; il est équivalent à la transformation de Fourier - Mukai de Laumon, cf. [L]. Ce sujet, bien éclairci dans la litérature, ne va pas être touché dans cet article.

La partie importante (voire indispensable) locale de la correspondance de Langlands est la *correspondance de Satake*: un isomorphisme entre l'anneau de représentations de dimension finie d'un groupe réductif G et l'anneau de fonctions sphériques sur le groupe p-adique Langlands dual $G^\vee(K)$, K-étant un corps local. Une version plus fine géométrique de cette correspondance établit une équivalence des catégories tensorielles convénables, cf. §3. Dans §§4, 5 et §6 on décrit la correspondance de Satake quantique, d'après Gaitsgory, [G1].

Finalement, dans §7 on énonce les conjectures reliant les équivalences locales de Satake aux équivalences globales de §2, d'après [G1].

De le début, on avertit le lecteur que le but de cette revue n'est que donner les idées principales; les détails techniques seront omis. Par contre, j'ai essayé à donner quelques motivations qui viennent du domaine classique des fonctions sphériques. Pour les énoncés précises le lecteur doit consulter l'article original de Gaitsgory [G1], cf. aussi [St1], [St2], [AG]. Pour l'information de base sur les objets discutés dans cet article: les champs de G-torseurs, les opérateurs différentiels sur un champ, la grassmannienne affinne, etc., j'invite le lecteur à consulter l'ouvrage fondamental de Beilinson et Drinfeld [BD].

Ces sujets ont fait l'objet des exposés à Toulouse au printemps 2011. Je remercie chaleureusement le rapporteur pour les corrections et propositions nombreuses.

§1. Correspondance de Langlands géométrique

1.1. Correspondance de Langlands. Soit F un corps global, i.e. une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_q(t)$. La *correspondance de Langlands* (dans le cas non-ramifié) cherche à associer à une représentation

$$\rho : \ \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

irréductible non-ramifiée une forme automorphe parabolique ω sur $GL_n(\mathbb{A}_F)$, où $\mathbb{A}_F$ est l'anneau des adèles de F, vecteur propre des opérateurs de Hecke, de telle façon que la fonction L d'Artin de ρ soit égale à la fonction L "de Hecke" de ω. Ceci veut dire que les valeurs propres des opérateurs de Hecke doivent coïncider avec certains coefficients des polynômes caractéristiques des images par ρ des classes de Frobenius.

Plus généralement, si G est un groupe réductif sur F, Langlands introduit le groupe complexe "dual" ${}^LG$ dont la composante connexe $G^\vee$ est le groupe de points complexes d'un groupe réductif dont système de racines est dual à celui de G. On veut associer à une représentation galoisienne ρ à valeurs dans $G(\mathbb{C})$ une forme automorphe sur $G^\vee(\mathbb{A}_K)$ possédant les propriétés analogues.

Pour $G = \mathbb{G}_m$ c'est la théorie des corps des classes: la bijection entre les caractères de $G^{ab}(\bar{F}/F)$ et les caractères d'ordre fini du groupe des idèles $\mathbb{A}_F^\times$.

1.2. Version géométrique. Cf. [BD]. On va considérer dorénavant que le cas non-ramifié de correspondance de Langlands.

Soient G un groupe réductif sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On fixe un tore maximal et un sous-groupe de Borel $T \subset B \subset G$. Soient $\Lambda = Hom(T, \mathbb{G}_m)$ le réseau de poids, $\Lambda_+ \subset \Lambda$ le semi-groupe de poids dominants. Pour $\lambda \in \Lambda_+$ soit V_λ le G-module irréductible de plus haut poid λ.

La notation $(.)^\vee$ va signifier les objets liés au groupe dual $G^\vee$, par exemple $\Lambda^\vee = Hom(\mathbb{G}_m, T)$, etc.

Fixons une courbe X lisse, connexe et propre sur $\mathbb{C}$. Si P est un G-torseur au-dessus de X et V une représentation de G, on va noter V_P le fibré vectoriel sur X correspondant, $V \otimes \mathcal{O}_X$ tordu par P. En particulier on considère $\mathfrak{g}$ munie de l'action adjointe, d'où le fibré en algèbres de Lie $\mathfrak{g}_P$; c'est le faisceau des automorphismes infinitésimaux de P.

Désignons par Bun_G le champ de G-torseurs au-dessus de X. C'est un champ lisse algébrique de dimension

$$\dim Bun_G = (g-1)\dim G$$

Soit $\mathcal{L}_{Bun_G}$ est le fibré canonique; sa fibre en $P \in Bun_G$ est égale à

$$\mathcal{L}_{Bun_G,P} = \det R\Gamma(X, \mathfrak{g}_P)^*$$

Les $\mathcal{D}$-modules (holonômes, aux singularités régulières) sur Bun_G sont, par le language "faisceaux - fonctions" de Grothendieck, les analogues géométriques de fonctions automorphes; on va travailler dans la catégorie dérivée correspondante $D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G))$.

Soit $\mathcal{H}\mathrm{ecke}_G$ le champ suivant. Le groupoïde $\mathcal{H}\mathrm{ecke}_G(S)$ de S-points se compose de quadruples

$$(P_1, P_2, x, \alpha),$$

où P_i sont des $G^\vee$-torseurs sur $X \times S$, $x \in X(S)$,

$$\alpha:\ P_1|_{U_x} \xrightarrow{\sim} P_2|_{U_x},$$

$U_x = X \times S \setminus \Gamma_x$, Γ_x étant le graphe de x. On a des projections évidentes

$$Bun_G \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{H}\mathrm{ecke}_G \xrightarrow{\pi_2 \times \pi} Bun_G \times X,$$

Soit $\lambda \in \Lambda_+$. Un définit un sous-champ fermé

$$i_\lambda : \mathcal{H}\mathrm{ecke}_G^\lambda \hookrightarrow \mathcal{H}\mathrm{ecke}_G$$

par condition suivante:

$(P_1, P_2, x, \alpha) \in \mathcal{H}\mathrm{ecke}_G^\lambda(S)$ si pour tout $\mu \in \Lambda_+^\vee$ et pour tout $G^\vee$-module V ayant tous poids $\leq \mu$, on a

$$V_{P_1}(-\langle\lambda, \mu\rangle\Gamma_s) \subset V_{P_2}$$

On définit les *foncteurs de Hecke*

$$T_\lambda : D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G)) \longrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G \times X))$$

par

$$T_\lambda(M) = (\pi_2 \times \pi)_*(\pi_1^* M \otimes IC_{\mathcal{H}\mathrm{ecke}^\lambda})$$

Soit P un G-système local, i.e. un G-torseur muni d'une connexion, automatiquement intégrable, au-dessus de X. Le fibré $V_{\lambda,P}$ est muni d'une connexion intégrable, donc i.e. il est un objet de $D(\mathcal{D}\text{-mod}(X))$.

1.3. Conjecture A. *Si P est en plus irréductible, on peut associer à P un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}(P) \in D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G))$ qui est un $\mathcal{D}$-module propre de Hecke de valeur propre P, i.e. pour chaque $\lambda \in \Lambda_+$*

$$T_\lambda(\mathcal{M}(P)) \cong \mathcal{M}(P) \boxtimes V_{\lambda,P}.$$

Cela a été prouvé pour $G = GL_n$, cf. [Laf], [FGV2], [G3].

1.4. Espace $Locsys_{G^\vee}$. Soit P un $G^\vee$-torseur sur X. L'espace des connexions sur P est un espace affine dont l'espace linéaire sous-jacent soit

$$\Gamma(X, \mathfrak{g}_P \otimes \Omega^1_X) \cong T^*_P Bun_{G^\vee}$$

Il s'en suit que l'espace $Locsys_{G^\vee}$ des modules des $G^\vee$-systèmes locaux au-dessus de X est un $T^*Bun_{G^\vee}$-torseur $T^*_{\mathcal{L}} Bun_{G^\vee}$ sur $Bun_{G^\vee}$. La classe de cohomologie de ce torseur est égale à $d\log(cl(\mathcal{L}_{Bun_{G^\vee}}))$ où

$$d\log : H^1(Bun_{G^\vee}, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(Bun_{G^\vee}, \Omega^1)$$

Autrement dit, $Locsys_{G^\vee}$ est une forme tordue du fibré cotangent $T^*Bun_{G^\vee}$, cf. [BB], 2.1.8.

1.5. Conjecture B, version préliminaire. *Supposons que G soit semisimple. On a une équivalence des catégories dérivées*

$$\pi : \; D^{qcoh}(\mathcal{O}\text{-mod}(Locsys_{G^\vee})) \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G)) \qquad (1.5.1)$$

Si P est un système local, considéré comme un point fermé $i_P : \{*\} \hookrightarrow Locsys_{G^\vee}(X)$ et $\mathcal{F}_P = i_{P*}\mathbb{C}$ le faisceau gratte-ciel corréspondant, alors

$$\pi(\mathcal{F}_P) = \mathcal{M}(P)$$

de la Conjecture A.

