



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *27 Juin 2017* par :

**LAURA BRILLON**

**Matrices de Cartan, bases distinguées et systèmes de Toda**

---

---

## JURY

MARCELLO BERNARDARA	Université de Toulouse	Membre du jury
VASSILY GORBOUNOV	University of Aberdeen	Rapporteur
MARIA GORELIK	Weizmann Institute	Rapporteuse
VADIM SCHECHTMAN	Université de Toulouse	Directeur de thèse
JOSEPH TAPIA	Université de Toulouse	Membre du jury
BORIS TSYGAN	Northwestern University	Membre du jury

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Mathématiques de Toulouse*

**Directeur de Thèse :**

*Vadim Schechtman*

**Rapporteurs :**

*Maria Gorelik et Vassily Gorbounov*



# Remerciements

Quand on commence une thèse, on n'imagine pas la fin. Quand on la termine, on se demande comment on en est arrivé là. Quand on écrit cette page, qui est à la fois la première et la dernière, on pense à tous ceux qui y ont contribué. Et quand on a fini, on se sent heureux d'être aussi bien entouré.

## *Le jury et le monde des Mathématiques.*

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Vadim Schechtman. Ces trois dernières années, il s'est montré très disponible, patient et toujours optimiste. Nos discussions étaient chaque fois passionnantes et ses encouragements m'ont beaucoup aidé. Je garderai, grâce à lui, un bon souvenir de cette expérience de la recherche.

Ensuite, je remercie mes deux rapporteurs, Maria Gorelik et Vassily Gorbounov, d'avoir accepté de relire ma thèse. Leurs pertinentes observations m'ont permis d'améliorer ce manuscrit. En particulier, j'adresse un grand merci à Maria pour sa vigilance et son aide précieuse à la correction du Chapitre 4.

Enfin, je voudrais remercier Marcello Bernardara, Joseph Tapia et Boris Tsygan de participer au jury de ma soutenance.

Plus généralement, je souhaite remercier toutes les personnes de l'IMT ou du monde des Mathématiques qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de mon projet : mes co-auteurs, Alexander Varchenko et Revaz Ramazashvili ; Serge Cohen, grâce à qui j'ai pu conserver de bonnes conditions de travail au sein de l'Institut cette année ; les secrétaires, pour leur aide bienveillante dans toutes les démarches administratives.

Un grand merci à tous ceux qui ont participé à rendre l'ambiance du laboratoire agréable, les doctorants, Kévin, Valentin et Maylis, Guillaume, Marc, Jules ; les anciens, Anton, Guillem, Fabrizio et Danny ; les permanents, Jasmin, Joan, Stéphane et tous les autres.

## *Albi et le monde de l'enseignement.*

Cette thèse, c'est une page qui se tourne. Mais pour moi, une nouvelle aventure a déjà commencé depuis quelques mois à l'INU Champollion.

Cette aventure a débuté grâce à Martin, qui m'a accordé sa confiance. Je voudrais remercier chaleureusement mes nouveaux collègues, Thierry, Nicolas et David, de m'avoir si bien accueillie et accompagnée en cette première année. Je suis fière et ravie d'avoir

rejoint l'équipe! Merci également à Florence, Christophe, Alain et tous les autres collègues d'Albi qui ont fait en sorte que je m'y sente bien. Et merci à mes étudiants pour leur curiosité à l'égard de ma thèse, bonne continuation à vous.

J'ai essayé la recherche, mais c'est définitivement l'enseignement qui me permet de m'épanouir. Cette volonté d'enseigner est venue très tôt, et aujourd'hui, j'ai une pensée pour les professeurs de Mathématiques qui ont marqué mes études : Mme Konikowski (collège) qui m'a enseigné la rigueur, la première qui a rendu les Mathématiques motivantes ; M. Gros (lycée), le professeur redouté qu'on redemande ; Mme Cohen (CPGE) qui a partagé avec moi son expérience et m'a accompagnée dans mes débuts d'enseignante.

Une pensée aussi pour l'équipe de professeurs d'Informatique de Rennes qui m'a préparée à l'Agrégation. Leurs enseignements et conseils me sont aujourd'hui précieux dans la création de mes cours.

### *Les amis, la famille.*

La thèse n'aurait pas été si agréable sans eux, sans leur aide et leur soutien.

Je pense tout d'abord à mes collègues de la première heure, Anne et Damien. Nous avons partagé nos moments de doute, nos désillusions et nos petites victoires. Nos chemins se séparent mais les souvenirs resteront. Je voudrais aussi remercier Julie, la petite dernière du bureau, je te souhaite bon courage pour ta dernière année de thèse.

Elles sont cinq, je ne les vois pas aussi souvent que je le souhaite, mais elles sont toujours présentes et je les en remercie. À Audrey, je peux toujours t'écrire pour raconter mes misères et mes joies. À Tatiana, les études ont été plus faciles en suivant ton exemple. À Fiona, tu construis une si jolie famille loin d'ici, mais tu as toujours du temps à me consacrer. À Annaïg, la plus combative de toutes et je souhaite que tes magnifiques projets se réalisent. Et à Léa, pour les fous-rires en prépa qui nous ont permis de tenir et pour ces quelques jours à Londres et Paris.

Un autre que je ne vois pas aussi souvent que je le souhaite, et à qui je dois beaucoup, parce que tu me remontes le moral et me redonne confiance en moi quand il le faut, merci Rémi.

Je remercie également tous mes amis, les Touyous, les Rennais, qui ont ponctué de rires et de grandes joies mes années d'études.

J'ai également une pensée pour ma famille et les bons moments que nous passons ensemble, merci de vous intéresser à ce que je fais même si cela vous paraît très obscur. Je souhaite remercier mes grands-parents, Annick et Jacques, d'être aussi attentionnés et ma tante, Christine, qui répond toujours présente.

À mes parents, merci d'avoir respecté mes choix, de m'avoir soutenue dans les moments difficiles et d'avoir partagé mes réussites.

À Maxime, ton soutien et notre complicité ont beaucoup compté ces trois dernières années. Merci d'être à mes côtés.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>Prérequis</b>	<b>25</b>
<b>1 Élément de Coxeter et masses de particules</b>	<b>31</b>
1.1 Introduction . . . . .	32
1.2 Élément principal et sous-algèbres de Cartan en apposition . . . . .	33
1.2.1 Notations . . . . .	33
1.2.2 Élément principal et gradation principale . . . . .	34
1.3 Sous-algèbres en apposition et éléments de Coxeter . . . . .	35
1.3.1 Sous-algèbres de Cartan en apposition . . . . .	35
1.3.2 Élément de Coxeter . . . . .	36
1.4 Opérateur diagonalisable . . . . .	36
1.5 Élément de Coxeter et matrice de Cartan . . . . .	38
1.5.1 Élément de Coxeter et Matrice de Cartan . . . . .	38
1.5.2 Spectre et vecteurs propres . . . . .	39
1.5.3 Action de l'élément de Coxeter sur les racines . . . . .	42
1.6 Involution de Cartan et forme hermitienne . . . . .	42
1.6.1 Définitions d'une involution et d'une forme hermitienne. . . . .	42
1.6.2 Les valeurs propres de $ad_x ad_{x^*}$ . . . . .	43
1.7 Démonstration du Théorème principal . . . . .	44
1.8 Équations de Toda affines . . . . .	47
1.9 Perspectives, motifs dans les vecteurs propres de la matrice de Cartan . .	48
1.9.1 Description des motifs . . . . .	48
1.9.2 Exemple . . . . .	49
<b>2 Cycles évanescents et Vecteurs propres de Cartan</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction . . . . .	52
2.2 Rappels de théorie des singularités . . . . .	53
2.2.1 Réseaux de cycles évanescents . . . . .	53

2.2.2	Déformations de Morse . . . . .	54
2.2.3	Factorisation de Sebastiani - Thom . . . . .	56
2.2.4	Singularités simples . . . . .	57
2.3	La correspondance Cartan - Coxeter . . . . .	57
2.3.1	Réseaux, polarisation, élément de Coxeter . . . . .	57
2.3.2	Décomposition blanche/noire et Théorème de Steinberg . . . . .	58
2.3.3	Correspondance des vecteurs propres . . . . .	59
2.3.4	Exemple : le système de racines $A_n$ . . . . .	61
2.4	Produit de Sebastiani - Thom, factorisation de $E_8$ . . . . .	62
2.4.1	Produit de Sebastiani - Thom . . . . .	62
2.4.2	$E_8$ et $A_4 \star A_2 \star A_1$ : analyse élémentaire . . . . .	63
2.4.3	Décomposition de $Q(E_8)$ . . . . .	63
2.4.4	Ordre des racines . . . . .	65
2.4.5	Les vecteurs propres de la matrice de Cartan de $E_8$ . . . . .	67
2.4.6	Vecteur de Perron - Frobenius . . . . .	68
2.4.7	Factorisation de $E_6$ et $D_4$ . . . . .	69
2.5	$q$ -déformation de Givental . . . . .	72
2.5.1	$q$ -déformation des matrices de Cartan . . . . .	72
2.5.2	Correspondance de Cartan - Coxeter $q$ -déformée . . . . .	73
2.5.3	Spectre et vecteurs propres des matrices de Cartan $q$ -déformées . . . . .	74
2.5.4	Remarque (M. Finkelberg) . . . . .	76
2.5.5	Exemples . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Systèmes de Toda <math>q</math>-déformés</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	80
3.2	Relations de commutation . . . . .	82
3.2.1	Les équations de Toda . . . . .	82
3.2.2	Opérateur et commutativité . . . . .	83
3.2.3	$q$ -déformation des masses . . . . .	86
3.3	Solitons . . . . .	86
3.3.1	Un cas particulier, $A_1$ . . . . .	88
3.3.2	Mise en place de la méthode de Hirota . . . . .	89
3.3.3	Développement en série . . . . .	90
3.3.4	Construction d'une solution . . . . .	93
3.3.5	Compléments sur les constantes $c_{j,a}^{(k)}$ . . . . .	96
3.3.6	Perspectives . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Étude de l'ensemble des bases distinguées</b> . . . . .	<b>103</b>
4.1	Introduction . . . . .	104
4.2	Définitions géométrique et algébrique . . . . .	105
4.2.1	Cycles évanescents . . . . .	105
4.2.2	Changements de bases . . . . .	106
4.2.3	Bases distinguées et racines . . . . .	108
4.3	Actions de groupes et éléments de Coxeter . . . . .	108

---

4.3.1	Actions de groupe sur $\mathcal{B}(R)$ . . . . .	109
4.3.2	Orbites et Coxeter . . . . .	110
4.4	Matrices de Gabrielov . . . . .	112
4.4.1	Graphe étiqueté et connexité . . . . .	113
4.4.2	Matrices de Gabrielov . . . . .	115
4.4.3	Actions de $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$ et $\rho(Br_\ell)$ . . . . .	117
4.4.4	Perspectives . . . . .	119
4.5	Cardinal de $\mathcal{B}d$ . . . . .	120
4.6	Transitivité de l'action de $BW(A_\ell)$ sur $\mathcal{B}(A_\ell)$ . . . . .	122
4.7	Annexe - Preuve du lemme 61 . . . . .	125
	<b>Biographies</b> . . . . .	<b>131</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>135</b>





# Table des figures

2.1	Diagramme de Dynkin de $A_n$ . . . . .	61
2.2	Ordre de Gabrielov des racines simples de $E_8$ . . . . .	65
2.3	Ordre de Bourbaki des racines simples de $E_8$ . . . . .	66
2.4	Exemple : $i_0 < j < k$ . . . . .	75
4.1	Schéma de l’octopus et d’un cycle évanescent . . . . .	106
4.2	Le chemin $p_i$ et son lacet $\tau_i$ . . . . .	106
4.3	Illustration de la transformation $\mu_i$ sur un octopus. . . . .	107
4.4	Graphe associé à la base de racines simples de $A_\ell$ . . . . .	114
4.5	Si $k$ est voisin de $i$ . . . . .	114
4.6	Si $k$ est voisin de $i + 1$ sans être un voisin de $i$ . . . . .	115
4.7	Cardinal de l’ensemble des bases distinguées . . . . .	121
4.8	Actions de $W$ et de $Br_\ell$ sur $\mathcal{B}(A_\ell)$ . . . . .	124
4.9	L’action de $W$ (en orange) et de $Br_2$ (en vert) sur $\mathcal{B}(A_2)$ . . . . .	124
4.10	Configuration n° 1 . . . . .	126
4.11	Configuration n° 2 . . . . .	126
4.12	Configuration n° 3 . . . . .	126
4.13	Dernier cas possible. . . . .	128
4.14	Harold Scott MacDonald Coxeter (1907 – 2003) . . . . .	131
4.15	Eugene Dynkin (1924 – 2014) . . . . .	132
4.16	Bertram Kostant (1928 – 2017) . . . . .	133



# Résumé

**Résumé.** Dans cette thèse, nous nous intéressons à plusieurs aspects des systèmes de racines des algèbres de Lie simples.

Dans un premier temps, nous étudions les coordonnées des vecteurs propres des matrices de Cartan. Nous commençons par généraliser les travaux de physiciens qui ont montré que les masses des particules dans la théorie des champs de Toda affine sont égales aux coordonnées du vecteur propre de Perron – Frobenius de la matrice de Cartan. Puis nous adoptons une approche différente, puisque nous utilisons des résultats de la théorie des singularités pour calculer les coordonnées des vecteurs propres de certains systèmes de racines.

Dans un deuxième temps, en s’inspirant des idées de Givental, nous introduisons les matrices de Cartan  $q$ -déformées et étudions leur spectre et leurs vecteurs propres. Puis, nous proposons une  $q$ -déformation des équations de Toda et construisons des 1-solitons solutions en adaptant la méthode de Hirota, d’après les travaux de Hollowood.

Enfin, notre intérêt se porte sur un ensemble de transformations agissant sur l’ensemble des bases ordonnées de racines comme le groupe de tresses. En particulier, nous étudions les bases distinguées, qui forment l’une des orbites de cette action, et des matrices que nous leur associons.

**Mots clés.** Matrices de Cartan, élément de Coxeter, vecteur de Perron – Frobenius, cycle évanescent, Théorème de Sebastiani – Thom,  $q$ -déformations, systèmes de Toda, bases distinguées, matrices de Gabrielov



# Introduction générale



# Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à plusieurs aspects des systèmes de racines des algèbres de Lie simples.

Notre intérêt s'est porté sur les vecteurs propres des matrices de Cartan qui jouent un rôle important en théorie des systèmes intégrables. Nous nous sommes intéressés en particulier à la Théorie des champs de Toda et nous proposons une  $q$ -déformation, au sens de Givental, des équations du mouvement de la Théorie de Toda affine. Enfin, nous étudions l'action de certaines transformations sur l'ensemble des bases ordonnées de racines.

Avant de décrire plus en détails le contenu de cette thèse, rappelons les grands noms qui ont contribué à développer la Théorie des algèbres de Lie, jusqu'aux travaux plus récents de certains physiciens.

## Contexte et motivations

**Classification des algèbres de Lie semi-simples.** Les algèbres de Lie ont été nommées ainsi en l'honneur du mathématicien norvégien Sophus Lie (1842 - 1899). Au début des années 1870, Sophus Lie développe sa théorie des groupes continus de transformations (appelés plus tard, groupes de Lie) et introduit les groupes infinitésimaux, qui ne sont en fait pas des groupes au sens de la définition actuelle, mais deviendront les algèbres de Lie.

À la même époque, Wilhelm K. J. Killing (mathématicien allemand, 1847 - 1923) introduit également, et de façon indépendante, les algèbres de Lie dans le cadre de ses travaux sur la géométrie non euclidienne.

Killing est le premier à s'intéresser au problème de classification des algèbres de Lie semi-simples (travaux publiés entre 1888 et 1890), Élie Cartan complète ces recherches dans sa thèse en 1894. Les principaux outils pour classer les algèbres de Lie semi-simples complexes sont les sous-algèbres de Cartan et les matrices de Cartan. Curieusement, ces deux dernières notions ont été introduites par Killing, alors que la forme de Killing est due à Cartan. Killing a également évoqué la notion de racines, très présente dans la théorie aujourd'hui.

**Groupe de Weyl et transformations de Coxeter.** De 1923 à 1938, le mathématicien allemand Hermann Weyl (1885 - 1955) contribue à la théorie des représentations

des groupes semi-simples, notamment par la formule des caractères de Weyl. Le groupe de Weyl d'un système de racines est un exemple de groupe de Coxeter.

Harold S. M. Coxeter (mathématicien britannique, 1907 - 2003) a introduit ces groupes. Les transformations de Coxeter, qui sont des éléments du groupe de Weyl, jouent un rôle essentiel dans cette thèse.

Quelques années plus tard, en essayant de comprendre les travaux de Weyl, Evge-nii Dynkin (mathématicien russe, 1924 - 2014) développe une nouvelle approche à la classification des algèbres de Lie semi-simples : les diagrammes de Dynkin. Ces graphes sont parfois aussi appelés diagrammes de Coxeter-Dynkin, puisque Coxeter a également introduit ces graphes dans le cadre de ses recherches sur les groupes cristallographiques.

**Et plus récemment...** Les matrices de Cartan et les coordonnées de leurs vecteurs propres ont un rôle important en théorie des systèmes intégrables, citons notamment les travaux précurseurs de Dorey ([Dor1], [Dor2]).

Notre intérêt s'est porté plus particulièrement sur les systèmes de Toda. Notons  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  une base de racines simples d'un système de racines  $R$  irréductibles et notons

$$\theta = \sum_{j=1}^r n_j \alpha_j$$

la plus longue racine. Posons  $\alpha_0 := -\theta$  et  $n_0 = 0$  de telle sorte que

$$\sum_{j=0}^r n_j \alpha_j = 0$$

Les équations du mouvement dans la théorie de Toda affine sont alors données par

$$\square \phi + \frac{m^2}{\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)) = 0$$

dans le cas réel, et par

$$\square \phi + \frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(i\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)) = 0$$

dans le cas complexe. Ici,  $m$  et  $\beta$  désignent des constantes réelles,  $(\cdot) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée et  $W$ -invariante et  $\phi : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{h}$  est une fonction lisse.

Des physiciens, H.W. Braden et al. (1990, [BCDS]), M.D. Freeman (1991, [Fre1]), A. Fring et al. (1991, [FLO]) ont montré que les masses des particules dans la théorie affine des champs de Toda sont égales aux coordonnées du vecteur propre de Perron - Frobenius de la matrice de Cartan. Rappelons que le vecteur de Perron - Frobenius est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice de Cartan. Ces travaux sont le point de départ de cette thèse.



Terminons par évoquer les récents travaux expérimentaux de Coldea et al. (2010, [C et al.]). Lors d'une expérience de diffusion de neutrons, ils ont observé des résultats qui avaient été prédits par Zamolodchikov (1989, [Zam1]). Dans un modèle d'Ising critique à deux dimensions dans un champ magnétique, Zamolodchikov a découvert un octuplet de particules dont les masses sont les coordonnées du vecteur propre de Perron-Frobenius de la matrice de Cartan de  $E_8$ .

## Contenu de la thèse

Cette thèse a pour objectif d'étudier les vecteurs propres de la matrice de Cartan, une  $q$ -déformation des systèmes de Toda, et l'action du groupe de Weyl et de certaines transformations sur les bases distinguées, un sous-ensemble de l'ensemble des bases de racines.

Dans les deux premiers chapitres, nous étudions les coordonnées des vecteurs propres de la matrice de Cartan. Nous commençons par généraliser les travaux des physiciens que nous venons d'évoquer. Puis, nous adoptons une autre approche et utilisons des outils de la théorie des singularités pour donner une nouvelle méthode de calcul des vecteurs propres des systèmes de racines  $D_4$ ,  $E_6$  et  $E_8$ .

En s'inspirant de la théorie de Picard – Lefschetz  $q$ -déformée par Givental, nous introduisons les matrices de Cartan  $q$ -déformées dont nous étudions le spectre et les vecteurs propres dans la fin du Chapitre 2, et les systèmes de Toda  $q$ -déformés dont nous construisons des 1-solitons solutions dans le Chapitre 3.

Enfin, le Chapitre 4 aborde l'étude de l'ensemble des bases ordonnées formées de racines d'un système  $R$  simplement enlacé pour l'action conjointe du groupe de Weyl et d'un ensemble de transformations agissant comme le groupe de tresses. Nous nous intéressons en particulier à l'une des orbites, l'ensemble des bases distinguées, dont nous déterminons le cardinal et étudions les matrices associées à ces bases de racines.

## Vecteurs propres de la matrice de Cartan et masses de particules

Comme nous l'avons indiqué précédemment, le premier chapitre de cette thèse est consacré aux travaux des physiciens, [Fre1], [FLO], [BCDS]. Dans le cadre de la théorie des champs de Toda affine, leur théorème énonce que les coordonnées du vecteur propre de Perron – Frobenius de la matrice de Cartan sont égales aux racines carrées des valeurs propres d'un opérateur hermitien appelé, opérateur des masses. Ces valeurs propres sont nommées masses des particules. Nous revenons sur la preuve de ce résultat afin de le généraliser aux autres vecteurs propres de la matrice de Cartan.

Ce chapitre est tiré de l'article *Coxeter element and particle masses*, co-écrit avec V. Schechtman, [BS].

**Le résultat principal.** Considérons  $A = \left( \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq r}$  la matrice de Cartan d'un système de racines  $R \subset \mathfrak{h}^*$ , correspondant à une algèbre de Lie complexe, simple et de dimension finie  $\mathfrak{g}$  et une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  fixée. Les valeurs propres de la matrice de Cartan sont données par

$$\lambda_i = 2 - 2 \cos \left( \frac{k_i \pi}{h} \right) \text{ pour } 1 \leq i \leq r$$

où  $h = r + 1$  est le nombre de Coxeter de  $R$  et  $k_1 < \dots < k_r$  sont les exposants de  $R$ . Le vecteur de Perron – Frobenius correspond à la valeur propre  $\lambda_1$ .

Le principal résultat de ce chapitre (voir Théorème 15) est la construction d'une famille d'opérateurs

$$M^{(i)} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

pour  $1 \leq i \leq r$ , qui commutent entre eux, et tels que, pour tout  $i$ , les valeurs propres de  $M^{(i)}$ , notées  $\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_r^{(i)}$ , forment, dans un ordre approprié, un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Les idées de la preuve.** La preuve repose sur la notion de *sous-algèbre de Cartan en apposition avec*  $\mathfrak{h}$ , introduite par B. Kostant ([Kos2]). Cette deuxième sous-algèbre de Cartan, notée  $\mathfrak{h}'$ , est définie comme le centralisateur d'un élément cyclique bien choisi. Les opérateurs  $M^{(i)}$  sont ensuite construits à partir d'éléments de  $\mathfrak{h}'$ .

L'élément de Coxeter se révèle être un outil très utile dans cette démonstration en raison d'une relation entre ses vecteurs propres et ceux de la matrice de Cartan. Si les détails de ce résultat sont donnés dans le corps de la thèse, autorisons nous à en rappeler les grandes lignes dès maintenant.

Le graphe de Dynkin d'un système de racines  $R$  est en fait un arbre et admet donc une 2-coloration de ses sommets. Numérotons les sommets du graphe de telle sorte que les sommets  $\{1, \dots, p\}$  soient noirs, et les sommets  $\{p + 1, \dots, r\}$  soient blancs. Notons  $s_i := s_{\alpha_i}$ , l'élément de Coxeter associé à la décomposition blanche/noire du diagramme de Dynkin est alors défini par

$$c := c_n c_b \text{ avec } c_n = \prod_{i=1}^p s_i \text{ et } c_b = \prod_{i=p+1}^r s_i.$$

La matrice de cette transformation de Coxeter particulière vérifie une égalité impliquant la matrice de Cartan :

$$c + c^{-1} + 2I = (2I - A)^2$$

À partir de cette égalité, nous pouvons établir un lien entre les spectres des  $c$  et  $A$  ( $e^{2i\theta}$  est une valeur propre de  $c$  si et seulement si  $2 - 2 \cos \theta$  est une valeur propre de  $A$ ) et entre les vecteurs propres.

Ce résultat n'est pas seulement utile dans le Chapitre 1, il joue également un rôle essentiel dans le Chapitre 2.

**Lien avec les systèmes de Toda.** Puisque le résultat des physiciens à l'origine de ce chapitre provient de la Théorie des champs de Toda affine, nous proposons en fin de chapitre une généralisation des équations différentielles de Toda, dont les masses des particules sont les valeurs absolues des coordonnées de tous les vecteurs propres de la matrice de Cartan et pas seulement de celles du vecteur de Perron – Frobenius.

Dans le Chapitre 3, nous proposons également une autre version des équations de Toda, cette fois-ci  $q$ -déformées au sens de Givental.

**Perspectives.** Cette première étude des vecteurs propres de la matrice de Cartan a donné lieu à des observations étonnantes sur les coordonnées de ces vecteurs.

Supposons que  $R$  est un système de racines simplement enlacé. Nous avons observé que, parmi les vecteurs propres de la matrice de Cartan  $A(R)$ ,  $\phi(h)$  d'entre eux (où  $\phi$  désigne ici l'indicatrice d'Euler) sont de *type PF*, c'est à dire, dont les coordonnées sont, au signe près, une permutation de celles du vecteur de Perron – Frobenius. Pour les autres vecteurs propres, leurs coordonnées non nulles peuvent se décomposer en plusieurs ensembles, chaque ensemble correspond aux coordonnées d'un vecteur de Perron – Frobenius d'un système de racine  $R' \subset R$ .

Nous détaillons nos observations de ces motifs pour conclure le Chapitre 1. S'il est possible de vérifier ces résultats au cas par cas pour chaque système de racines, il serait préférable de trouver une démonstration générale. La question de savoir si ce résultat est également vrai pour des systèmes de racines non simplement enlacés est également posée.

## Vecteurs propres de la matrice de Cartan et théorie des singularités

Dans le deuxième chapitre, nous poursuivons notre étude des vecteurs propres de la matrice de Cartan commencée au Chapitre 1, mais, cette fois, avec une approche différente puisque nous utilisons des outils de la théorie des singularités. Dans un deuxième temps, nous étudions également le spectre et les vecteurs propres des matrices de Cartan  $q$ -déformées au sens de Givental.