Ici D^{cqoh} signifie la catégorie dérivée de complexes (bornés) à cohomologie quasi-cohérente.

Considérons le produit $Locsys_{G^\vee} \times Bun_G$ muni du faisceau d'anneaux

$$\mathcal{O}_{Locsys_{G^\vee}} \boxtimes \mathcal{D}_{Bun_G}$$

et de deux projections

$$Locsys_{G^\vee} \xleftarrow{\pi_1} Locsys_{G^\vee} \times Bun_G \xrightarrow{\pi_2} Bun_G$$

L'équivalence (1.5.1) doit être fournie par un noyau

$$\mathcal{N} \in D(\mathcal{O}_{Locsys_{G^\vee}} \boxtimes \mathcal{D}_{Bun_G}\text{-mod}),$$

c'est-à-dire,

$$\pi(A) = \pi_{2!}(\pi_1^*(A) \otimes \mathcal{N}).$$

La fibre de $\mathcal{N}$ en $P \in Locsys_{G^\vee}$ irréductible

$$\mathcal{N}_P = \mathcal{M}(P) \in D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G))$$

est le $\mathcal{D}$-module holonôme propre de Hecke ci-dessus.

1.6. Conjecture B, vers la version plus précise. L'énoncé "naive" 1.5 est fausse si G n'est pas semisimple; en effet, elle est fausse pour $G = \mathbb{G}_m$. C'est un signe que cette demande la précision; une telle précision est décrite dans l'article recent [AG].

Tous d'abord, dans la discussion 1.4 on n'a pas dit qu'est-ce que signifie le mot "espace $Locsys_{G^\vee}$". Plus precisément, il faut dire que $Z := Locsys_{G^\vee}$ est un "DG-champ".

Un autre problème est lié aux singularités de Z. Ce champ n'est pas lisse mais il n'est pas trop "mechant": il est "quasi-lisse", ce qui veut dire que la cohomologie du complexe cotangent T^*Z est concentrée en degrés $-1, 0, 1$; sa fibre en un point z correspondant au système local $\mathcal{L}$ et égal à la cohomologie de De Rham $R\Gamma_{DR}(X; \mathfrak{g}^\vee_{\mathcal{L}})$ à coefficients dans le fibré adjoint de $\mathcal{L}$ (au decalage près).

Ceci permet à définir le champ $\hat{Z}$ au-dessus de Z dont la fibre sur $z \in Z$ est $H^{-1}(T_z^*Z)$; donc $\hat{Z}$ est différent de Z qu'en points de non-lissité de Z. Ce champ classifie les couples (σ, A) où σ est un $G^\vee$-système local et A est une section horisontale du fibré associée $\mathfrak{g}^\vee_\sigma$ ("un paramètre d'Arthur"). On note ce champ par $\mathrm{Arth}_{G^\vee}$.

Soit

$$\mathrm{Nilp}_{glob} \subset \mathrm{Arth}_{G^\vee}$$

le sous-champ qui clasifie les couples (σ, A) avec A nilpotent. Gaitsgory a introduit anterieurement la notion d'un faisceau ind-cohérent sur un champ Z et les auteurs de [AG] définissent le *support singulier* d'un tel faisceau lorsque Z et quasi-lisse; c'est un sous-champ conique (i.e. $\mathbb{G}_m$-équivariant) de $\hat{Z}$. Ceci permet à introduire la (dg)-categorie

$$\mathrm{IndCoh}_{\mathrm{Nilp}_{glob}}(Locsys_{G^\vee})$$

de faisceaux ind-cohérents sur $Locsys_{G^\vee}$ ayant le support singulier contenu dans Nilp_{glob}.

Le version améliorée de la Conjecture B s'écrit:

1.7. Conjecture B, version améliorée, cf. [AG], Conj. 0.1.6. *Soit G un groupe réducif. On a une équivalence des dg-catégories*

$$\pi: \ \mathrm{IndCoh}_{\mathrm{Nilp}_{glob}}(Locsys_{G^\vee}) \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{D}\text{-mod}(Bun_G)).$$

§2. Une déformation

2.1. Opérateurs differentiels tordus. Voici trois exemples liés des familles d'algèbres.

(a) *Limite classique.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. Définissons une $\mathbb{C}[h]$-algèbre associative $U_h\mathfrak{g}$: elle est engendré par $x \in \mathfrak{g}$ modulo rélations

$$xy - yx = h[x, y]$$

Alors

$$U_h\mathfrak{g}/(h - c) \xrightarrow{\sim} U\mathfrak{g} \text{ si } c \neq 0, \ U_h\mathfrak{g}/(h) \xrightarrow{\sim} S^{\cdot}\mathfrak{g}$$

(b) Soit Y une variété lisse. Il existe un faisceau $\hat{\mathcal{D}}$ des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-algèbres quasi-cohérentes au-dessus de $Y \times \mathbb{P}^1$ tel que

$$\hat{\mathcal{D}}|_{Y\times\mathbb{A}^1} \cong \mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}, \ \hat{\mathcal{D}}|_{Y\times\{\infty\}} \cong \mathcal{O}_{T^*Y}$$

(c) Plus généralement, soit ξ un faisceau inversible sur Y. Alors pour tout $c \in \mathbb{C}$ un faisceau $\mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes c})$ d'algèbres des opérateurs différentiels tordus par $\xi^{\otimes c}$ est défini. Si $c \in \mathbb{Z}$ alors

$$\mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes c}) = Diff(\xi^{\otimes c}, \xi^{\otimes c})$$

On peut faire varier c. Soit t une coordonnée fixée sur $\mathbb{P}^1$. Il existe (cf. [BB], 2.1.11) un faisceau $\mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes t})$ ("des opèrateurs différentiels asymptotiques") des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-algèbres quasicohérentes au-dessus de $Y \times \mathbb{P}^1$ tel que

$$\mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes t})|_{Y\times\{c\}} \cong \mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes c}),\ c \neq \infty,$$
$$\mathcal{D}_Y(\xi^{\otimes t})|_{Y\times\{\infty\}} \cong \mathcal{O}_{T^*_\xi Y},$$

où $T^*_\xi Y$ est le fibré cotangent ξ-tordu défini dans [BB], 2.1.8.

2.2. Revenons au cadre de §1. Considérons des éléments

$$\xi = \mathcal{L}_G^{1/2h^\vee} \in \mathrm{Pic}(Bun_G)_{\mathbb{Q}},\ \xi^\vee = \mathcal{L}_{G^\vee}^{1/2h} \in \mathrm{Pic}(Bun_G)_{\mathbb{Q}}$$

Si G est simplément connexe, alors ξ est un générateur de $\mathrm{Pic}(Bun_G) \cong \mathbb{Z}$. Ici $h^\vee$ est le nombre de Coxeter dual de G.

On va utiliser la notation simplifiée $\mathcal{D}\text{-mod}^c(Bun_G)$ pour la catégorie de $\mathcal{D}_{Bun_G}(\xi^{\otimes c})$-modules.

Pour $c \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$c^\vee = \frac{1}{rc},$$

où $r = 1, 2, 3$, est la multiplicité maximale des fleches du graphe de Dynkine de G.

2.3. Conjecture C (version préliminaire). (a) *Pour tout $c \in \mathbb{C}^*$ on a une équivalence des catégories dérivées*

$$D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(Bun_G)) \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{D}\text{-mod}^{c^\vee}(Bun_G)) \qquad (2.3.1)$$

Cette équvalence doit être induite par un noyau

$$\mathcal{N}_c \in D(\mathcal{D}_{Bun_G}(\xi^{\otimes c}) \boxtimes \mathcal{D}_{Bun_G}(\xi^{\vee\otimes c^\vee})\text{-mod})$$

(b) *La correspondance* (2.3.1) *doit être induite par un noyau*

$$\mathcal{N}(t) \in D(\mathcal{D}_{Bun_G}(\xi^{\otimes t}) \boxtimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{D}_{Bun_G}(\xi^{\otimes t^\vee})\text{-mod}),$$

où $t^\vee = 1/rt$.

Pour $t = \infty$ (resp. $t = 0$) elle induit l'équivalence (1.5.1) *associée à G (resp. à $G^\vee$).*

§3. Correspondance de Satake

Cas réel (Berezin - Gelfand)

3.1. Fonctions sphériques. Soient G un groupe semi-simple deployé réel, $K \subset G$ un sous-groupe maximal compact. Soit $Hecke(G)$ l'algèbre de fonctions continues $f:\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ bi-K-invariantes à support compact, munie du produit de convolution. C'est une algèbre de Banach commutative normée (Gelfand).

Les *fonctions sphériques zonales* sont les fonctions C^∞ $\phi : X = G/K \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que

(i) $\phi(1) = 1$;

(ii) $\phi(ux) = \phi(x)$ pour tout $u \in K$;

(iii) $D\phi = \lambda(D)\phi$, $\lambda(D) \in \mathbb{C}$ pour tout $D \in \mathcal{D}_G(X)$.

Ici $\mathcal{D}_G(X)$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels G-invariants sur X.