Ce chapitre est tiré de l'article *Vanishing cycles and Cartan eigenvectors*, co-écrit avec R. Ramazashvili, V. Schechtman et A. Varchenko, [BRSV].

### Expression des vecteurs propres des matrices de Cartan de $D_4, E_6$ et $E_8$ .

Dans la première partie du Chapitre 2, nous donnons une expression des vecteurs propres des matrices de Cartan des systèmes de racines  $D_4, E_6$  et  $E_8$ .

Cette nouvelle méthode de calcul utilise le lien entre les matrices de Cartan et Coxeter (déjà évoqué dans le paragraphe précédent) mais aussi et surtout une décomposition de

ces systèmes de racines issue de la théorie des singularités :

$$\begin{aligned} D_4 &= A_2 \star A_2 \star A_1 \\ E_6 &= A_3 \star A_2 \star A_1 \\ E_8 &= A_4 \star A_2 \star A_1. \end{aligned}$$

L'idée de la méthode est de ramener le calcul des vecteurs propres des matrices de Cartan de  $D_4, E_6$  et  $E_8$  aux calculs de vecteurs propres de matrices de Cartan de systèmes de racines plus petits  $(A_1, \dots, A_4)$ .

Ici,  $\star$  désigne le produit de Sebastiani – Thom dont la définition est donnée dans le Chapitre 3. En quelques mots, le réseau de racines  $A \star B$  est le produit tensoriel des réseaux de racines  $A$  et  $B$ .

Les rappels de théorie des singularités donnés dans le Chapitre 2, sont l'occasion d'évoquer les notions de *cycles évanescents* et de *bases distinguées*. L'étude de l'ensemble des bases distinguées de racines sous l'action des transformations de Gabrielov fait l'objet du Chapitre 4.

Ces transformations, aussi appelées transformations de Gabrielov – Picard – Lefschetz, nous les introduirons dès le Chapitre 2 car elles jouent un rôle clé dans le calcul des vecteurs propres. Elles permettent le passage du réseau décomposé, par exemple  $A_4 \star A_2 \star A_1$ , au système de racines simples, ici  $E_8$ . Nous détaillerons les cas de  $E_8$  et donnerons seulement les grandes lignes des calculs dans le cas des systèmes de racines  $E_6$  et  $D_4$ .

**Matrices de Cartan  $q$ -déformées.** Dans l'article [Giv], A. Givental propose une version  $q$ -déformée de la théorie de Picard – Lefschetz. Nous nous en sommes inspirés pour  $q$ -déformer les matrices de Cartan.

Notons  $A$  une matrice de Cartan, alors  $A$  peut s'écrire

$$A = L + U$$

où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure et  $U$  une matrice triangulaire supérieure telle que  $L_{ii} = U_{ii}$  pour tout  $i$ . Alors la matrice de Cartan  $q$ -déformée est la matrice

$$A(q) = qL + U$$

pour un paramètre  $q \in \mathbb{C}$ . Nous déterminons le spectre de  $A(q)$  à partir du spectre de  $A$  et montrons que les coordonnées des vecteurs propres de  $A(q)$  sont obtenues à partir de celles des vecteurs propres de  $A$  en les multipliant par des puissances de  $q$  appropriées.

## Systèmes de Toda $q$ -déformés.

Dans ce troisième chapitre, nous proposons une  $q$ -déformation, au sens de Givental comme dans le chapitre précédent, des équations de Toda affines réelles et complexes.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à des relations de commutations impliquant les matrices de Cartan  $q$ -déformées. Puis, nous utilisons la méthode de Hirota pour construire des 1-solitons solutions des équations complexes  $q$ -déformées.

Dans ce chapitre, nous nous restreignons au système de racines  $A_n$ .

**Équations de Toda, cas réel.** Dans la première partie du Chapitre 3, nous nous intéressons aux équations de la théorie de Toda affine dans le cas réel :

$$\square\phi + \frac{m^2}{\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(\beta(\alpha^\vee \cdot \phi)) = 0.$$

Nous introduisons alors deux opérateurs  $M$  et  $\tilde{M}$  inspirés de l'opérateur de masses du Chapitre 1,

$$\begin{aligned} \tilde{M} : \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^r &\rightarrow \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \\ (B, n) &\longmapsto D = (d_{ij}) \end{aligned}$$

avec

$$d_{ij} = n_j (e^{\beta b_{ji}} - e^{-\beta \sum_{p=1}^r n_p b_{pi}})$$

et  $M$  est l'approximation linéaire de  $\tilde{M}$ . Notre objectif dans ce début de chapitre est d'étudier des relations de commutations impliquant les opérateurs  $M$  et  $\tilde{M}$  et la matrice de Cartan  $q$ -déformée déjà introduite plus haut,  $A(q)$ .

**Équations de Toda, cas complexe.** Dans un deuxième temps, nous proposons une version  $q$ -déformée des équations de la théorie de Toda affine complexe :

$$\square\phi = -\frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(i\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)_{(q)}).$$

Ici,  $(\cdot)_{(q)}$  est le produit scalaire  $q$ -déformé (qui n'est en fait pas un produit scalaire!) obtenu à partir de la matrice de Cartan  $q$ -déformée. Plus précisément, c'est l'application bilinéaire définie sur  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  par  $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{(q)} = A(q)_{ij}$ .

Pour ces équations, nous adaptons la méthode de Hirota décrite dans l'article de R. Hollowood ([Hol]) afin de construire des 1-solitons  $q$ -déformés. Nous obtenons ainsi une solution aux équations de Toda affine complexe  $q$ -déformées de la forme

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \ln(\tau_{j,a}(x, t))$$

où les fonctions  $\tau_{j,a}$  sont de la forme

$$\tau_{j,a}(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x-v_a t)} \epsilon^k \in \mathfrak{h}[[\epsilon]].$$

$a$  désigne un exposant de  $A_r$ , c'est à dire  $1 \leq a \leq r$ .  $\sigma_a$  et  $v_a$  sont deux constantes qui vérifient une équation de dispersion  $q$ -déformée. Les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  sont des fractions rationnelles en  $q$ , mais nous montrons également que  $c_{j,a}^{(k)} \in \mathbb{Q}[\zeta]$ ,  $\zeta = e^{\frac{i\pi}{r+1}}$ . Nous les calculons explicitement pour  $k = 1, 2$  dans le cas de  $A_2$ .

La question de l'existence de  $N$ -solitons pour  $N \geq 2$  reste posée.

**$q$ -déformation des masses.** Un autre point qui a suscité notre intérêt est la  $q$ -déformation des masses de particules. Nous avons déjà évoqué dans la description du Chapitre 1, un opérateur de masses. Rappelons que les coordonnées d'un vecteur propre de Perron – Frobenius de la matrice de Cartan sont égales aux racines carrées des valeurs propres de cet opérateur.

Il se trouve que l'opérateur  $M$  introduit plus haut, est en quelque sorte une généralisation de cet opérateur de masses. En effet, les valeurs propres de la matrice  $M(A, n)$ , où  $A$  est la matrice de Cartan d'un système de racines  $R$  et  $n = (n_1, \dots, n_r)$  est le vecteur tel que la plus longue racine  $\theta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$ , sont également proportionnelles aux carrés des coordonnées du vecteur propre de Perron – Frobenius. Dans le cas du système de racines  $A_n$ , ces masses sont bien connues :

$$m_k = \sin\left(\frac{k\pi}{r+1}\right), \text{ pour } 1 \leq k \leq r.$$

Nous nous sommes donc naturellement intéressés aux valeurs propres de la matrice  $M(A(q), n)$ , lorsque  $A(q)$  est la matrice de Cartan  $q$ -déformée du système de racines  $A_n$  et avons trouvé une expression des masses  $q$ -déformées,  $m_k(q)$ .

Par ailleurs, T. Hollowood, toujours dans l'article [Hol], a montré que le calcul d'une intégrale dépendant des 1-solitons solutions des équations de Toda affine complexe aboutissait à l'expression des masses  $m_k$ . Il serait intéressant de savoir si le calcul d'une intégrale similaire à partir des 1-solitons  $q$ -déformés que nous avons calculés dans ce Chapitre 3 mènerait à l'expression des masses  $q$ -déformées  $m_k(q)$ . Cette question reste ouverte.

## Bases de racines et mutations

Dans ce dernier chapitre, nous revenons sur les transformations de Gabrielov – Picard – Lefschetz et sur la notion de base distinguée aperçues dans le Chapitre 2. Pour un système de racines  $R$  simplement enlacé, nous étudions donc l'ensemble des bases ordonnées de racines  $\mathcal{B}(R)$  et le sous-ensemble des bases distinguées qui est l'orbite d'une base de racines simples fixée  $e$  pour l'action des transformations de Gabrielov. Le groupe de Weyl agit également sur ces ensembles et les transformations de Coxeter jouent à nouveau un rôle essentiel dans cette étude.

**Ensemble des bases distinguées.** Si la définition géométrique des bases distinguées est évoquée dans le Chapitre 2, c'est ici la définition algébrique qui nous intéresse. Cette

définition équivalente est liée à la bijection entre le réseau de racines  $Q(R)$ , et le réseau de cycles évanescents. Si  $e$  est une base de racines simples de  $R$  fixée, l'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$  est l'orbite de  $e$  pour l'action des mutations, c'est à dire, les applications  $\mu_i$  définies par

$$\mu_i(\{x_1, \dots, x_\ell\}) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, s_{x_i}(x_{i+1}), x_i, x_{i+2}, \dots, x_\ell\}$$

pour  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , où  $\ell$  est le rang de  $R$ . Ces mutations font parties de plusieurs transformations que l'on peut trouver dans un article de Gabrielov, [Gab]. Nous montrons que ces mutations induisent une action du groupe de tresses  $Br_\ell$  sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$ .

**Action des mutations et du groupe de Weyl.** Les transformations  $\mu_i$  et le groupe de Weyl agissent sur l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(R)$ , et ces deux actions commutent. L'étude de ces deux actions conduit à l'un des principaux résultats de ce chapitre : l'action conjointe des mutations et de  $W$  sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$  des bases de racines est transitive.

La démonstration de ce résultat passe par l'étude des transformations de Coxeter. En effet, elle met en relation un générateur bien connu du centre de  $Br_\ell$ ,  $(\mu_1 \dots \mu_{\ell-1})^\ell$  et les pseudo-éléments de Coxeter en s'inspirant des travaux de Brieskorn, [Bri]. Rappelons que le pseudo-élément de Coxeter associé à une base  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$  est la transformation de Coxeter définie par  $c_x = s_{x_1} \dots s_{x_\ell}$ .

Par ailleurs, à chaque orbite  $\mathcal{O}_k$  pour l'action des mutations sur  $\mathcal{B}(R)$ , nous pouvons associer une unique transformation de Coxeter. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B}(R)/Br_\ell &\rightarrow \mathcal{T}_c \\ \mathcal{O}_k &\longmapsto c_x \text{ où } x \in \mathcal{O}_k \end{aligned}$$

est bijective.

Nous profitons également de cette étude sur les transformations de Coxeter, associée à l'action des mutations, pour déterminer le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{B}d$  en utilisant les travaux de Deligne, [Del].

**Matrices de Gabrielov.** Pour terminer ce chapitre et cette thèse, nous associons à chaque base distinguée une matrice et un graphe étiqueté, de la même manière que les matrices de Cartan et les diagrammes de Dynkin pour les bases de racines simples. Les mutations induisent une action sur ces ensembles de matrices et de graphes, notés  $\mathcal{M}at(\mathcal{B}d)$  et  $\mathcal{G}(\mathcal{M}at(\mathcal{B}d))$ . Nous étudions ces deux ensembles.

En commençant par les graphes, nous montrons que tous les graphes de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}at(\mathcal{B}d))$  sont connexes. Ce constat permet de montrer que toutes les matrices de  $\mathcal{M}at(\mathcal{B}d)$  sont des matrices de Gabrielov, c'est à dire des matrices à coefficients dans  $\{-1, 0, 1\}$  à l'exception des coefficients diagonaux qui sont égaux à 2. Par exemple, la matrice de Cartan d'un système de racines simplement enlacé est une matrice de Gabrielov.

Nous terminons par la recherche d'un critère nous permettant de déterminer si une matrice de Gabrielov est la matrice d'une base distinguée. Le déterminant semble être un bon critère dans le cas du système de racines  $A_n$ , il serait intéressant de confirmer cette conjecture par une démonstration.





# Prérequis

Avant de débiter, rappelons quelques résultats sur les algèbres de Lie simples et leur système de racines. Dans cette thèse, nous travaillons avec des algèbres de Lie simples, complexes et de dimension finie. La plupart des définitions et propriétés de ce chapitre sont issues du livre de Bourbaki, [Bou].

## Algèbres de Lie semi-simples

### Définitions

**Définition.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Le crochet de Lie est une loi de composition bilinéaire, antisymétrique et qui vérifie la relation de Jacobi :

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{g}, [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

Dans toute la suite,  $\mathfrak{g}$  désigne une algèbre de Lie complexe, de dimension finie.

**Définition.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie.

—  $\mathfrak{a}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  si  $\mathfrak{a}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  et

$$\forall x \in \mathfrak{a}, \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] \in \mathfrak{a}$$

—  $\mathfrak{g}$  est dite simple, si elle ne contient pas d'idéaux propres, c'est à dire, autre que  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ .

—  $\mathfrak{g}$  est dite semi-simple, si

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^p \mathfrak{g}_i$$

avec  $\mathfrak{g}_i$  une algèbre de Lie simple pour tout  $i$ .

### Critère de semi-simplicité

Donnons une autre définition des algèbres de Lie semi-simples à l'aide du critère de semi-simplicité de Cartan.

Pour tout élément  $x \in \mathfrak{g}$ , nous pouvons définir un endomorphisme adjoint sur  $\mathfrak{g}$ , noté  $ad_x$  et défini par

$$\forall y \in \mathfrak{g}, ad_x(y) = [x, y].$$

Comme  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie, nous pouvons définir une forme bilinéaire symétrique, appelée forme de Killing.

**Definition.** La forme de Killing associée à  $\mathfrak{g}$  est la forme bilinéaire symétrique donnée par :

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto \text{Tr}(ad_x \circ ad_y).$$

La forme de Killing permet de donner une définition équivalente à la notion d'algèbre de Lie semi-simples.

**Théorème.** (*Critère de semi-simplicité de Cartan - 1894*) Une algèbre de Lie de dimension finie  $\mathfrak{g}$  sur un corps de caractéristique nulle est semi-simple si et seulement si la forme de Killing est non-dégénérée.

## Sous-algèbre de Cartan

Les sous-algèbres de Cartan jouent un rôle important dans cette thèse, en particulier dans le Chapitre 1.

**Definition.** Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ .  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan si

- $\mathfrak{h}$  est nilpotente, c'est à dire,  $[\dots [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\dots] = 0$ .
- $N(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$ .

**Proposition.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Cartan.

Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, alors  $\mathfrak{h}$  est abélienne, c'est à dire

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0.$$

Terminons ce paragraphe sur les sous-algèbres de Cartan par une propriété utilisée dans le Chapitre 1. Introduisons  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  engendré par  $\exp(ad_x)$  pour  $x \in \mathfrak{g}$ . Nous avons alors le résultat suivant :

**Proposition.** Toutes les sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  sont conjuguées dans  $\text{Int}(\mathfrak{g})$ .

## Systèmes de racines

Dans cette thèse, notre intérêt s'est porté sur plusieurs aspects des systèmes de racines des algèbres de Lie simples. Expliquons d'abord ce que sont les systèmes de racines avant de voir le lien avec les algèbres de Lie, et plus particulièrement avec les sous-algèbres de Cartan.

## Système de racines et groupe de Weyl

**Definition.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel. Nous appelons système de racines réduit dans  $V$  un sous-ensemble  $R$  de  $V$  qui vérifie :

1.  $R$  est fini et engendre  $V$
2. Pour tout  $\alpha \in R$ , il existe  $\alpha^\vee \in V^*$  tel que  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  et l'application  $s_\alpha : V \rightarrow V$  définie par  $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$  transforme  $R$  en  $R$ .
3. Pour tout  $\alpha \in R$ ,  $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$ .
4. Si  $\alpha \in R$ ,  $2\alpha \notin R$ .

Les éléments de  $R$  s'appellent les racines. La dimension de  $V$  s'appelle le rang du système de racines.

**Remarque.**  $s_\alpha$ , pour  $\alpha \in R$  est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à  $\alpha$ .

**Definition.** Un système de racines  $R$  est irréductible si  $R \neq \emptyset$  et si  $R$  n'est pas somme directe de deux systèmes de racines non vides.

**Remarque.** Tout système de racines réduit  $R$  est somme directe de systèmes de racines irréductibles réduits bien déterminés à permutation près.

**Definition.** Soit  $R$  un système de racines. Pour  $\alpha \in R$ , les réflexions  $s_\alpha$  engendrent un sous-groupe  $W(R)$  du groupe des automorphismes de  $V$  qui laissent stable  $R$ , appelé groupe de Weyl de  $R$ .

**Definition.** Soit  $R$  un système de racines de rang  $r$ . Une transformation de Coxeter  $c$  est un produit de  $r$  réflexions,

$$c = s_1 \dots s_r,$$

telle que  $s_1, \dots, s_r$  engendrent le groupe de Weyl  $W(R)$ .

**Proposition.** *Toutes les transformations de Coxeter de  $W$  sont conjuguées dans  $W$ .*

Par conséquent, toutes les transformations de Coxeter sont du même ordre. Cet ordre est noté  $h$  et est appelé le nombre de Coxeter.

**Exemple.** Dans le cas du système de racines  $A_{n-1}$ ,  $n \geq 3$ , le groupe de Weyl  $W$  est isomorphe au groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , noté  $\mathfrak{S}_n$ . Les transformations de Coxeter sont alors les  $n$ -cycles, qui sont d'ordre  $n$ , le nombre de Coxeter.

## Lien entre les sous-algèbres de Cartan et les systèmes de racines

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan fixée, alors il existe un système de racines irréductible  $R \subset \mathfrak{h}^*$  tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

où  $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h).x\}$  est l'espace racine associé à la racine  $\alpha \in R \subset \mathfrak{h}^*$ . Pour tout  $\alpha \in R$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha$  est de dimension 1.

Les algèbres de Lie simples peuvent donc être classifiées par leur système de racines. La liste des systèmes de racines est :

$$A_\ell (\ell \geq 1), B_\ell (\ell \geq 2), C_\ell (\ell \geq 2), D_\ell (\ell \geq 3), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.$$

### Système de racines et matrice de Cartan.

**Proposition.** *Si  $R$  est un système de racines irréductible, il existe un unique, à multiplication par une constante près, produit scalaire  $\langle x \cdot y \rangle$  invariant par  $W(R)$ .*

Ce produit scalaire permet d'identifier  $V$  à  $V^*$  et nous avons alors  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ . Pour  $\alpha, \beta \in R$ , posons

$$n(\alpha, \beta) := \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha \cdot \beta)}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Considérons  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  une base de racines simples de  $R$ , c'est à dire une base telle que les coordonnées dans cette base de toute racine  $\alpha \in R$  sont soit toutes positives (auquel cas, nous disons que la racine est positive) soit toutes négatives (racine négative).

**Definition.** Notons  $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$ . La matrice  $(n_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$  s'appelle la matrice de Cartan de  $R$ .

**Proposition.** *Les coefficients de la matrice de Cartan d'un système de racines  $R$  vérifient :*

1.  $\forall i \in \ell, n_{ii} = 2$ .
2.  $\forall i \neq j, n_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$

*De plus, si deux systèmes de racines ont la même matrice de Cartan, alors ils sont isomorphes.*

Les systèmes de racines de type  $A, D$  et  $E$  sont qualifiés de simplement enlacés. Leur particularité est d'avoir toutes leurs racines de la même longueur ( $\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ ), et leur matrice de Cartan est symétrique.

### Diagramme de Dynkin d'un système de racines $R$

Soit  $R$  un système de racines irréductible, et  $A(R)$  sa matrice de Cartan. Nous pouvons construire le diagramme de Dynkin de  $R$  de la façon suivante :

1. Il y a un sommet  $i$  pour chaque racine simple  $\alpha_i$ .
2. Si  $n_{ij} = n_{ji} = -1$  alors nous traçons une arête entre  $i$  et  $j$ .
3. Si  $|n_{ij}| > |n_{ji}|$ , alors il faut tracer  $|n_{ij}|$  arêtes entre les sommets  $i$  et  $j$  ainsi qu'une flèche allant de  $j$  à  $i$ .

À la fin du livre de Bourbaki, [Bou], se trouvent une série de planche résumant les caractéristiques des systèmes de racines. En particulier, il est possible de trouver une base de racines simples, la matrice de Cartan et le diagramme de Dynkin.

# Corps de la thèse



# Chapitre 1

## Élément de Coxeter et masses de particules

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>32</b>
<b>1.2</b>	<b>Élément principal et sous-algèbres de Cartan en apposition</b>	<b>33</b>
1.2.1	Notations	33
1.2.2	Élément principal et gradation principale	34
<b>1.3</b>	<b>Sous-algèbres en apposition et éléments de Coxeter</b>	<b>35</b>
1.3.1	Sous-algèbres de Cartan en apposition	35
1.3.2	Élément de Coxeter	36
<b>1.4</b>	<b>Opérateur diagonalisable</b>	<b>36</b>
<b>1.5</b>	<b>Élément de Coxeter et matrice de Cartan</b>	<b>38</b>
1.5.1	Élément de Coxeter et Matrice de Cartan	38
1.5.2	Spectre et vecteurs propres	39
1.5.3	Action de l'élément de Coxeter sur les racines	42
<b>1.6</b>	<b>Involution de Cartan et forme hermitienne</b>	<b>42</b>
1.6.1	Définitions d'une involution et d'une forme hermitienne.	42
1.6.2	Les valeurs propres de $ad_x ad_{x^*}$ .	43
<b>1.7</b>	<b>Démonstration du Théorème principal</b>	<b>44</b>
<b>1.8</b>	<b>Équations de Toda affines</b>	<b>47</b>
<b>1.9</b>	<b>Perspectives, motifs dans les vecteurs propres de la matrice de Cartan</b>	<b>48</b>
1.9.1	Description des motifs	48
1.9.2	Exemple	49

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre intérêt s'est porté sur un résultat découvert par des physiciens [BCDS], [Fre1], [FLO]. Leur théorème affirme que les masses des particules dans la théorie des champs de Toda affine sont égales aux coordonnées du vecteur propre de Perron – Frobenius de la matrice de Cartan  $A$ . Nous allons revenir sur la preuve de ce résultat afin de le généraliser.

Nous écrivons des équations différentielles, similaires à celles de Toda, dont les masses des particules sont les valeurs absolues des coordonnées de des autres vecteurs propres de  $A$ .

Introduisons  $A = ((\alpha_i, \alpha_j^\vee))_{1 \leq i, j \leq r}$ , la matrice de Cartan d'un système de racines  $R \subset \mathfrak{h}^*$ , correspondant à une algèbre de Lie complexe, simple et de dimension finie  $\mathfrak{g}$  et une sous-algèbre de Cartan fixée  $\mathfrak{h}$ . Notons  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$  les exposants de  $R$ . Dans ce chapitre et pour plus de clarté, nous supposons que  $R$  n'est pas du type  $D_{2n}$ , afin d'éviter le cas où l'un des exposants est de multiplicité 2. Les valeurs propres de la matrice de Cartan sont

$$\lambda_i = 2 - 2 \cos(k_i \theta), \quad \text{avec } \theta = \frac{\pi}{h} \quad (1.1)$$

où  $h = r + 1$  est le nombre de Coxeter de  $R$ . Dans la partie §1.6, nous définissons  $*$  :  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ , une involution de Cartan antilinéaire et  $H(x, y) = (x, y^*)$  la forme hermitienne correspondante,  $(\ , \ )$  étant la forme de Killing.

Le principal résultat de ce chapitre (voir Théorème 15) est la construction d'une famille d'opérateurs hermitiens

$$M^{(i)} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r$$

qui commutent entre eux, et tels que pour tout  $i$ , les valeurs propres  $\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_r^{(i)}$  de  $M^{(i)}$  forment, dans un ordre approprié, un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ .

Il s'avère que la définition de ces opérateurs est plutôt simple, nous en donnons ici les grandes lignes, les détails seront présentés par la suite. Considérons un *élément cyclique*, au sens de Kostant [Kos2],

$$e = \sum_{i=0}^r c_i e_i, \quad c_i \neq 0,$$

où  $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ , et  $\alpha_0 := -\theta$ ,  $\theta$  étant la plus longue racine. Le centralisateur  $Z(e)$  de l'élément  $e$  est une sous-algèbre de Cartan, notée  $\mathfrak{h}'$ , dont nous dirons, toujours d'après Kostant, qu'elle est *en apposition* avec  $\mathfrak{h}$ .

Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{h-1} \mathfrak{g}_i$  la gradation principale (voir §1.2.2). Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , les espaces  $\mathfrak{h}'^{(i)} := \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{k_i}$  sont de dimension 1. Soit  $e^{(i)}$  un vecteur non nul de  $\mathfrak{h}'^{(i)}$ , par exemple  $e^{(1)} = e$ . Les opérateurs  $ad_{e^{(i)}} ad_{e^{(i)*}}$  préservent  $\mathfrak{h}$ , notons  $\tilde{M}^{(i)}$  la restriction de cet endomorphisme sur  $\mathfrak{h}$ . Par définition,  $M^{(i)}$  est l'une des racines carrées de  $\tilde{M}^{(i)}$ .

Le lien avec les vecteurs propres de  $A$  provient d'une relation bien connue entre  $A$  et la transformation de Coxeter  $c$ , relation que l'on doit à Coxeter, [Cox] (1.5), (1.7). Ce



résultat est rappelé dans le paragraphe 1.5 ci-dessous. L'élément de Coxeter joue un rôle important dans plusieurs domaines de la Théorie des représentations, cf. [BGP].

Le vecteur propre  $p \in \mathfrak{h}^*$  pour la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  est appelé *vecteur de Perron - Frobenius*. L'assertion affirmant que les valeurs propres de  $M^{(1)}$  coïncident avec les coordonnées de  $p$  a été prouvée dans [Fre1], et [FLO], une généralisation pour  $i > 1$  est donnée par la suite. Ajoutons que les coordonnées de  $p$  ont un remarquable sens en physique, voir [Cor]. Par ailleurs, il existe une mystérieuse formule les exprimant comme un produit de valeurs de la fonction Gamma, voir [CAS].