3.1.1. Exemple. $G = SL_2(\mathbb{R}) \supset K = SO(2)$, $X = H = \{x + iy|\ y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. L'anneau $\mathcal{D}_G(X)$ est engendré par le Laplacien

$$\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

Les fonctions sphériques zonales sont de la forme $\phi_\lambda(x) = P_\lambda(\cosh d(i,x))$ où $d(i,x)$ est la distance entre x et i, $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$P_\lambda(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cosh r + \sinh r \cos u)^\lambda du$$

est la fonction de Legendre, cf. [H], Ch. IV, Prop. 2.9. $\square$

Soit $A(G)$ désigne l'ensemble des fonctions sphériques zonales. Chaque $\phi \in A(G)$ est une fonction propre de tous les opérateurs de Hecke: si $f \in Hecke(G)$,

$$f * \phi := \lambda_\phi(f)\phi,\ \lambda_\phi(f) \in \mathbb{C}$$

Ici $*$ désigne le produit de convolution de fonctions sur G.

L'association $f \mapsto \lambda_\phi(f)$ est un homomorphisme continu d'algèbres

$$\lambda_\phi :\ Hecke(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

De cette façon on obtient un isomorphisme

$$A(G) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathbb{C}-Alg.Cont.}(Hecke(G), \mathbb{C}),\ \phi \mapsto \lambda_\phi$$

(Gelfand).

Soit $\mathfrak{t} = Lie\ T$ où $T \subset G$ est un tore maximal. Alors

$$K\backslash G/K \cong \mathfrak{t}/W,$$

donc on peut regarder les éléments de $Hecke(G)$ comme des fonctions W-invariantes sur $\mathfrak{t}$.

On peut écrire la multiplication dans $Hecke(G)$ sous une forme

$$(f * g)(t) = \int_{\mathfrak{t}/W\times\mathfrak{t}/W} f(t_1)g(t_2)c(t_1,t_2,t)dt_1dt_2$$

(Gelfand). La fonction $c(t_1,t_2,t)$ est étudié par Berezin et Gelfand dans un grand papier [BG].

Ils montrent que cette fonction des arguments continus est un analogue continu de la fonction $\tilde{c}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda)$ des arguments discrets $\lambda \in \Lambda^\vee/W$ qui décrit la multiplication dans $K_0(Rep(G^\vee))$. (Ici $\Lambda^\vee$ est le réseau de copoids.)

3.2. Cas p-adique (Satake). Soit G un groupe réductif déployé sur un corps local K, $O \subset K$ l'anneau des entiers; $G(O)$ et un sous-groupe compact maximal de $G(K)$. Fixons la mesure de Haar μ sur $G(K)$ telle que $\mu(G(O)) = 1$.

Soit $C_c(G)$ l'espace de fonctions continues (i.e. localement constantes) $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact.

Algèbre de Hecke sphérique $Hecke(G)$ est définie comme l'espace de fonctions $f \in C_c(G)$ telles que

$$f(ugu') = f(g) \tag{3.2.1}$$

pour tous $g \in G(K),\ u,u' \in G(O)$. La multiplication est donnée par le produit de convolution. Elle est commutative (Gelfand).

Une fonction $\omega \in C_c(G)$ est dite *sphérique zonale* si

(i) $\omega(1) = 1$;

(ii) elle satisfait à (3.2.1);

(iii) pour tout $f \in Hecke(G)$,

$$f * \omega = \lambda_\omega(f)\omega,\ \ \lambda_\omega(f) \in \mathbb{C}.$$

De cette façon on obtient une application $\omega \mapsto \lambda_\omega$ de l'ensemble des fonctions sphériques zonales dans

$$A(G) := Hom_{\mathbb{C}-Alg}(Hecke(G),\mathbb{C})$$

qui est une bijection.

Soit $T \subset G$ un tore maximal;

$$\Lambda^\vee = T(K)/T(O) = Hom_{Gr.Alg.}(\mathbb{G}_m, T) \cong \mathbb{Z}^\nu$$

Si G est le groupe de Chevalley associé à un système de racines R, alors

$$\Lambda^\vee = Q(R) = P(R^\vee),$$

le réseau de copoids. Le groupe de Weyl W agit sur $\Lambda^\vee$ et

$$\Lambda^\vee/W \xrightarrow{\sim} \Lambda^\vee_+ \subset \Lambda^\vee,$$

le sous-ensemble de copoids dominants (bien défini dès qu'on a choisi un sous-groupe de Borel $B \supset T$).

Associons à chaque $\lambda^\vee : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$ la $G(O)$-orbite

$$O(\lambda) = G(O) \cdot \lambda(\pi) \subset G(K)/G(O),$$

où $\pi \in K^*$ est la uniformisante. De cette façon on obtient l'isomorphisme

$$\Lambda^\vee_+ = \Lambda^\vee/W \xrightarrow{\sim} G(O)\backslash G(K)/G(O)$$

Le théorème de Satake établit un isomorphisme d'algèbres

$$Hecke(G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\Lambda^\vee]^W \tag{3.2.2}$$

cf. [Sa], [M]. On remarque que

$$\mathbb{C}[\Lambda^\vee]^W \cong K_0(Rep(G^\vee))_{\mathbb{C}},$$

d'où

$$Hecke(G) \xrightarrow{\sim} K_0(Rep(G^\vee))_{\mathbb{C}} \tag{3.2.3}$$

Ici $G^\vee$ désigne le groupe de Chevalley associé au système de racines dual $R^\vee$ et $Rep(G^\vee)$ est la catégorie tensorielle de ses representations de dimension finie. C'est une catégorie semisimple dont les objets simples sont les représentations irréductibles V_λ, $\lambda \in \Lambda^\vee_+$.

Correspondance de Satake géométrique (Drinfeld, Ginzburg, Mirkovic - Vilonen)

Sous la correspondance "faisceaux - fonctions" de Grothendieck les éléments de $Hecke(G)$, i.e. des fonctions bi-$G(O)$-invariants $f : G(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ correpondent aux (complexes de) faisceaux constructibles sur $G(K)$ bi-$G(O)$-invariants. Ceci est le point de départ des considérations ci-dessous.

3.3. Grassmanienne affine. Soit G un groupe connexe réductif sur $\mathbb{C}$. Fixons une courbe lisse X et $x \in X$; soit $X' = X \setminus \{x\}$. Par définition, Gr_G est l'espace de modules des paires

$$(F, \phi),\ F \in Bun_G(X),\ \phi \text{ une trivialisation de } F|_{X'} \tag{3.3.1}$$

C'est un ind-schéma qui ne depend que du voisinage formel de x.

Soit $K = \mathbb{C}((t)) \supset O = \mathbb{C}[[t]]$. On considère $G(O)$ (resp. $G(K)$) comme un schèma (resp. ind-schèma) sur $\mathbb{C}$. Alors

$$Gr_G \cong G(K)/G(O).$$

Suivant Lusztig et Drinfeld, on définit la catégorie

$$\mathcal{H}ecke(G) = \mathcal{D}\text{-mod}(Gr_G)^{G(O)}$$

de $\mathcal{D}$-modules holonômes aux singularités régulières $G(O)$-équivariants au-dessus de Gr_G.

On munit $\mathcal{H}ecke(G)$ d'une stucture tensorielle commutative donnée par convolution, cf. [Gi], [MV].

3.4. Théorème. *Il existe une équivalence de catégories tensorielles*

$$Sat:\ \mathcal{H}ecke(G) \overset{\sim}{\longrightarrow} Rep(G^\vee) \tag{3.4.1}$$

Ici $Rep(G^\vee)$ est la catégorie tensorielle de representations de dimension finie de $G^\vee$. Le foncteur fibre

$$\mathcal{H}ecke(G) \longrightarrow Vect_{\mathbb{C}}$$

est donnée par la cohomologie globale. En particulier $\mathcal{H}ecke(G)$ est semismple; ses objets simples sont les faisceaux d'intersection des orbites $O(\lambda) \subset G(K)/G(O)$; on les note $\mathcal{A}(\lambda)$; on a $Sat(\mathcal{A}(\lambda)) = L(\lambda)$.

L'équivalence (3.4.1) a été conjecturée par Drinfeld, et établie par Ginsburg [Gi] et Mirković - Vilonen, [MV].

§4. Correspondance de Satake quantique

4.1. Une q-déformation de la catégorie $Rep(G^\vee)$ est la catégorie tensorielle des représentations de dimension finie du groupe quantique, $Rep(U_qG^\vee)$. On souligne que si q n'est pas une racine de l'unité (le seul cas qui nous intéresse), la catégorie ne se deforme pas: $Rep(U_qG^\vee)$ est une catégorie semi-simple dont les irréductibles sont indexées par les copoids dominants $\lambda^\vee \in \Lambda^\vee$. C'est seulement la structure tensorelle qui se deforme.