Dans la dernière partie, §1.9, nous décrivons des motifs dans les coordonnées des vecteurs propres. Plus précisément, il y a exactement  $\phi(h)$  vecteurs de *type PF*, c'est à dire, dont les coordonnées sont, au signe près, une permutation de celles du vecteur de Perron - Frobenius. Les composantes non nulles des autres vecteurs propres se répartissent en plusieurs *groupes*, chaque groupe correspond aux coordonnées d'un vecteur de Perron - Frobenius d'un sous-système  $R' \subset R$  dont le nombre de Coxeter  $h'$  divise  $h$ .

## 1.2 Élément principal et sous-algèbres de Cartan en apposition

Débutons par quelques notations avant de commencer à introduire les outils nécessaires à la preuve du Théorème 15.

### 1.2.1 Notations

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe, de dimension finie, notons  $(\ , \ )$  la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ . Fixons une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  et notons  $R \subset \mathfrak{h}^*$  un système de racines de  $\mathfrak{g}$  par rapport à  $\mathfrak{h}$ , muni d'une base de racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset R$ . Nous avons alors la décomposition suivante de  $\mathfrak{g}$  :

$$\mathfrak{g} = \left( \bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

Pour tout racine  $\alpha = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i$ , la hauteur de  $\alpha$  est définie par

$$\text{ht } \alpha = \sum_{i=1}^r m_i.$$

Notons également  $\theta$ , la plus longue racine de  $R$ ,

$$\theta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

et posons  $\alpha_0 = -\theta$  et  $n_0 = 1$ . Le nombre

$$h = \sum_{i=0}^r n_i = 1 + \text{ht } \theta$$

est le nombre de Coxeter de  $\mathfrak{g}$ . Posons  $\zeta = \exp(\frac{2i\pi}{h})$ .

Pour tout  $\alpha \in R$ , considérons un vecteur  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ .

La forme de Killing  $(\ , \ )$  induit un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $\mathfrak{h}$ . Elle permet d'identifier  $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ , et toutes les racines peuvent être considérées comme des éléments de  $\mathfrak{h}$ . Donc,

$$[h, x] = (h, \alpha)x, \text{ avec } \alpha \in R, x \in \mathfrak{g}_\alpha.$$

Pour  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $Z(x) = \mathfrak{g}^x$  désigne le centralisateur de  $x$ .

Soit  $G$  le groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire, la fermeture de Zarisky du sous-groupe  $G \subset GL(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $e^{ad_x}$  pour  $x \in \mathfrak{g}$ . Nous disposons alors de l'application exponentielle

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G.$$

Pour  $g \in G$  et  $x \in \mathfrak{g}$ , le résultat de l'action de  $g$  sur  $x$  sera noté  $Ad_g(x)$ . Si  $\mathfrak{g}$  se réalise comme une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de matrices, alors

$$Ad_{exp(y)}(x) = e^y x e^{-y}. \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Élément principal et gradation principale

Introduisons un élément  $\rho^\vee$  de  $\mathfrak{h}$ , défini par

$$\langle \alpha_i, \rho^\vee \rangle = 1, \text{ pour } 1 \leq i \leq r.$$

**Remarque.** Une autre définition de  $\rho^\vee$  est :

$$\rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha^\vee \in R_{>0}^\vee} \alpha^\vee$$

où  $R^\vee \subset \mathfrak{h}$  est le système de racines dual.

Naturellement, pour toute racine  $\alpha \in R$ ,  $\langle \alpha, \rho^\vee \rangle = \text{ht } \alpha$ . Nous introduisons à présent,

$$P = \exp\left(\frac{2i\pi\rho^\vee}{h}\right) \in G.$$

$P$  est un élément principal de  $G$  et, pour tout  $\alpha \in R$ ,  $Ad_P(E_\alpha) = \zeta^{\text{ht } \alpha} E_\alpha$ . Par conséquent,  $Ad_P$  définit une  $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$ ,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^{h-1} \mathfrak{g}_k, \text{ où } \mathfrak{g}_k = \{x \in \mathfrak{g} \mid Ad_P(x) = \zeta^k x\}.$$

Nous avons  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  et l'ensemble  $\{E_{\alpha_0}, E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_r}\}$  est une base de  $\mathfrak{g}_1$ .

**Remarque.**  $\text{ht } \alpha_0 = -\text{ht } \theta = 1 - h$ , donc  $Ad_P(E_{\alpha_0}) = \zeta E_{\alpha_0}$ .

### 1.3 Sous-algèbres en apposition et éléments de Coxeter

Nous venons de définir un élément principal  $P = \exp\left(\frac{2i\pi\rho^\vee}{h}\right) \in G$ . Nous allons à présent définir une deuxième sous-algèbre de Cartan,  $\mathfrak{h}'$ , que Kostant appelle *la sous-algèbre de Cartan en apposition avec  $\mathfrak{h}$  par rapport à  $P$*  dans ses travaux [Kos2].

Puis, après avoir rappelé la définition d'un élément de Coxeter, nous évoquons un autre résultat de Kostant : l'image de  $P$  dans le groupe de Weyl  $W'$  du système de racines  $R'$  de  $\mathfrak{h}'$  est un élément de Coxeter.

#### 1.3.1 Sous-algèbres de Cartan en apposition

Fixons des nombres complexes  $m_i, m'_i$  tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $m_i m'_i = n_i$  et  $m_0 = m'_0 = 1$ . Nous définissons alors deux éléments  $E$  et  $\tilde{E}$  de la façon suivante :

$$E = \sum_{i=0}^r m_i E_{\alpha_i}, \quad \tilde{E} = \sum_{i=0}^r m'_i E_{-\alpha_i}.$$

Observons que  $E \in \mathfrak{g}_1$  et  $\tilde{E} \in \mathfrak{g}_{h-1}$ .

**Lemme 1.**  $[E, \tilde{E}] = 0$ .

Kostant appelle  $E$  et  $\tilde{E}$  des éléments *cycliques*. Ils sont notés  $z_0$  et  $\tilde{z}_0$  dans [Kos2], Théorème 6.7. Toujours suivant les travaux de Kostant, nous définissons ensuite le sous-espace

$$\mathfrak{h}' = Z(E) = Z(\tilde{E}) \subset \mathfrak{g}$$

Il est prouvé dans [Kos2], Théorème 6.7, que  $\mathfrak{h}'$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , appelée *la sous-algèbre de Cartan en apposition avec  $\mathfrak{h}$  par rapport à l'élément principal  $P$* .

Le sous-espace  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_i$  est non vide si et seulement si  $i \in \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$  où  $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_r = h-1$  sont les exposants de  $\mathfrak{g}$ . Rappelons que nous avons,  $k_i + k_{r+1-i} = h$ .

Posons, pour  $1 \leq i \leq r$ ,

$$\mathfrak{h}'^{(i)} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{k_i},$$

ce sont des sous-espaces de dimension 1. Le tore maximal correspondant à  $\mathfrak{h}'$  est noté  $T' = \exp(\mathfrak{h}') \subset G$ .

**Lemme 2.** *L'élément principal  $P$  appartient au normalisateur du tore  $T'$ , noté  $N_{T'}$ .*

*Démonstration.* En effet, si  $x \in \mathfrak{h}'$ , c'est à dire,  $[x, E] = 0$ , alors

$$0 = [Ad_P(x), Ad_P(E)] = \zeta [Ad_P(x), E]$$

Par conséquent,  $Ad_P(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h}'$  ou, en d'autres termes,  $P \in N_{T'}$ . □

Notons  $R' \subset \mathfrak{h}'^*$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  par rapport à  $\mathfrak{h}'$  et  $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}'^*$  le sous-espace réel, linéaire, engendré par  $R'$ .

Rappelons que l'ensemble des bases (non ordonnées) de racines simples de  $R'$  est en bijection avec l'ensemble des chambres, c'est à dire, les composantes connexes de l'ensemble

$$\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha' \in R'} \alpha'^{\perp}.$$

L'ensemble des bases est un  $W'$ -torseur, où  $W'$  est le groupe de Weyl de  $R'$ .

### 1.3.2 Élément de Coxeter

**Definition 3.** Un *élément de Coxeter* dans  $W'$  est une transformation de la forme

$$c = s_{\alpha'_1} \cdots s_{\alpha'_r}$$

où  $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_r\} \subset R'$  est une base de racines simples.

Tous les éléments de Coxeter sont conjugués, [Bou], Ch. V, §6, Prop. 1.

**Théorème 4** (Kostant). *L'image de  $P$  dans  $N_{T'}/T' = W'$  est un élément de Coxeter.*

*Démonstration.* Voir [Kos2], Corollaire 8.6.  $\square$

Comme l'a montré Kostant, à partir d'une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}'$  et d'un élément de Coxeter  $c \in W(\mathfrak{h}')$  quelconque, il est possible de reconstruire  $\mathfrak{h}$ . Nous utiliserons cette remarque dans le paragraphe §1.7 ci-dessous.

Finalement, nous avons

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^P = \{x \in \mathfrak{g} \mid Ad_P(x) = x\}$$

et

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}^E = \{x \in \mathfrak{g} \mid Ad_E(x) = [E, x] = 0\}$$

Donc,

$$E \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_1 \text{ et } \tilde{E} \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{h-1}$$

Il s'ensuit que  $E$  (respectivement  $\tilde{E}$ ) est un vecteur propre de  $c$  pour la valeur propre  $\zeta$  (resp.  $\zeta^{-1}$ ).

## 1.4 Opérateur diagonalisable

Nous venons de voir que  $Ad_P$  laisse stable la sous-algèbre  $\mathfrak{h}'$  et induit l'action d'un élément de Coxeter  $c \in W'$  sur  $\mathfrak{h}'$ ,

$$W' = N_{T'}/T' \cong N_{\mathfrak{h}'}/\mathfrak{h}'$$

Rappelons également que l'ordre de  $c$  dans  $W'$  est égal à  $h$ , le nombre de Coxeter.

Considérons deux éléments  $x \in \mathfrak{g}_m \cap \mathfrak{h}'$  et  $y \in \mathfrak{g}_{-m} \cap \mathfrak{h}'$ ,  $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ . Dans cette partie, nous nous intéressons à l'opérateur  $ad_y ad_x$ . Plus particulièrement, nous montrons qu'il est diagonalisable et donnons ses valeurs propres. La démonstration utilise l'action de  $c$  sur  $R'$ .

**Choix de vecteurs racines.**

**Proposition 5.** *Il existe des vecteurs racines non nuls  $e_{\alpha'} \in \mathfrak{g}_{\alpha'}$  de telle sorte que*

$$Ad_P(e_{\alpha'}) = e_{c(\alpha')}$$

pour tout  $\alpha' \in R'$ .

*Démonstration.* [Kos2], Théorème 8.4. □

**Orbites pour l'action de  $c$  sur  $R'$ .** D'après Kostant, [Kos2], l'action de  $c$  partitionne  $R'$  en  $r$  orbites, notées  $\Omega'_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , et chacune d'elle est de cardinal  $h$ ,

$$R' = \bigsqcup_{i=1}^r \Omega'_i. \quad (1.3)$$

La notation prime est utilisée pour rappeler que ces orbites sont dans  $R' \subset \mathfrak{h}'^*$ .

**Remarque.** Nous pouvons en déduire que  $|R'| = \dim \mathfrak{g} - r = h \times r$ , autrement dit :

$$\dim \mathfrak{g} = h \times (r + 1)$$

**Exemple.** Pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ,  $r = n - 1$ ,  $h = n$  et  $\dim \mathfrak{g} = n^2 - 1$ .

Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , nous définissons, tout comme Kostant, un élément

$$a_i = \sum_{\alpha' \in \Omega'_i} e_{\alpha'}$$

D'après la Proposition 5, nous avons  $Ad_P(a_i) = a_i$ . En d'autres termes,  $a_i \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^P$ . D'après Kostant, [Kos2] Théorème 8.4,  $\{a_1, \dots, a_r\}$  est une base de  $\mathfrak{h}$ .

Notons  $\gamma_i \in \Omega'_i$  un représentant de l'orbite  $\Omega'_i$ , en d'autres termes

$$\Omega'_i = \{c^k(\gamma_i) \mid k = \{0, \dots, h - 1\}\}.$$

Pour tout  $x \in \mathfrak{g}_m \cap \mathfrak{h}'$ ,  $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ , nous avons (voir [Fre1]) :

$$[x, e_{c^k(\gamma_i)}] = \zeta^{-km} \langle \gamma_i, x \rangle e_{c^k(\gamma_i)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} [x, e_{c^k(\gamma_i)}] &= [x, Ad_P^k(e_{\gamma_i})] = Ad_P^k[Ad_P^{-k}(x), e_{\gamma_i}] \\ &= \zeta^{-km} Ad_P^k[x, e_{\gamma_i}] = \zeta^{-km} Ad_P^k(\langle \gamma_i, x \rangle e_{\gamma_i}) \\ &= \zeta^{-km} \langle \gamma_i, x \rangle e_{c^k(\gamma_i)} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que pour tout  $y \in \mathfrak{g}_{-m} \cap \mathfrak{h}'$ ,

$$[y, [x, e_{c^k(\gamma_i)}]] = \langle \gamma_i, y \rangle \langle \gamma_i, x \rangle e_{c^k(\gamma_i)}$$

En sommant sur  $k$ , nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 6.** *Pour tout  $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathfrak{g}_m \cap \mathfrak{h}'$ ,  $y \in \mathfrak{g}_{-m} \cap \mathfrak{h}'$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,*

$$[y, [x, a_i]] = \langle \gamma_i, y \rangle \langle \gamma_i, x \rangle a_i$$

*En d'autres termes,  $\{a_1, \dots, a_r\}$  est une base de vecteurs propres de l'opérateur  $ad_y ad_x : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ .*

## 1.5 Élément de Coxeter, Matrice de Cartan, et leurs vecteurs propres

Dans cette partie, nous introduisons un élément de Coxeter adapté à une décomposition blanche/noire des racines simples d'un système de racines  $R$ . Cet élément est en relation avec la matrice de Cartan, nous rappelons cette observation de R. Steinberg, [Ste]. Cela nous permet d'obtenir des informations sur le spectre et les vecteurs propres de la matrice de Cartan et nous en déduisons plusieurs égalités sur leurs coordonnées. Les trois derniers résultats de cette partie seront utilisés pour la démonstration du Théorème principal, dans la partie §1.7.

### 1.5.1 Élément de Coxeter et Matrice de Cartan

**Élément de Coxeter adapté à une décomposition blanche/noire des racines simples.** Soit  $R \subset V$  un système de racines réduit, irréductible dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $r$  (en particulier,  $R$  engendre  $V$ ), nous notons  $W$  le groupe de Weyl de  $R$ ,  $(\cdot, \cdot)$  un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $V$ . Nous identifions  $V$  avec  $V^*$  par  $(\cdot, \cdot)$ , de telle sorte que  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ , voir [Bou], Chapitre V, §1, Lemme 2.

Soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset R$  une base de racines simples.

Choisissons une coloration noire/blanche de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets du diagramme de Dynkin de  $R$  (qui est un arbre) telle que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes. Identifions  $\mathcal{S}$  avec  $\{1, \dots, r\}$  de telle sorte que les sommets  $\{1, \dots, p\}$  sont noirs et les sommets  $\{p+1, \dots, r\}$  sont blancs.

Notons  $s_i = s_{\alpha_i}$  et considérons l'élément de Coxeter  $c$  défini par

$$c = c_n c_b, \text{ avec } c_n = \prod_{i=1}^p s_i, \quad c_b = \prod_{i=p+1}^r s_i$$

Remarquons que l'ordre des produits définissant  $c_n$  et  $c_b$  n'importe pas puisque les réflexions  $s_i, s_j$  commutent lorsque  $i$  et  $j$  ont la même couleur. Nous avons alors,

$$c_b^2 = c_n^2 = 1$$

ce qui permet d'en déduire que

$$(c_n + c_b)^2 = c + c^{-1} + 2.$$

**Lien avec la matrice de Cartan.** Notons  $A = (n_{ij}) = (\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$  la matrice de Cartan de  $R$ . Notons  $\hat{A} : V \rightarrow V$  l'opérateur défini par

$$\hat{A}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^r n_{ij} \alpha_j.$$

**Lemme 7.** *Nous avons*

$$c_b + c_w = 2I - \hat{A}$$

*Démonstration.*  $\hat{A}$  s'exprime dans la base de racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  adaptée à la coloration noire/blanche, par la matrice par blocs suivante :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2I_p & X \\ Y & 2I_{r-p} \end{pmatrix}$$

D'autre part, en calculant l'action des réflexions, nous pouvons écrire les matrices des opérateurs  $c_b$  et  $c_w$  dans la base  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  :

$$c_b = \begin{pmatrix} -I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad c_w = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Y & -I \end{pmatrix}$$

Et nous avons bien,

$$c_b + c_w = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ -Y & 0 \end{pmatrix} = 2I - \hat{A}$$

□

## 1.5.2 Spectre et vecteurs propres

**Lien entre les spectres.**

**Lemme 8.** *Toutes les valeurs propres de  $\hat{A}$  sont de la forme  $2(1 - \cos(k_i \theta_1))$ , où  $i \in \{1, \dots, r\}$ , les  $k_i$  sont les exposants de  $\mathfrak{g}$  et  $\theta_1 = \frac{\pi}{h}$ .*

*Démonstration.* Les valeurs propres de  $c$  sont  $\exp\left(\frac{2k_j \pi i}{h}\right)$  pour  $1 \leq j \leq r$  (voir [Cox]). À partir de l'égalité  $(2I - \hat{A})^2 = c + c^{-1} + 2$ , nous pouvons voir que si  $e^{2i\theta}$  est une valeur propre de  $c$ , alors  $4 \cos^2 \theta$  est une valeur propre de  $(2I - \hat{A})^2$ , donc  $2(1 \pm \cos \theta)$  est une valeur propre de  $\hat{A}$ .

Remarquons que

$$2(1 + \cos \theta) = 2(1 - \cos(\pi - \theta))$$

et  $k_{r-i} = h - k_i$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

□

**Lien entre les vecteurs propres.** Pour un vecteur

$$x = \sum_{i=1}^r x_i \alpha_i \in V,$$

nous avons

$$\hat{A}x = \sum_i x_i \left( \sum_j n_{ij} \right) \alpha_j = \sum_j \left( \sum_i x_i n_{ij} \right) \alpha_j.$$

Alors,  $\hat{A}x = \lambda x$  est équivalent à

$$\sum_i x_i n_{ij} = \lambda x_j, \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.4)$$

Définissons, à présent, une fonction couleur  $\epsilon : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{\pm 1\}$  telle que

$$\epsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq p \\ -1 & \text{si } i > p. \end{cases}$$

**Lemme 9** (Lemme de Dualité). *Si  $x$  est un vecteur satisfaisant l'équation 1.4 avec  $\lambda$  une valeur propre de la matrice de Cartan ( $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$ ), c'est à dire*

$$\sum_{i=1}^r x_i n_{ij} = 2(1 - \cos \theta) x_j, \quad j \in \{1, \dots, r\}.$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^r \epsilon(i) x_i n_{ij} = 2(1 + \cos \theta) \epsilon(j) x_j, \quad j \in \{1, \dots, r\}.$$

*Démonstration.* Rappelons que  $A$  est une matrice par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 2I_p & X \\ Y & 2I_{r-p} \end{pmatrix}$  et notons  $x_b = (x_1, \dots, x_p)$  et  $x_w = (x_{p+1}, \dots, x_r)$ . L'égalité  $xA = \lambda x$  donne :

$$\begin{cases} 2x_b + x_w Y = 2(1 - \cos \theta) x_b \\ x_b X + 2x_w = 2(1 - \cos \theta) x_w \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} 2x_b - x_w Y = 2(1 + \cos \theta) x_b \\ x_b X - 2x_w = 2(1 + \cos \theta) (-x_w) \end{cases}$$

Ce qui signifie que que  $\tilde{x} = (\epsilon(1)x_1, \dots, \epsilon(r)x_r)$  satisfait l'équation 1.4, avec  $\lambda = 2(1 + \cos \theta)$ .  $\square$



Un vecteur propre de  $c$ . À présent, posons

$$x_b = \sum_{i=1}^p x_i \alpha_i, \quad x_w = \sum_{i=p+1}^r x_i \alpha_i$$

À partir de  $x_b$  et  $x_w$ , nous allons construire dans le Corollaire 11 un vecteur propre  $y$  pour l'élément de Coxeter  $c$ . Nous retrouverons ce vecteur propre dans la démonstration du théorème principal, le Théorème 15. Par des calculs simples, nous pouvons montrer les égalités suivantes.

- Lemme 10.**
1.  $c_w(x_w) = -x_w$  et  $c_b(x_b) = -x_b$ .
  2.  $c_w(x_b) = x_w + 2 \cos(\theta)x_b$  et  $c_b(x_w) = x_b + 2 \cos(\theta)x_w$ .

**Corollaire 11.** Si  $y = e^{-\frac{i\theta}{2}}x_w + e^{\frac{i\theta}{2}}x_b$ , alors

$$c(y) = e^{2i\theta}y.$$

En d'autres termes,  $y = e^{-\frac{i\theta}{2}}x_w + e^{\frac{i\theta}{2}}x_b$  est un vecteur propre de  $c$  pour la valeur propre  $e^{2i\theta}$ .

Le vecteur propre  $y$  vérifie une égalité essentielle pour la suite, elle est donnée dans le lemme ci-dessous.

**Lemme 12.** Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$(y, \alpha_j) = i\epsilon(j)e^{-\frac{i\epsilon(j)\theta}{2}} \sin(\theta)(\alpha_j, \alpha_j)x_j.$$

*Démonstration.* Rappelons que  $(\alpha_k, \alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j, \alpha_j)n_{kj}$ , pour  $k, j \in \{1, \dots, r\}$ . Nous avons alors

$$(y, \alpha_j) = \frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{2} \left( e^{\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=1}^p x_k n_{kj} + e^{-\frac{i\theta}{2}} \sum_{k=p+1}^r x_k n_{kj} \right)$$

Or, puisque nous avons

$$\sum_{k=1}^p x_k n_{kj} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^r x_i n_{ij} + \sum_{i=1}^r \epsilon(i) x_i n_{ij} \right)$$

et

$$\sum_{k=p+1}^r x_k n_{kj} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^r x_i n_{ij} - \sum_{i=1}^r \epsilon(i) x_i n_{ij} \right),$$

le Lemme de dualité 9 permet de conclure. □

### 1.5.3 Action de l'élément de Coxeter sur les racines

Nous avons déjà évoqué la relation entre la matrice de Cartan et un élément de Coxeter particulier. L'élément de Coxeter agit sur l'ensemble des racines et nous aurons besoin par la suite d'un représentant de chacune des  $r$  orbites de cette action.

**Lemme 13.** *Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , les éléments  $c(i)\alpha_i$  appartiennent à  $r$  orbites distinctes pour l'action de  $c$  sur l'ensemble des racines  $R$ .*

*Démonstration.* Kostant montre dans [Kos2], Théorèmes 8.1 et 8.4, qu'il y a exactement  $r$  racines négatives, appelons les  $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ , qui deviennent des racines positives pour l'action de  $c$  sur  $R$  et elles appartiennent à  $r$  orbites distinctes pour cette action.

Dans la preuve du Lemme 7, nous avons vu que

$$c = c_b c_w = \begin{pmatrix} -I + XY & X \\ -Y & -I \end{pmatrix} \text{ et } c^{-1} = c_w c_b = \begin{pmatrix} -I & -X \\ Y & YX - I \end{pmatrix}$$

où  $X$  et  $Y$  sont des matrices à coefficients négatifs ou nuls tels que la matrice de Cartan de  $R$  s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 2I_p & X \\ Y & 2I_{r-p} \end{pmatrix}.$$

Pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $c^{-1}(\alpha_i)$  est une racine négative, donc  $\alpha_i = c(\beta_k)$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Pour  $p+1 \leq i \leq r$ ,  $c(-\alpha_i)$  est une racine positive, donc  $-\alpha_i = \beta_j$  pour un certain  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

À chaque racine  $c(i)\alpha_i$ , nous avons donc associé une racine  $\beta_j$  dans la même orbite, et cette correspondance est bijective.  $\square$

## 1.6 Involution de Cartan et forme hermitienne

Dans cette partie, nous suivons les travaux de Kostant et introduisons une involution  $*$  et une forme hermitienne  $H$ . Ces deux nouvelles notions nous permettent d'obtenir l'expression des valeurs propres de l'opérateur  $ad_x ad_{x^*}$ .

### 1.6.1 Définitions d'une involution et d'une forme hermitienne.

Tout comme Bruhat [Bru] et Kostant [Kos2], page 1003, considérons une base de Weyl  $\{e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\}$ . Par définition, cela signifie que  $e_\alpha \neq 0$ ,  $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ , et si nous notons

$$[e_\alpha, e_\beta] = n_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta},$$

alors  $n_{\alpha\beta} = n_{-\alpha, -\beta}$ . Ici, nous avons choisi la normalisation de Kostant pour cette base de Weyl. Posons enfin, pour  $1 \leq i \leq r$ ,

$$h_i = [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}].$$

Soit  $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$  la  $\mathbb{R}$ -sous-algèbre de Lie munie de la base

$$\{e_\alpha - e_{-\alpha}, i(e_\alpha + e_{-\alpha}), ih_j \mid \alpha \in R_+, 1 \leq j \leq r\}$$

C'est une forme compacte de  $\mathfrak{g}$ , ce qui signifie que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}$  et la restriction de la forme de Killing sur  $\mathfrak{l}$  est définie négative.

Suivant Kostant, introduisons une involution  $*$  :  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$  définie par

$$(x + iy)^* = x - iy, \text{ pour } x, y \in i\mathfrak{l}$$

Remarquons que  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x$  si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et

$$[x, y]^* = [y^*, x^*].$$

Par ailleurs, la forme sesquilinéaire sur  $\mathfrak{g}$ ,  $H(x, y) = (x, y^*)$  est hermitienne définie positive, [Bru], (21). Remarquons également que

$$(ad_x)^* = ad_{x^*} \text{ et } e_\alpha^* = e_{-\alpha}, \text{ pour tout } \alpha \in R.$$

**Lien avec ce qui précède.** Revenons au cadre mis en place dans les sections §1.2 à §1.4. Cependant, à présent, nous travaillerons avec les vecteurs de Weyl  $e_\alpha$  que nous venons d'introduire, et non plus avec des vecteurs  $E_\alpha$  quelconques.