Essayons à définir une q-déformation correspondante de $\mathcal{H}ecke(G)$, en appliquant le yoga de §2:

(Yoga) *Déformation = passage aux $\mathcal{D}$-modules tordus*

Un candidat naturel pour une q-déformation correspondante de $\mathcal{H}ecke(G)$ pourrait être la catégorie de $\mathcal{D}$-modules $G(O)$-équivariants tordus $\mathcal{D}\text{-mod}^c(Gr_G)^{G(O)}$, où $q = e^{2\pi ic}$. Ici $\mathcal{D}$-mod^c veut dire les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{L}^{\otimes c}$-tordus où $\mathcal{L}$ est le fibré determinant canonique sur Gr_G.

Par contre, cette catégorie ne marche pas, par des raisons techniques. Par exemple, pour c irrationel elle ne contient qu'un seul objet irréductible.

Pour définir une déformation correcte, Gaitsgory passe de la catégorie "sphérique" $\mathcal{H}ecke(G)$ à une catégorie équivalente "horisphérique" de *faisceaux de Whittaker*.

4.2. Fonctions sphériques et fonctions de Whittaker. Pour motiver la construction géométrique, revenons au cadre classique, et rappelons le rapport entre les fonctions sphériques et fonctions de Whittaker.

Soit $N \subset G$ un sous-groupe unipotent maximal. Rappelons que dans le cas réel on a la décomposition de Cartan $G = KAK$ qui controle les fonctions sphériques, et la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ qui controle les fonctions de Whittaker. Ici $K \subset G$ est un maximal compact, A la composante connexe de l'identité de T.

Au cas t-adique, $K = F((t))$, F un corps, on a une bijection

$$\Lambda^\vee \xrightarrow{\sim} N(K)\backslash G(K)/G(O)$$

qui fait correspondre à un copoid $\lambda \in \Lambda^\vee = Hom(\mathbb{G}_m, T)$ l'orbite de $\lambda(t) \in T(K) \subset G(K)$.

Fixons le caractère $\chi :\ N \longrightarrow \mathbb{C}^*$,

$$\chi(u) = \psi(\sum_{i=1}^{\nu} \operatorname{Res}(u_i))$$

Ici $\operatorname{Res} :\ K \longrightarrow F$, $\operatorname{Res}(\sum a_j t^j) = a_{-1}$, u_i est l'image de u par la composée

$$N \longrightarrow N/[N,N] \cong K^\nu \xrightarrow{pr_i} K,$$

et $\psi :\ F \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un caractère non-trivial fixé.

Soit $Wh(G)$ l'espace de fonctions $f :\ G(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(ngx) = \chi(n)f(g),\ n \in N(K), g \in G(K), x \in G(O)$, et f et à support compact modulo $N(K)$.

Si $f \in Wh(G)$ alors $f(\lambda(t)) = 0$ si $\lambda \in \Lambda^\vee \setminus \Lambda^\vee_+$.

$Wh(G)$ est un $Hecke(G)$-module à droite par rapport à la convolution

$$f * h(g) = \int_{G(K)} f(gx^{-1})h(x)dx$$

Soit $f_0 \in Wh(G)$ la fonction telle que $f(1) = 1$ et $f = 0$ sur toutes orbites de $\lambda(t)$, $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \Lambda^\vee_+$. Alors $h \mapsto f_0 * h$ est un isomorphisme

$$F :\ Hecke(G) \xrightarrow{\sim} Wh(G) \tag{4.2.1a}$$

Explicitement,

$$F(g) := f_0 * h(g) = \int_{N(K)} \chi(n)h(n^{-1}g)dn, \qquad (4.2.1b)$$

cd. [FGV1], 1.1.5.

L'objet géométrique qui controle les fonctions de Whittaker a été introduit dans [FGV1]. On va le décrire après quelques préliminaires.

4.3. Compactification de Drinfeld. On fixe une courbe X connexe lisse et complète sur $\mathbb{C}$. On désigne par ω le fibré canonique sur X; on fixe une racine carré $\omega^{1/2}$.

Pour un groupe algebrique H, Bun_H va désigner le champs de H-torseurs au-dessus de X.

Soient G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$ tel que le groupe semi-simple $[G,G]$ est simplément connexe de rang r. On fixe un sous-groupe de Borel $B \subset G$; soit $N \subset B$ son radical unipotent, $T = B/N$. On fixe un sous-groupe de Borel opposé $B_- \subset G$ et on identifie T avec $B \cap B_-$.

On pose $\mathfrak{g} = Lie\ G$.

Soient $\Lambda = Hom_{Gr.alg.}(T, \mathbb{G}_m)$ le réseau de poids, $R \subset \Lambda$ l'ensemble de racines, $\Lambda^\vee = Hom_{Gr.alg.}(\mathbb{G}_m, T)$ le réseau de copoids; $\langle,\rangle : \Lambda \times \Lambda^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}$ sera l'accouplement canonique.

Le choix de B définit le sous-ensemble $R_+ \subset R$ de racines positives. Soit

$$2\rho^\vee = \sum_{\alpha \in R_+} \alpha^\vee \in \Lambda^\vee$$

On désigne par $\omega^{\rho^\vee}$ le T-torseur induit de $\omega^{1/2}$ par $2\rho^\vee : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$.

Soit

$$\Lambda_+ \subset \Lambda$$

le semi-groupe de poids dominants.

Pour $\lambda \in \Lambda_+$, soit V_λ le G-module simple de plus haut poid λ. Si $\mathcal{F}_G$ est un G-torseur au-dessus de X, soit $\mathcal{V}_{\lambda,\mathcal{F}_G}$ le fibré vectoriel corréspondant.

Le diagramme

$$T \twoheadleftarrow B \hookrightarrow G$$

induit le diagramme fondamental des champs

$$Bun_T \xleftarrow{q} Bun_B \xrightarrow{p} Bun_G \qquad (4.3.1)$$

Soit $\mathcal{F}_T^0$ le T-torseur trivial sur X. Alors l'image inverse

$$q^{-1}(\mathcal{F}_T^0) = Bun_N \subset Bun_G$$

Plus généralement, pour un T-torseur $\mathcal{F}_T$ quelconque, on va désigner

$$Bun_N^{\mathcal{F}_T} := q^{-1}(\mathcal{F}_T) \subset Bun_G$$

Ce champ admèt une description "plückérienne" suivante.

Disons qu'une inclusion

$$i:\ \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$$

des faisceaux localement libres sur X soit *maximal*, ou un morphisme de fibrés vectoriels, si $\operatorname{Coker} i$ est localement libre.

Le champ $Bun_N^{\mathcal{F}_T}$ classifie des données suivants:

(a) un G-torseur $\mathcal{F}_G$;

(b) pour tout $\lambda \in \Lambda^{++}$ une inclusion

$$\kappa_\lambda:\ \mathcal{L}^\lambda_{\mathcal{F}_T} \hookrightarrow \mathcal{V}_{\lambda,\mathcal{F}_G}$$

qui est maximal.

Ici $\mathcal{L}^\lambda_{\mathcal{F}_T}$ est le fibré linéaire = $\mathbb{G}_m$-torseur image directe de $\mathcal{F}_T$ par $\lambda:\ T \longrightarrow \mathbb{G}_m$.

Les κ_λ doivent satisfaire les **rélations de Plücker**:

pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda^{++}$ *le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\lambda_{\mathcal{F}_T} \otimes \mathcal{L}^\mu_{\mathcal{F}_T} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{L}^{\lambda+\mu}_{\mathcal{F}_T} \\ \kappa_\lambda \otimes \kappa_\mu \downarrow & & \downarrow \kappa_{\lambda+\mu} \\ \mathcal{V}_{\lambda,P} \otimes \mathcal{V}_{\mu,P} & \longrightarrow & \mathcal{V}_{\lambda+\mu,P} \end{array} \tag{Pl}$$

est commutatif.

Cette description est équivalente au plongement de Plücker

$$G/B \hookrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda^{++}} \mathbb{P}V_\lambda$$

La *compactification de Drinfeld* de $Bun_N^{\mathcal{F}_T}$ est le champ $\overline{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ qui classifie le données (a) et (b) comme ci-dessus, mais on ne demande plus que κ_λ soient maximales.

Quand on fait varier le T-torseur $\mathcal{F}_T$ on obtient le champ $\overline{Bun}_B$, une compactification relative du morphisme p.

4.4. Faisceaux de Whittaker. Voici une élaboration de la construction précedente. Soient $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ des points, pas forcement distincts.

(a) Par définition, le champ algébrique $\mathfrak{M}_{\bar{x}}$ classifie les données suivants:

— un G-torseur P;

— pour tout $\lambda \in \Lambda^+$ un morphisme

$$\kappa_\lambda : \ \omega^{\langle \lambda, \rho^\vee \rangle} \longrightarrow \mathcal{V}_{\lambda, P} \tag{4.4.1}$$

différent de 0, avec des pôles possibles en $x_1, \ldots, x_n$.

Les κ_λ doivent satisfaire aux rélations de Plücker (Pl) ci-dessus.

Donc, grosso modo, le champ $\mathfrak{M}_{\bar{x}}$ classifie les G-torseurs munis d'une réduction à B déhors $\bar{x}$.

Si on fait varier les points $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on obtient le champ $\mathfrak{M}_n$ au-dessus de $X^n \setminus \cup$(diagonales).

(b) *Caractère ψ.* Soit $y \in X$ un point; soient $D_y = \mathrm{Spec}\ O_y$ le disque formel autour de y, $D_y^\times = D_y \setminus \{y\} = \mathrm{Spec}\ K_y$ le disque ponctué.

Soient $\omega_B^{\rho^\vee \times}$ (resp. $\omega_B^{\rho^\vee}$) le B-torseur sur $D_y^\times$ (resp. sur D_y) induit de $\omega^{\rho^\vee}$ par $T \hookrightarrow B$.

Soient $\mathcal{B}_y^\times$ (resp. $\mathcal{B}_y$) le groupe d'automorphismes de $\omega_B^{\rho^\vee \times}$ (resp. de $\omega_B^{\rho^\vee}$). Le premier groupe est un ind-schéma en groupes et le seconde est un schéma en groupes. Soient

$$\mathcal{N}_y^\times = \mathrm{Ker}(\mathcal{B}_y^\times \longrightarrow T(K_y)),\ \mathcal{N}_y = \mathrm{Ker}(\mathcal{B}_y \longrightarrow T(O_y)).$$

On a un morphisme

$$\psi_y : \ \mathcal{N}_y^\times / [\mathcal{N}_y^\times, \mathcal{N}_y^\times] \xrightarrow{\sim} (\omega_{D_y^\times})^r \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{G}_a$$

où Res et la somme des résidus.

(c) Supposons que $y \notin \bar{x}$. Soit

$$U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}}) \subset \mathfrak{M}_{\bar{x}}$$

un sous-champ ouvert qui classifie les donnés comme dans (a), tels que les morphismes κ_λ soient maximaux à un voisinage de y.

Par définition un point

$$\alpha = (\mathcal{F}_G, \phi) \in U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$$

restreint à D_y

$$\alpha_{D_y} = (\mathcal{F}_G|_{D_y}, \phi|_{D_y}) \in Bun_{B, D_y} \subset \overline{Bun}_{B, D_y}$$

donc définit un B-torseur $\mathcal{F}_{B, D_y}$ au-dessus de D_y avec une immersion de T-torseurs

$$\omega_{D_y}^{\rho^\vee} \hookrightarrow i^* \mathcal{F}_{B, D_y}$$

où $i : \ T \hookrightarrow B$.

Soit $\tilde{U}_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$ le champ qui classifie les même données comme $U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$, avec un choix complémentaire d'un isomorphisme de B-torseurs

$$\beta_y:\ \mathcal{F}_{B,D_y} \xrightarrow{\sim} i_*\omega_{D_y}^{\rho^\vee}$$

sur D_y.

Ce champ est un $\mathcal{N}_y$-torseur sur $U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$, et le groupe "méromorphe" $\mathcal{N}_y^\times$ agit sur $\tilde{U}_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$.

(Cette action est analogue à l'action de l'algèbre de Virasoro sur l'espace de modules des couples (C,β_c) où C est une courbe lisse, $c\in C$, et $\beta_c:\ O_c \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}((t))$ est une coordonnée en c, cf. [BS].)

(d) *Catégorie* $Whit_{\bar{x}}$. Soit $Whit_{\bar{x};y}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$-mod$(\tilde{U}_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}}))$ des D-modules $(\mathcal{N}_y^\times,\psi_y)$-équivariants. Puisque ψ_y est trivial sur $\mathcal{N}_y\subset\mathcal{N}_y^\times$, on peut l'identifier avec une sous-categorie pleine de $\mathcal{D}$-mod$(U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}}))$.

Le champ $\mathfrak{M}_x$ est la réunion des $U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$. Plus généralement, pour tout $y_1\neq y_2$ on pose

$$U_{y_1,y_2}(\mathfrak{M}_{\bar{x}}) = U_{y_1}(\mathfrak{M}_{\bar{x}})\cap U_{y_2}(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$$

et on introduit de la même façon la sous-catégorie pleine

$$Whit_{\bar{x};y_1,y_2}(G)\subset \mathcal{D}\text{-mod}(U_{y_1,y_2}(\mathfrak{M}_{\bar{x}}))$$

en utilisant $\mathcal{N}_{y_1,y_2}$-équivariance, où $\mathcal{N}_{y_1,y_2}:=\mathcal{N}_{y_1}\times\mathcal{N}_{y_2}$.

On vérifie que, étant donné un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}\in\mathcal{D}$-mod$(U_{y_1}(\mathfrak{M}_{\bar{x}}))$, sa restriction

$$\mathcal{M}_{U_{y_1,y_2}(\mathfrak{M}_{\bar{x}})}\in Whit_{\bar{x};y_1,y_2}(G)$$

si et seulement si $\mathcal{M}\in Whit_{\bar{x};y_1}(G)$.

Ceci permet à définir $Whit_{\bar{x}}(G)$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$-mod$(\mathfrak{M}_{\bar{x}})$ dont les objets sont des $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{M}$ tels que pour tout $y\in X\setminus\bar{x}$, $\mathcal{M}|_{U_y(\mathfrak{M}_{\bar{x}})}\in Whit_{\bar{x};y}(G)$.

On démontre dans [FGV1] que ce soit une catégorie semisimple dont les objets simples $\mathcal{F}(\bar{\lambda})$ sont numérotés par n-uples $\bar{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de poids dominants.

Supposons que $n=1$. Dans [FGV1] on définit l'action par convolution

$$\bigstar : \mathcal{H}ecke(G)\times Whit_x(G)\longrightarrow Whit_x(G)$$

(cf. *op. cit.* 5.3). et démontre que l'association

$$S\mapsto S\bigstar\mathcal{F}(0)$$

définit une équivalence de catégories

$$\mathcal{H}ecke(G)\xrightarrow{\sim} Whit_x(G) \tag{4.4.2}$$

Cette équivalence est une version géométrique de l'isomorphisme (4.2.1).

On peut faire varier les points x_i; de telle façon on obtient la catégorie

$$Whit_n(G) \subset \mathcal{D}\text{-mod}(\mathfrak{M}_n)$$

4.5. Faisceaux de Whittaker tordus. On introduit une version déformée de la catégorie précedente en passant aux D-modules tordus.

Rappelons le fibré linéaire canonique $\mathcal{L}_{Bun_G}$ au-dessus de Bun_G cf. 1.3. Les champs $Ch = U_y(\mathfrak{M}_n)$, $\tilde{U}_y(\mathfrak{M}_n)$, etc. sont munis de morphismes canoniques d'oublie vers Bun_G; on va noter $\mathcal{L}_{Ch}$ l'image inverse de $\mathcal{L}_{Bun_G}$ sur Ch. Étant donné $c \in \mathbb{C}$, on désigne par $\mathcal{D}\text{-mod}^c(Ch)$ la catégorie de D-modules sur $\mathcal{L}_{Ch}^{\otimes c}$-tordus.

On démontre que l'action de $\mathcal{N}_y^{\times}$ sur $U_y(\mathfrak{M}_n)$ se relève à $\mathcal{L}_{U_y(\mathfrak{M}_n)}$.

En procédant comme dans 4.3, on obtient les catégories de Whittaker tordus

$$Whit^c_{\bar{x}}(G) \subset \mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathfrak{M}_{\bar{x}}),\ Whit^c_n(G) \subset \mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathfrak{M}_n)$$

On va désigner

$$Whit^c(G) := Whit^c_x(G)$$

pour un point $x \in X$. En utilisant $Whit^c_2(G)$, on peut introduire sur $Whit^c(G)$ une structure d'une catégorie monoidale tressée.

4.6. Le résultat principal de Gaitsgory est la construction géométrique d'une équivalence des catégories tensorielles

$$g' :\ \mathcal{W}hit^c(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ep(U_qG^{\vee}),$$

où $q = e^{\pi ic}$ n'est pas une racine de l'unité.

Cette équivalence vient par l'intermédiaire d'une équivalence

$$f :\ \mathcal{FS}^c(G^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ep(U_qG^{\vee})$$

établie dans [BFS]. Ici $\mathcal{FS}^c(G^{\vee})$ est la catégorie des *faisceaux factorisables* ("factorizable sheaves"); ces objets sont certains systèmes compatibles de $\mathcal{D}$-modules (tordus) sur les espaces de configurations $X^{\lambda^{\vee}}$ indexés par les copoids $\lambda^{\vee} \in \Lambda^{\vee}_{+}$.

Pour tout $\lambda^{\vee}$ Finkelberg et Mirkovic ont défini les espaces $\mathcal{Z}^{\lambda^{\vee}}_x$ de *zastavas* munis de deux morphismes

$$\mathfrak{M}_x \xleftarrow{a_{\lambda^{\vee}}} \mathcal{Z}^{\lambda^{\vee}}_x \xrightarrow{b_{\lambda^{\vee}}} X^{\lambda^{\vee}},$$

cf. [FFKM]. Les fibres de $b_{\lambda^{\vee}}$ sont des sous-schémas de produits des Grassmaniens Gr_G.