Fixons des nombres complexes non nuls  $m_i$  tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $m_i \bar{m}_i = n_i$ . Posons

$$e = \sum_{i=1}^r m_i e_{\alpha_i} + e_{-\theta},$$

alors  $e$  est un élément cyclique. D'après l'égalité 1.6.1,

$$e^* = \sum_{i=1}^r \bar{m}_i e_{-\alpha_i} + e_\theta$$

et rappelons que  $[e, e^*] = 0$ .

Soit  $\mathfrak{h}' = Z(e) = Z(e^*)$  la sous-algèbre de Cartan en apposition avec  $\mathfrak{h}$ , comme dans le paragraphe §1.3. Pour tout  $m \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ ,

$$* : \mathfrak{g}_m \cap \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-m} \cap \mathfrak{h}'.$$

### 1.6.2 Les valeurs propres de $ad_x ad_{x^*}$ .

Appliquons le théorème 6 avec  $y = x^*$ . Nous avons  $a_i \in \mathfrak{h}$  et  $\gamma_i \in R' \subset \mathfrak{h}'^*$  comme dans le paragraphe §1.4, nous obtenons alors

$$ad_x ad_{x^*}(a_i) = \gamma_i(x) \gamma_i(x^*) a_i \text{ pour } 1 \leq i \leq r.$$

**Lemme 14.**

$$\gamma_i(x^*) = \overline{\gamma_i(x)}$$

*Démonstration.* Considérons l'égalité 1.3 :

$$ad_x(z) = \zeta^{-km} \gamma_i(x) z$$

où  $z$  désigne  $e_{c^k(\gamma_i)}$  dans un soucis de clarté. Il s'ensuit que

$$H(ad_x(z), z) = \zeta^{-km} \gamma_i(x) H(z, z).$$

De façon similaire,

$$ad_{x^*}(z) = \zeta^{km} \gamma_i(x^*) z,$$

et

$$H(ad_{x^*}(z), z) = \zeta^{km} \gamma_i(x^*) H(z, z)$$

Les opérateurs  $ad_x$  et  $ad_{x^*}$  sont adjoints, et  $H(z, z) \neq 0$ , ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

Ce lemme nous permet d'écrire que les valeurs propres de l'opérateurs  $ad_x ad_{x^*}$  s'écrivent

$$|\gamma_i(x)|^2$$

où les  $\gamma_i$  sont des représentants de chaque orbite pour l'action de l'élément de Coxeter  $c$  sur l'ensemble de racines  $R'$ .

## 1.7 Démonstration du Théorème principal

**Le contexte.** Soit  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Cartan, le système de racines  $R'$  est alors inclus dans  $\mathfrak{h}'^*$ . Choisissons une base de racines simples  $\{\alpha'_i\} \subset R'$  et une coloration blanche/noire du diagramme de Dynkin comme dans la section §1.5.

Ainsi, pour  $1 \leq i \leq p$  (respectivement  $p+1 \leq i \leq r$ ),  $\alpha'_i$  est une racine simple noire (resp. blanche). Posons

$$c' = c'_b c'_w, \quad c'_b = \prod_{i=1}^p s'_i \quad \text{et} \quad c'_w = \prod_{i=p+1}^r s'_i$$

où  $s'_i = s_{\alpha'_i}$ .  $c'$  est donc l'élément de Coxeter correspondant à ce choix de coloration.

Considérons à nouveau  $G$  le groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$ , et notons  $T' \subset G$  le tore maximal tel que  $Lie(T') = \mathfrak{h}'$ . Alors le groupe de Weyl  $W' \subset Aut(R')$  s'identifie avec le quotient  $N_G(T')/T'$ . Notons  $\Phi : N_G(T') \rightarrow T'$  et considérons  $P' \in N_G(T')$  un antécédent de  $c'$  par l'application  $\Phi$ . Posons

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{P'}.$$

Alors  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Cartan, et  $\mathfrak{h}'$  est en apposition par rapport à  $\mathfrak{h}$  par rapport à  $P'$ , voir [Kos2], Théorème 8.4.

Considérons la gradation principale engendrée par  $P'$  :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$$

où  $\mathfrak{g}_i$  est l'espace propre de  $Ad_{P'}$  associé à la valeur propre  $\zeta^i$  comme dans la section §1.2. Par ailleurs, les espaces  $\mathfrak{h}'^{(i)} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{k_i}$ , pour  $1 \leq i \leq r$  sont de dimension 1.

Nous pouvons choisir une involution  $*$  qui laisse invariante  $\mathfrak{h}'$ , comme dans le paragraphe §1.6. Alors, pour tout  $x \in \mathfrak{h}'$ , l'opérateur  $ad_{x^*}$  est le conjugué hermitien de  $ad_x$  et

$$(\mathfrak{h}'^{(i)})^* = \mathfrak{h}'^{(r-i)}.$$

En effet, nous savons que ce résultat est vrai pour la gradation induite par l'élément principal  $P = P_0$  défini dans la section §1.2 et l'involution (que l'on peut noter  $*_0$ ) définie dans la section §1.6 à partir de  $\mathfrak{h}$ . Notre affirmation s'obtient alors en utilisant le théorème de conjugaison, [Kos2] Théorème 7.3, pour définir l'involution souhaitée pour la gradation principale induite par  $P'$ .

**Théorème 15.** *Soit  $i$  un entier,  $1 \leq i \leq r$ . Considérons  $e^{(i)}$  un vecteur non nul de  $\mathfrak{h}'^{(i)}$ , alors  $e^{(i)*} \in \mathfrak{h}'^{(r-i)}$ . Considérons également l'opérateur*

$$\tilde{M}^{(i)} := ad_{e^{(i)}} ad_{e^{(i)*}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}.$$

Ses valeurs propres sont notées  $\tilde{\mu}_1^{(i)}, \dots, \tilde{\mu}_r^{(i)}$ .

Il existe un unique opérateur  $M^{(i)} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$  dont le carré est égal à  $\tilde{M}^{(i)}$  et tel que le vecteur colonne de ses valeurs propres dans l'ordre approprié

$$\mu^{(i)} := {}^t \left( \mu_1^{(i)}, \dots, \mu_r^{(i)} \right)$$

est un vecteur propre de la matrice de Cartan  $A$  pour la valeur propre

$$\lambda_i := 2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2k_i \pi}{h} \right) \right).$$

En particulier, pour  $i = 1$ , il existe un vecteur propre de  ${}^t A$  dont toutes les coordonnées sont positives (un tel vecteur est appelé vecteur de Perron – Frobenius), et nous pouvons prendre pour  $M^{(1)}$  la racine carrée positive de  $\tilde{M}^{(1)}$ .

Enfin, les opérateurs  $M^{(1)}, \dots, M^{(r)}$  commutent deux à deux.

**Démonstration du Théorème 15.** Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 15, tous les outils nécessaires à la preuve ont été introduits en amont.

*Démonstration.* Notons  $x = {}^t(x_1 \dots x_r)$  un vecteur propre de  ${}^t A$  pour la valeur propre  $\lambda = \lambda_j$ .

Commençons par considérer un vecteur propre  $y$  de l'élément de Coxeter  $c'$  pour la valeur propre  $e^{i\theta}$ ,  $\theta = \frac{k_j\pi}{h}$ , comme décrit dans le Corollaire 11. D'après le Lemme 12, nous avons

$$(y, \alpha'_k) = i \epsilon(k) e^{-i\epsilon(k)\frac{\theta}{2}} \sin \theta (\alpha'_k, \alpha'_k) x_k, \text{ pour } 1 \leq k \leq r \quad (1.5)$$

Dans la partie §1.6, nous avons montré que les valeurs propres de l'opérateur

$$\tilde{M} = \tilde{M}^{(j)}$$

sont

$$|\gamma_k(e^{(j)})|^2, \quad 1 \leq k \leq r$$

où  $\gamma_k \in \mathfrak{h}'^*$ , pour  $1 \leq k \leq r$  sont des représentants arbitraires des différentes orbites pour l'action de  $c'$  sur  $R'$ .

Identifions  $\mathfrak{h}'$  avec  $\mathfrak{h}'^*$  à l'aide du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . Ainsi, nous pouvons considérer  $\gamma_k$  comme un vecteur de  $\mathfrak{h}'$ , et

$$|\gamma_k(e^{(j)})|^2 = |(e^{(j)}, \gamma_k)|^2.$$

Rappelons que  $e^{(j)}$  est un vecteur propre de  $c'$  dans  $\mathfrak{h}'$ . Nous avons  $c'(e^{(j)}) = e^{i\theta} e^{(j)}$ , car  $c'$  agit comme  $Ad_{P'}$  sur  $\mathfrak{h}'$ , et nous pouvons donc écrire

$$e^{(j)} = \mu y$$

pour un certain  $\mu \in \mathbb{C}^*$ .

Réécrivons (1.5) sous la forme

$$(y, \epsilon(k)\alpha'_k) = i e^{-i\epsilon(k)\frac{\theta}{2}} \sin \theta \tilde{x}_k, \quad 1 \leq k \leq r,$$

où  $\tilde{x}_k$  désigne  $(\alpha'_k, \alpha'_k)x_k$ . Donc  $\tilde{x} = {}^t(\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_r)$  est un vecteur propre de  $A$ .

D'après le Lemme 13, les vecteurs  $\epsilon(k)\alpha'_k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , sont des représentantes des  $r$  orbites de l'action de  $c'$  sur  $R'$ , donc nous pouvons poser

$$\gamma_k := \epsilon(k)\alpha'_k.$$

En conséquence, les valeurs propres de  $\tilde{M} = \tilde{M}^{(i)}$  sont, pour  $1 \leq k \leq r$ ,

$$|(e^{(j)}, \gamma_k)|^2 = |\mu|^2 \sin^2 \theta \tilde{x}_k^2$$

(notons que  $\tilde{x}_k$  sont des nombres réels, non nécessairement positifs).

Donc, la suite des valeurs propres de  $\tilde{M}^{(i)}$  est

$$(|\mu|^2 \sin^2 \theta \tilde{x}_1^2, \dots, |\mu|^2 \sin^2 \theta \tilde{x}_r^2).$$

De plus, les opérateurs  $\tilde{M}^{(1)}, \dots, \tilde{M}^{(r)}$  commutent deux à deux puisque les éléments  $e^{(1)}, \dots, e^{(r)} \in \mathfrak{h}'$  commutent également.

Pour terminer, nous prenons pour  $M = M^{(j)}$ , l'une des  $2^r$  racines carrés de  $\tilde{M}$ , telle que la  $k$ -ème valeur propre, si elle est non nulle, est de même signe que  $x_k$  (remarque, cette racine carré est unique). L'ensemble des valeurs propres de  $M^{(j)}$  est alors

$$(|\mu \sin \theta| \tilde{x}_1, \dots, |\mu \sin \theta| \tilde{x}_r)$$

et c'est bien un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ .

□

**Une dernière remarque.** Nous pouvons également commencer avec une paire arbitraire de sous-algèbres  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}')$  où  $\mathfrak{h}'$  est en apposition avec  $\mathfrak{h}$  par rapport à un élément principal  $P$ . En définissant les opérateurs  $\tilde{M}^{(i)}$  comme dans le théorème précédent, nous arrivons aux mêmes conclusions sur leur spectre à cause, là encore, du théorème de conjugaison de Kostant, [Kos2], Théorème 7.3.

## 1.8 Équations de Toda affines

Dans ce paragraphe, nous tentons d'expliquer le lien entre ce qui précède et la physique théorique, plus particulièrement, avec la théorie de Toda affine. Tout comme nous avons généralisé le résultat des physiciens ([Fre1], [FLO]), nous proposons une généralisation des équations de Toda.

Considérons une théorie quantique des champs, dont les champs sont des fonctions lisses  $\phi : X \rightarrow \mathfrak{h}$ , où  $X = \mathbb{R}^2$  muni de coordonnées  $x_1, x_2$  représentant l'espace et le temps.

La densité Lagrangienne de cette théorie dépend d'un élément  $e \in \mathfrak{h}'$ , où  $\mathfrak{h}'$  est une sous-algèbre de Cartan en apposition avec  $\mathfrak{h}$ . Elle est donnée par la formule

$$\mathfrak{L}_e(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^2 (\partial_a \phi, \partial_a \phi) - m^2 (Ad_{exp(\phi)}(e), e^*).$$

Ici,  $\partial_a := \partial/\partial x_a$ .

Les équations du mouvement d'Euler – Lagrange sont alors données par :

$$\mathcal{D}_e(\phi) := \Delta \phi + m^2 [Ad_{exp(\phi)}(e), e^*] = 0 \quad (1.6)$$

où  $\Delta \phi = \sum_{a=1}^2 \partial_a^2 \phi$ . C'est un système de  $r$  équations différentielles du second ordre, non linéaires. Les équations de la théorie affine des champs de Toda usuelle correspondent au choix de  $e \in \mathfrak{g}^{(1)}$  comme dans le paragraphe §1.6, voir [Fre1].