Étant donné un faisceau de Whittaker $\mathcal{F} \in \mathcal{W}hit^c(G)$, Gaitsgory pose

$$g(\mathcal{F})_{\lambda^{\vee}} = b_{\lambda^{\vee}*}a^{\vee!}_{\lambda}(\mathcal{F})$$

et démontre que $g(\mathcal{F}) = \{g(\mathcal{F})_{\lambda^\vee}\} \in \mathcal{FS}^c_x(G^\vee)$. De telle façon il obtient une équivalence des catégories

$$g: \ \mathcal{W}hit^c(G) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{FS}^c(G^\vee),$$

d'où $g' = f \circ g$, pour $c \notin \mathbb{Q}$.

Cela sera expliqué en plus de details dans §§5, 6 suivants.

§5. Faisceaux factorisables

5.1. Espaces de configurations. Soit X une courbe lisse sur $\mathbb{C}$ comme ci-dessus. Considérons le groupe

$$\mathrm{Div}(X) = \{\sum n_j z_j | \ n_j \in \mathbb{Z}, \ z_j \in X\}$$

de diviseurs de X. Pour tout $n \geq 0$ soit

$$\mathrm{Div}^n_+(X) = \{\sum n_j z_j | \ \sum n_j = n, \ \forall j \ n_j \geq 0\} \subset \mathrm{Div}(X)$$

le sous-ensemble de diviseurs effectifs de degré n; c'est l'ensemble de $\mathbb{C}$-points de n-ème puissance symétrique $X^{(n)}$.

Plus généralement, soit $M = \mathbb{Z}^r$ avec la base canonique $e_1, \ldots, e_r$. Pour $\mu = \sum m_i e_i \in M$ écrivons $\mu \geq 0$ si tout $m_i \geq 0$; on note $M_+ = \{\mu \in M | \ \mu \geq 0\}$.

Appelons un M-*diviseur* une somme formelle $\sum \mu_j z_j, \ \mu_j \in M, \ z_j \in X$; ces diviseurs forment le groupe abélien

$$\mathrm{Div}(X; M) = \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

Soit $\mu = m_i e_i \in M, \ \mu \geq 0$. On désigne par X^μ le schéma classifiant des M-diviseurs effectifs sur X de degré μ:

$$\mathrm{Div}(X; M)^\mu_+ := \{\sum \mu_j z_j | \ \sum \mu_j = \mu, \text{ tous } \mu_j \geq 0\}$$

On a

$$X^\mu \cong \prod_{i=1}^r X^{(m_i)}$$

5.2. Faisceaux standards et factorisation. Dans 5.2 - 5.4 on supposera que $X = \mathbb{A}^1$. Supposons que M est muni d'une forme bilinéaire symétrique

$$(,): \ M \times M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et fixons un nombre $\kappa \in \mathbb{C}^*$.

Munissons tout X^μ de la stratification diagonale S^μ et désignons par $\mathcal{M}_{S^\mu}(X^\mu)$ la catégorie abélienne de faisceaux pervers sur X^μ lisses le long de S^μ.

Soit

$$\mu = \sum m_i e_i \in M_+,\ m = |\mu| := \sum m_i$$

On désigne $[m] := \{1, \ldots, m\}$.

Fixons une application $\phi :\ [m] \longrightarrow [r]$ avec $\operatorname{Card} \phi^{-1}(i) = m_i$ pour tout i.

On peut imaginer les points de X^μ comme des collections $(z_1, \ldots, z_m)$ des points de X, avec chaque z_p étant marqué par le vecteur $e_{\phi(p)}$, où les points marqué par le même vecteur sont identifiés.

Soit

$$j^\mu :\ X_0^\mu = \{(z_p) | z_r \neq\ z_s \forall\ r \neq s\} \hookrightarrow X^\mu$$

le stratum ouverte. On définit le système local $\mathcal{L}^{\mu\prime}$ de rang 1 sur X_0^μ ayant la monodromie

$$e^{2\pi i (e_{\phi(r)}, e_{\phi(s)})/\kappa}$$

quand z_r passe autour z_s.

Soit en plus $Sign^\mu$ le système local de rang 1 sur X_0^μ correspondant à la représentation signe du sous-groupe symétrique "de Levi"

$$sign_\mu :\ \Sigma_\mu \longrightarrow \{\pm 1\},\ \Sigma_\mu := \prod_i \Sigma_{m_i} \subset \Sigma_{|\mu|}$$

On définit

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^{\mu\prime} \otimes Sign^\mu,$$

d'où le faisceau

$$\mathcal{L}_{!*}^\mu = j_{!*}^\mu \mathcal{L}^\mu \in \mathcal{M}_{S^\mu}(X^\mu)$$

Ces faisceaux possèdent la propriété de *factorisation* fondamentale suivante.

Soit $U, V \subset X$ deux ouverts disjoints et $\mu, \nu \in M_+$. Alors

$$U^\mu \times V^\nu \subset X^{\mu+\nu}$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\psi_{\mu,\nu}^{U,V} :\ \mathcal{L}_{!*}^{\mu+\nu}|_{U^\mu \times V^\nu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{U!*}^\mu \boxtimes \mathcal{L}_{V!*}^\nu \tag{5.2.1}$$

qui satisfont à la propriťé d'associativité évidente qui correspond aux 3 disjoints U, V, W et 3 éléments $\mu, \nu, \lambda \in M_+$ (cf. (5.3.2) ci-dessous).

5.3. Fixons un point $x \in X$ et considérons la stratification S_x^μ de X^μ dont les strata sont des intersections des hypersurfaces $\{z_p = z_q\}$ et $\{z_p = x\}$.

Un faisceau factorisable est une collection $\mathcal{F} = \{(\mathcal{F}_\mu, \phi_{\mu\nu})_{\mu,\nu \in M_+}\}$ où $\mathcal{F}_\mu \in \mathcal{M}_{S_x^\mu}(X^\mu)$ et $\phi_{\mu\nu}$ est une collection des isomorphismes

$$\phi_{\mu,\nu}^{U,V} :\ \mathcal{F}^{\mu+\nu}|_{U^\mu \times V^\nu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_U^\mu \boxtimes \mathcal{L}_{V!*}^\nu \tag{5.3.1}$$

donnés pour tous ouverts disjoints $U, V \subset X$ avec $x \in U$ tels que pour tout triple d'ouverts disjoints U, V, W, $x \in U$, et $\mu, \nu, \lambda \in M_+$ le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{\mu+\nu+\lambda}|_{U^\mu \times V^\nu \times W^\lambda} & \stackrel{\phi_{\mu+\nu,\lambda}}{\longrightarrow} & \mathcal{F}^{\mu+\nu}|_{U^\mu \times V^\nu} \boxtimes \mathcal{L}^\lambda_{W!*} \\ \phi_{\mu,\nu+\lambda} \downarrow & & \downarrow \phi_{\mu,\nu} \\ \mathcal{F}^\mu_U \boxtimes \mathcal{L}^{\nu+\lambda}_{!*}|_{V^\nu \times W^\lambda} & \stackrel{\psi_{\nu,\lambda}}{\longrightarrow} & \mathcal{F}^\mu_U \boxtimes \mathcal{L}^\nu_{V!*} \boxtimes \mathcal{L}^\lambda_{W!*} \end{array} \tag{5.3.2}$$

est commutatif.

En utilisant des foncteurs de cycles évanescents à x, on associe à $\mathcal{F}$ un $\mathbb{C}$-espace M-gradué

$$\Phi_x(\mathcal{F}) = (\Phi_x(\mathcal{F}_\mu))$$

On dit que $\mathcal{F}$ est *fini* si les espaces $\Phi_x(\mathcal{F}_\mu)$ sont nuls sauf un nombre fini d'eux.

Avec des morphismes définis convénablement, on obtient la catégorie des faisceaux factorisables (*"factorizable sheaves"*) finis $\mathcal{FS}^\kappa_x(M) = \mathcal{FS}^\kappa_x(\mathbb{A}^1; M)$.

De la même façon on introduit les catégories $\mathcal{FS}^\kappa_{\bar{x}}(X; M)$ pour un n-uple $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de points de X, $n \geq 1$ arbitraire. En faisant varier les points x_i, on obtient les catégories $\mathcal{FS}^\kappa_n(X; M)$

En particulier, en utilisant les catégories $\mathcal{FS}^\kappa_{x_1,x_2}(\mathbb{A}^1; M)$, on introduit sur $\mathcal{FS}^\kappa_x(M)$ une structure d'une catégorie monoïdale tressée.

5.4. Maintenant prénons pour M le réseau de poids d'un système de racines fini R, muni d'un produit scalaire W-invariant. Le résultat principal de [BFS] dit que le foncteur de cycles évanescents à x établit une équivalence de catégories monoïdales tressées

$$\Phi_x : \ \mathcal{FS}^\kappa_x(M) \xrightarrow{\sim} Rep(u_q\mathfrak{g}) \tag{5.4.1}$$

où $q = e^{2\pi i/\kappa}$. Ici $Rep(u_q\mathfrak{g})$ est la catégorie de représentations de dimension finie du groupe quantique "petit" de Lusztig $u_q\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie semisimple correspondant à R.

Si q n'est pas une racine de l'unite (ce qui sera le seul cas qui nous intéressera), $u_q\mathfrak{g}$ coïncide avec le groupe quantique usuel $U_q\mathfrak{g}$.

5.5. Gaitsgory traduit les constructions précédentes au langage de D-modules tordus, ce qui lui permet à définir les categories $\mathcal{FS}^\kappa_{\bar{x}}(X)$ pour une courbe lisse quelconque.

Soit X une courbe lisse. On considère le réseau $M = \Lambda^\vee$. Pour chaque $\mu^\vee \in \Lambda^\vee_+$ Gaitsgory définit (en utilisant les Jacobiens) un fibré inversible $L^{\mu^\vee}$ sur $X^{\mu^\vee}$; il est canoniquement trivialisé au-dessus du stratum ouvert $X^{\mu^\vee}$.

Quand $\mu^\vee$ varie, ces fibrés forment une famille factorisable. La notation $\mathcal{D}\text{-mod}^c(X^{\mu^\vee})$ signifie des $\mathcal{D}$-modules $(L^{\mu^\vee})^{\otimes c}$-tordus.

En modifiant les définitions de 5.3, on définit la notion d'un faisceau factorisable (fini) $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\mu^\vee}\}$ où $\mathcal{F}_{\mu^\vee} \in \mathcal{D}\text{-mod}^c_{S^{\mu^\vee}_{\bar{x}}}(X^{\mu^\vee})$. Ces faisceaux forment une catégorie semisimple notée $\mathcal{FS}^c_{\bar{x}}(G^\vee)$; en faisant varier les points $x_1, \ldots, x_n$, on obtient la catégorie $\mathcal{FS}^c_n(G^\vee)$

Pour $X = \mathbb{A}^1$ on revient à la définition 5.3, avec $c = 1/\kappa$.

§6. Zastavas

Dans ce paragraph on fait jouer le sous-groupe de Borel opposé $B_- \subset G$, suivant [FFKM].

6.1. Pour $\mu^\vee \in \Lambda^\vee$ soit $Bun^{\mu^\vee}_{B_-}$ le champ de B_--torseurs sur X de degré $(2g-2)\rho^\vee - \mu^\vee$.

On peut décrire ce champs comme classifiant les données suivantes:

— un G-torseur $\mathcal{F}_G$;

— un T-torseur $\mathcal{F}_T$ tel que pour chaque $\lambda \in \Lambda = Hom(T, \mathbb{G}_m)$ le degré du $\mathbb{G}_m$-torseur, i.e. du fibré linéaire $\lambda_*\mathcal{F}_T$ est égale à

$$\langle \lambda, (2g-2)\rho^\vee - \mu^\vee \rangle$$

— une collection des epimorphismes

$$\kappa^\lambda_- : V^\lambda_{\mathcal{F}_G} \longrightarrow \lambda_*\mathcal{F}_T$$

dont les conoyaux soient localement libres, qui satisfont aux relations de Plücker.

6.2. L'espace de **$\mu^\vee$-zastavas** est le sous-champ ouvert

$$\mathcal{Z}^{\mu^\vee}_n \subset \mathfrak{M}_n \times_{Bun_G} Bun^{\mu^\vee}_{B_-}$$

qui correspond à la condition que les composées

$$\omega^{\langle \lambda, \rho \rangle} \xrightarrow{\kappa^\lambda} V^\lambda_{\mathcal{F}_G} \xrightarrow{\kappa^\lambda_-} \lambda_*\mathcal{F}_T \tag{6.2.1}$$

soient différentes de 0.

En prénant le diviseur de zéros et de pôles de (6.2.1), on obtient le morphisme canonique

$$\pi_{\mu^\vee} : \mathcal{Z}^{\mu^\vee}_n \longrightarrow X^{\mu^\vee}_n$$

Quand $\mu^\vee$ varie, ces morphismes satisfont aux propriété fondamentale de factorisarion, analogue à 5.2, 5.3.

De l'autre côté on a la projection canonique

$$p^{\mu^\vee}_- : \mathcal{Z}^{\mu^\vee}_n \longrightarrow \mathfrak{M}_n$$

On introduit le faisceau inversible canonique sur $\mathcal{Z}_n^{\mu^\vee}$ par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Z}_n,\mu^\vee} = p_-^{\mu^\vee *}\mathcal{L}_{\mathfrak{M}_n}$$

Il nous permet à définir pour tout $c \in \mathbb{C}$ la catégorie de $\mathcal{D}$-modules tordus $\mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathcal{Z}_n^{\mu^\vee})$.

En plus, quand $\mu^\vee \in \Lambda_+^\vee$ varie, les fibrés $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}_n,\mu^\vee}$ se factorisent.

6.3. On a deux morphismes

$$\mathfrak{M}_n \xleftarrow{p_-^{\mu^\vee}} \mathcal{Z}_n^{\mu^\vee} \xrightarrow{\pi_{\mu^\vee}} X_n^{\mu^\vee}$$

Les deux fibrés inversibles sur $\mathcal{Z}_n^{\mu^\vee}$ sont canoniquement isomorphes:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{Z}_n,\mu^\vee} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mu^\vee}^* L^{\mu^\vee}.$$

Introduisons un foncteur

$$p^{\mu^\vee}:\ D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathfrak{M}_n)) \longrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathcal{Z}_n^{\mu^\vee}))$$

par

$$p^{\mu^\vee}(\mathcal{F}) = p_-^{\mu^\vee !}(\mathcal{F})[\dim Bun_G - \dim Bun_{B_-}^{\mu^\vee}]$$

On définit les foncteurs

$$G_{\mu^\vee} := \pi_*^{\mu^\vee} \circ p^{\mu^\vee}:\ D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathfrak{M}_n)) \longrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(X_n^{\mu^\vee}))$$

Supposons dorénavant que c soit irrationel. Rappellons qua la catégorie de Whittaker $Whit_n^c(G)$ s'identifie par définition à une sous-catégorie semi-simple pleine de $\mathcal{D}\text{-mod}^c(\mathfrak{M}_n)$.

6.3.1. Proposition. *Si $\mathcal{F} \in Whit_n^c(G)$ alors $G_{\mu^\vee}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}^c(X_n^{\mu^\vee})$.* $\square$

Ici $\mathcal{M}^c(X_n^{\mu^\vee}) \subset D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(X_n^{\mu^\vee}))$ note la sous-catégorie abélienne de D-modules (tordus) holonômes aux singularités régulieres.

6.4. Supposons d'abord que $n = 0$. On a l'objet $\mathcal{W}_0 \in Whit_0(G)$, le "vacuum Whittaker sheaf" qui joue le rôle d'une "algèbre", les autres faisceaux de Whittaker étant des "modules" sur cette "algébre". Gaitsgory demontre que

$$G_{\mu^vee}(\mathcal{W}_0^{\mu^\vee}) = \mathcal{L}_{!*}\mu^\vee$$

Ensuite, en utilisant la factorisation des espaces de zastavas, on munit la famille $\{G_{\mu^\vee}(\mathcal{F})\}$ d'une structure d'un faisceau factorisé, d'où le foncteur

$$G:\ Whit_n^c(G) \longrightarrow \mathcal{FS}_n^c(G^\vee) \tag{6.4.1}$$

qui est une équivalence. Ceci est le résultat principal de Gaitsgory.

§7. Kazhdan - Lusztig et la conjecture globale

7.1. Équivalence de Kazhdan-Lusztig. Dorénavant G sera simple.

Charge central. Soit

$$Kil: \ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

la forme de Killing. Étant donné c comme ci-dessus, **on pose dans ce §**:

$$\kappa = \kappa(c) = \frac{c - h^\vee}{2h^\vee} \cdot Kil$$

où $h^\vee$ est le nombre de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$.

Soit $d =$ la racine carrée du quotient des longeurs de la plus longue et la plus courte racine de $\mathfrak{g}$.

Quantités duales. $c^\vee = 1/cd$, $q^\vee = e^{\pi i c^\vee}$, $\kappa^\vee = \kappa(c^\vee)$.

Sur $\mathfrak{g}^\vee$ on définit la forme invariante $\kappa^\vee$ de la façon suivante. Soient

$$B_{\mathfrak{h}} = (\kappa + Kil(\mathfrak{g})/2)|_{\mathfrak{h}}, \ B_{\mathfrak{h}^\vee} = (\kappa^\vee + Kil(\mathfrak{g}^\vee)/2)|_{\mathfrak{h}^\vee}$$

On demande que

$$B_{\mathfrak{h}}: \ \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^\vee$$

soit égal à $B_{\mathfrak{h}^\vee}^{-1}$ où l'on identifie $\mathfrak{h}^\vee = \mathfrak{h}^*$.

Catégorie $\mathcal{KL}^\kappa(G)$. Soient $O = \mathbb{C}[[t]] \subset K = \mathbb{C}((t))$.

Soit $\hat{\mathfrak{g}}(K)$ l'algèbre affine de Kac - Moody, l'extension centrale de $\mathfrak{g}(K)$. Par définition, $\mathcal{KL}^\kappa(G)$ est la sous-categorie de la catégorie $\hat{\mathfrak{g}}(K)$-mod$^\kappa$ dont les objets sont les representations sur lesquels l'action de $\mathfrak{g}(O) \subset \mathfrak{g}(K)$ s'intègre à $G(O)$.

Kazhdan et Lusztig, [KL], munissent $\mathcal{KL}^\kappa(G)$ d'une structure d'une catégorie monoïdale tressée et établissent une équivalence

$$\mathcal{KL}^\kappa(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}ep(U_{q^\vee}(G))$$

7.2. Conjecture D. *Supposons que $c \notin \mathbb{Q}$. Il existe une équivalence*

$$\mathcal{KL}^\kappa(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{FS}^{c^\vee}(G)$$

En combinant cet équivalence avec (6.4.1), on obtient

7.3. Conjecture E.. *Il existe une équivalence*

$$\mathcal{W}hit^c(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{KL}^{\kappa^\vee}(G^\vee)$$

On attend que cela soit vrai pour tout c, pas forcement irrationel.

En faisant tendre ici $c \to 0$ et appliquant l'équivalence de Satake géométrique (3.4.1), on retrouvera l'équivalence (4.4.2) entre la catégorie de Whittaker $\mathcal{W}hit(G)$ et la catégorie sphérique $\mathcal{H}ecke(G)$.

Passage du local au global

Maintenant on va, suivant Gaitsgory, rélier les conjectures précedentes à celles de §2.

7.4. Uniformisation. Pour motiver le considérations ci-dessous, considérons un exemple classique. Soient $G = SL_2(\mathbb{R}) \supset K = SO(2)$, $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret,

$$\pi: \ H := G/K \longrightarrow \Gamma\backslash H \tag{7.4.1}$$

la projection canonique. Les fonctions sphériques habitent sur H; les fonctions automorphes habitent sur $\Gamma\backslash H$. On a deux applications entre les espaces de fonctions

$$Fun(H) \underset{\pi^*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} Fun(\Gamma\backslash H) = Fun(H)^\Gamma,$$

$$\pi^* f(x) = \pi(f(x)), \ \pi_* g(y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma y),$$

la deuxième application s'appelle "la série de Poincaré".

Voici une version algébrique d'une uniformisation. Soient X une courbe lisse propre connexe sur $\mathbb{C}$, $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ des points distincts, $X' = X \setminus \bar{x}$, G un groupe réductif connexe, $\Gamma = G(\Gamma(X'; \mathcal{O}_X))$.

Soit $Gr_{\bar{x}}$ le ind-schéma de modules des données (P, ϕ) où P est un G-torseur au-dessus de X et ϕ est une trivialisation

$$\phi: \ P|_{X'} \xrightarrow{\sim} X' \times G$$

La projection canonique

$$\pi: \ Gr_{\bar{x}} \cong \prod_{i=1}^n G(K_{x_i})/G(O_{x_i}) \longrightarrow Bun_G = \Gamma\backslash Gr_{\bar{x}} \tag{7.4.2}$$

est un analogue de (7.4.1). Elle est similaire à "l'uniformisation Virasoro" de l'espace de modules de courbes, cf. [BS], 4.1.

7.5. Le foncteur d'image directe correspondant au morphisme de champs $\mathfrak{M}_{\bar{x}} \longrightarrow Bun_G$ induit le foncteur "série de Poincaré"

$$\text{Poinc}: \ \prod_{i=1}^n \mathcal{W}hit^c_{x_i}(G) \longrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(Bun_G))$$

(adjoint à droite au foncteur du "coefficient de Whittaker").

D'un autre côté, fixons des coordonnées locales t_i en x_i, d'où les isomorphismes $K_{x_i} \cong K$. On va noter $\mathcal{KL}^\kappa_{x_i}(G)$ la catégorie $\mathcal{KL}^\kappa(G)$ correspondante.

On a le foncteur de localisation

$$\mathrm{Loc}: \prod_{i=1}^n \mathcal{KL}^\kappa_{x_i}(G) \longrightarrow D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(Bun_G))$$

Étant donnés des $\hat{\mathfrak{g}}$-modules $V_i \in \mathcal{KL}^\kappa_{x_i}(G)$, $1 \leq i \leq n$, et $P \in Bun_G$, la fibre

$$\mathrm{Loc}(V_1, \ldots, V_n)_P$$

se définit de la manière suivante. Soient $\mathfrak{g}_P$ le faisceau des algèbres de Lie sur X associé à la représentaion adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ tordu par P, et $\mathfrak{g}_{P,out} = \Gamma(X', \mathfrak{g}_P)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{P,out}$ agit sur $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Par définition

$$\mathrm{Loc}(V_1, \ldots, V_n)_P = H_*(\mathfrak{g}_{P,out}, V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$$

7.6. Conjecture F. *Le carré*

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n \mathcal{W}hit^c_{x_i}(G) & \overset{7.3}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} & \prod_{i=1}^n \mathcal{KL}^{\kappa^\vee}_{x_i}(G^\vee) \\ \mathrm{Poinc} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Loc} \\ D(\mathcal{D}\text{-mod}^c(Bun_G)) & \overset{2.3}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} & D(\mathcal{D}\text{-mod}^{c^\vee}(Bun_G)) \end{array}$$

est commutatif.

Bibliographie

[AG] D.Arinkin, D.Gaitsgory, Singular support of coherent sheaves, and the geometric Langlands conjecture, arXiv:1201.6343.

[BB] A.Beilinson, J.Bernstein, A proof of Jantzen conjectures, I.M.Gelfand Seminar, *Adv. Soviet Math.* (AMS), **16**, Part 1 (1993), 1 - 51.

[BD] A.Beilinson, V.Drinfeld, Quantization of Hitchin integrable system and Hecke eigensheaves.

[BS] A.Beilinson, V.Schechtman, Determinant bundles and Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 651 - 701.

[BPZ] A.Belavin, A.Polyakov, A.Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in 2D quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333 - 380.

[BG] F.A.Berezin, I.M.Gelfand, Quelques remarques sur la théorie des fonctions sphériques sur les variétés symétriques riemanniennes (russe), *Trudy MMO* (Travaux de la Société Mathématique de Moscou) **5** (1956), 311 - 351.

[BrGa] A.Braverman, D.Gaitsgory, Geometric Eisenstein series, Invent. Math. **150** (2002), 287 - 384.

[BFS] R.Bezrukavnikov, M.Finkelberg, V.Schechtman, Factorizable sheaves and quantum groups, *Lect. Notes in Math.* **1691**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[FFKM] M.Finkelberg, I.Mirkovich, Semiinfinite flags. I. Case of global curve $\mathbb{P}^1$; B.Feigin, M.Finkelberg, A.Kuznetsov, I.Mirkovich, Semiinfinite flags. II. Local and global intersection cohomology of quasimaps' spaces, dans: Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, 81 - 112 et 113 - 148, *AMS Transl.* Ser. 2, **194**, Providence, RI, 1999.

[FBZ] E.Frenkel, D.Ben-Zvi, Vertex alegebras and algebraic curves, 2nd Edition, *Math. Surveys and Monographs* **88**, AMS, Providence, RI, 2004.

[FGV1] E.Frenkel, D.Gaitsgory, K.Vilonen, Whittaker patterns in the geometry of moduli spaces of bundles on curves, *Ann. Math.* **153** (2001), 699 - 748.

[FGV2] E.Frenkel, D.Gaitsgory, K.Vilonen, On the geometric Langlands conjecture, *JAMS* **15** (2001), 367 - 417.

[G1] D.Gaitsgory, Twisted Whittaker models and factorizable sheaves, *Selecta Math.* (N.S.) **13** (2008), 617 - 659.

[G2] D.Gaitsgory, On a vanishing conjecture appearing in the Geometric Langlands correspondence, *Ann. Math.* **160** (2004), 617 - 682.

[Gi] V.Ginzburg, Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality, alg-geom/2511007.

[H] S.Helgason, Groups and geometric analysis, Academic Press, 1984.

[KL] D.Kazhdan, G.Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras I - IV *JAMS*, **6** (1993), 905 - 947, 949 - 1011; **7** (1994), 335 - 381, 383 - 453.

[Laf] L.Lafforgue, Chtoukas de Drinfeld et correspondance de Langlands, *Inv. Math.* **147** (2002), 1 - 241.

[L] G.Laumon, Transformation de Fourier généralisée, alg-geom/9603004.

[Ma] H.Maaß, Über eine neue Art von nichtanalytichen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichetscher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* **21** (1949), 141 - 183.

[M] I.G.Macdonald, Spherical functions on a $\mathfrak{p}$-adic Chevalley group.

[MV] I.Mirković, K.Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, *Ann. of Math.* (2) **166** (2007), 95 - 143.

[Sa] I.Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, *Publ. Math. IHES* **18** (1963), 5 - 69.

[St1] A.Stoyanovsky, On quantization of the geometric Langlands correspondence, arXiv:math/9911108.

[St2] A.Stoyanovsky, Quantum Langlands duality and Conformal field theory, arXiv:math/0610974.