L'approximation linéaire de l'équation (1.6) est une équation de Klein – Gordon :

$$\Delta_e \phi := \Delta \phi + m^2 ad_e ad_{e^*}(\phi) = 0. \quad (1.7)$$

Cette équation admet  $r$  solutions

$$\phi_j(x_1, x_2) = e^{i(k_j x_1 + \omega_j x_2)} y_j, \quad \text{avec } k_j^2 + \omega_j^2 = m^2 \mu_j^2,$$

pour  $1 \leq j \leq r$  et les  $\mu_j^2$  sont les valeurs propres de l'opérateur de masses (carré),

$$M_e^2 := ad_e ad_{e^*} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

et les  $y_j$  sont les vecteurs propres correspondant, [Hol] (1.4), (1.5). Nous revenons sur les travaux d'Hollowood dans le Chapitre 3.

En d'autres termes, l'équation (1.7) se découple en  $r$  équations décrivant des *particules scalaires de masses*  $\mu_j$ , ce qui explique le terme *masses* les désignant.

En conséquence de la commutativité de  $\mathfrak{h}'$ , remarquons que pour tout  $e, e' \in \mathfrak{h}'$ ,

$$[\Delta_e, \Delta_{e'}] = 0.$$

## 1.9 Perspectives, motifs dans les vecteurs propres de la matrice de Cartan

Dans cette partie, nous évoquons certaines observations faites lors de ce travail sur les vecteurs propres des matrices de Cartan, dans le cas où le système de racines  $R$  est simplement enlacé. Nous avons en effet pu observer des motifs dans les coordonnées de ces vecteurs et les décrivons dans le paragraphe §1.9.1 ci-dessous. Si la proposition 16 peut se vérifier au cas par cas, nous n'avons pas encore de démonstration générale à ce résultat que nous pensons également vrai dans le cas d'un système de racines non simplement enlacé. Nous terminons par des exemples pour illustrer nos propos.

### 1.9.1 Description des motifs

Considérons à nouveau les vecteurs propres  $\mu^{(i)}$  introduits dans le théorème 15. Ils sont en bijection avec les exposants  $k_i$  de  $\mathfrak{g}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . En particulier,  $\mu^{(1)}$  est un vecteur propre de Perron – Frobenius.

Les exposants vont par paires puisque  $k_{r-i} = h - k_i$ . D'après le lemme 3.5, le vecteur propre  $\mu^{(r-i)}$  est obtenu à partir de  $\mu^{(i)}$  en multipliant ses coordonnées par la suite  $(\epsilon(1), \dots, \epsilon(r))$ , avec  $\epsilon(j) = \pm 1$ .

Dans toute la suite, nous utiliserons la notation suivante : pour un vecteur  $v = (x_1, \dots, x_r)$ , nous notons  $\tilde{v} = (|x_1|, \dots, |x_r|)$ . Et pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  (le groupe symétrique), nous notons  $v_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$ . Enfin, la notation  $\text{pgcd}(a, b)$  désigne le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$ .

**Le cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m)$ .** Un vecteur de Perron – Frobenius pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(n)$  est de la forme :

$$\mu^{(1)} = v_{PF}(n) := \left( \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \dots, \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \right)$$

Décrivons à présent les autres vecteurs propres  $\mu^{(i)}$ , pour  $1 \leq i \leq r = n - 1$ .

Posons  $p(i) = \text{pgcd}(i, n)$  et notons  $n = p(i)q(i)$ .

Considérons tout d'abord le cas  $p(i) = 1$ . Dans ce cas, il n'est pas difficile de voir que toutes les coordonnées de  $\mu^{(i)}$  sont non nulles et sont, au signe près, une permutation des coordonnées de  $\mu^{(1)}$ . Les permutations impliquées sont décrites dans le paragraphe 7.2 ci-dessous.

Pour un  $p(i)$  arbitraire, il y a exactement  $p(i) - 1$  zéros parmi les composantes de  $\mu^{(i)}$  et les  $p(i)(q(i) - 1)$  coordonnées restantes se décomposent en  $p(i)$  groupes, chaque groupe forme, au signe près, les coordonnées d'un vecteur de Perron-Frobenius pour  $\mathfrak{sl}(q(i))$ .



**Exemple.** Pour la matrice de Cartan de  $\mathfrak{sl}(12)$ , les vecteurs propres sont notés  $\mu^{(i)}$ , pour  $1 \leq i \leq 11$ , avec  $\tilde{\mu}^{(i)} = \tilde{\mu}^{(12-i)}$ . Et nous avons,

$$\tilde{\mu}^{(2)} = (v_{PF}(6), 0, v_{PF}(6))$$

$$\tilde{\mu}^{(3)} = (v_{PF}(4), 0, v_{PF}(4), 0, v_{PF}(4))$$

$$\tilde{\mu}^{(4)} = (v_{PF}(3), 0, v_{PF}(3), 0, v_{PF}(3), 0, v_{PF}(3))$$

$$\tilde{\mu}^{(5)} = v_{PF}(12)_\sigma \text{ avec } \sigma = (1\ 5)(7\ 11)$$

$$\tilde{\mu}^{(6)} = (v_{PF}(2), 0, v_{PF}(2), 0, v_{PF}(2), 0, v_{PF}(2), 0, v_{PF}(2))$$

**Le cas de  $\mathfrak{g}$  arbitraire.** Dans ce cas, nous avons un motif similaire. Soit  $R$  un système de racines fini, réduit, irréductible de rang  $r$  et notons  $h$  le nombre de Coxeter et  $k_i$ , pour  $1 \leq i \leq r$  les exposants de  $\mathfrak{g}$ .

Rappelons que, d'après [Bou], Chapitre VI, Proposition 30, tous les entiers  $k$  compris entre 1 et  $h - 1$ , et premiers avec  $h$  font partie des exposants.

Notons  $p(i) = \text{pgcd}(k_i, h)$ .

**Proposition 16.** *Supposons que  $R$  est simplement enlacé.*

1. *Les coordonnées des vecteurs propres  $\mu^{(i)}$  sont non nulles si et seulement si  $p(i) = 1$ . Dans ce cas, nous avons*

$$\tilde{\mu}^{(i)} = \tilde{\mu}_{\sigma_i}^{(1)}$$

où  $\sigma_i$  est une permutation de  $\mathfrak{S}_r$ .

Ces permutations  $\sigma_i$  sont au nombre de  $\frac{\phi(h)}{2}$  et forment un groupe isomorphe à  $U(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z})/\{1, -1\}$ .

2. *Si  $p(i)$  est arbitraire, alors nous pouvons associer à un tel  $i$  un sous-système de racine  $R_{p(i)} \subset R$  dont le nombre de Coxeter est  $q(i) = \frac{h}{p(i)}$  de telle sorte que les coordonnées non nulles de  $\mu^{(i)}$  se décomposent en  $p(i)$  groupes, chaque groupe étant, au signe près, une permutation des coordonnées d'un vecteur de Perron – Frobenius de  $R_{p(i)}$ .*

Cette proposition peut se vérifier au cas par cas, en utilisant les formules explicites des coordonnées de  $\mu^{(i)}$ , données par P. Dorey, [Dor2], Table 2, page 659. Cependant, il serait préférable d'avoir une preuve uniforme de ce résultat. Nous pensons que ce résultat est également vrai dans le cas où  $R$  n'est pas simplement enlacé.

### 1.9.2 Exemple

Pour le système de racines de type  $E_8$ , nous avons  $h = 30$  et les exposants sont : 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Ce sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30

## 50.9. Perspectives, motifs dans les vecteurs propres de la matrice de Cartan

et qui ne divisent pas 30 (à l'exception de l'exposant 1). Notons les vecteurs propres  $v_1, v_7, \dots, v_{29}$  de telle sorte que  $v_k$  a pour valeur propre  $2 \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{30}\right)\right)$ .

$v_1 = v_{PF}$  est le vecteur de Perron – Frobenius, il est égal à :

$$v_{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\mu}(\mu^2 - 1) \\ \mu \\ \mu^2 - 1 \\ \frac{1}{\mu}(\mu^4 - 3\mu^2 + 1) \\ \mu^4 - 4\mu^2 + 2 \\ \frac{1}{\mu}(\mu^6 - 5\mu^4 + 5\mu^2 - 1) \\ \mu^6 - 6\mu^4 + 9\mu^2 - 3 \end{pmatrix}$$

où  $\mu = 2 \cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ .

Alors nous avons

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_{29}, \tilde{v}_7 = \tilde{v}_{23}, \tilde{v}_{11} = \tilde{v}_{19}, \tilde{v}_{13} = \tilde{v}_{17}$$

et

$$\tilde{v}_7 = (v_1)_\sigma, \tilde{v}_{11} = (v_1)_{\sigma^2}, \tilde{v}_{13} = (v_1)_{\sigma^3}$$

avec  $\sigma = (1\ 7\ 4\ 2)(3\ 6\ 5\ 8) \in \mathfrak{S}_8$ . Les groupe cyclique  $G = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \subset \mathfrak{S}_8$  est isomorphe à  $U(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})/\{1, -1\}$ .

## Chapitre 2

# Cycles évanescents et Vecteurs propres de Cartan

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels de théorie des singularités</b>	<b>53</b>
2.2.1	Réseaux de cycles évanescents	53
2.2.2	Déformations de Morse	54
2.2.3	Factorisation de Sebastiani - Thom	56
2.2.4	Singularités simples	57
<b>2.3</b>	<b>La correspondance Cartan - Coxeter</b>	<b>57</b>
2.3.1	Réseaux, polarisation, élément de Coxeter	57
2.3.2	Décomposition blanche/noire et Théorème de Steinberg	58
2.3.3	Correspondance des vecteurs propres	59
2.3.4	Exemple : le système de racines $A_n$	61
<b>2.4</b>	<b>Produit de Sebastiani - Thom, factorisation de <math>E_8</math></b>	<b>62</b>
2.4.1	Produit de Sebastiani - Thom	62
2.4.2	$E_8$ et $A_4 \star A_2 \star A_1$ : analyse élémentaire	63
2.4.3	Décomposition de $Q(E_8)$	63
2.4.4	Ordre des racines	65
2.4.5	Les vecteurs propres de la matrice de Cartan de $E_8$	67
2.4.6	Vecteur de Perron - Frobenius	68
2.4.7	Factorisation de $E_6$ et $D_4$	69
<b>2.5</b>	<b><math>q</math>-déformation de Givental</b>	<b>72</b>
2.5.1	$q$ -déformation des matrices de Cartan	72
2.5.2	Correspondance de Cartan - Coxeter $q$ -déformée	73
2.5.3	Spectre et vecteurs propres des matrices de Cartan $q$ -déformées	74
2.5.4	Remarque (M. Finkelberg)	76
2.5.5	Exemples	77

---

## 2.1 Introduction

Notons  $A(R)$  la matrice de Cartan d'un système de racines fini  $R$ . Les coordonnées de ses vecteurs propres jouent un rôle important dans la physique de systèmes intégrables. L'objectif de ce chapitre est d'étudier ces nombres et leur  $q$ -déformations, en utilisant des résultats de la théorie des singularités.

Supposons que  $R$  est simplement enlacé, c'est à dire, de type  $A$ ,  $D$  ou  $E$ . Ces systèmes de racines sont en bijection avec les classes des singularités simples,  $f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ , voir [AVGZ]. Cette bijection permet d'identifier le réseau de racines  $Q(R)$  avec le réseau des cycles évanescents, et la matrice de Cartan  $A(R)$  est la matrice d'intersection par rapport à une *base distinguée*, notion que nous retrouverons dans le Chapitre 4. L'action du groupe de Weyl sur  $Q(R)$  est réalisé par les monodromies de Gauss - Manin, c'est la théorie de Picard Lefschetz, quelques détails sont donnés dans la partie §2.2 ci-dessous.

La matrice symétrique  $A = A(R)$  se décompose

$$A = L + {}^t L \quad (2.1)$$

où  $L$  est une matrice triangulaire non dégénérée, appelée *forme de Seifert* ou *matrice de variations*. La matrice

$$C = -L^{-1} {}^t L \quad (2.2)$$

représente un élément de Coxeter de  $R$ , ou, géométriquement, l'opérateur de monodromie classique.

Les relations (2.1) et (2.2) entre la matrice de Cartan et l'élément de Coxeter sont appelées la *correspondance de Cartan - Coxeter*. Plus généralement, ce lien reste vrai pour une matrice  $A$  non symétrique, dans ce cas, (2.1) doit être remplacée par

$$A = L + U \quad (2.3)$$

où  $L$  est triangulaire inférieure et  $U$  est triangulaire supérieure. Ce résultat est dû à Coxeter, voir [Cox], no. 1, p. 767, ou voir le paragraphe §2.3 ci-dessous.

Dans un cas particulier correspondant à une 2-partition du diagramme de Dynkin, cette relation est équivalente à une observation de R. Steinberg déjà évoquée dans le chapitre précédent, voir aussi [Ste] et le paragraphe §2.3.2 ci-dessous. Cette correspondance nous permet de mettre en relation les vecteurs propres de  $A$  et de  $C$ , voir Théorème 18.

La décomposition (2.1) est appelée une *polarisation* de la matrice de Cartan  $A$ . Dans le paragraphe §2.4.1, nous introduisons une opération, le *produit de Sebastiani - Thom*  $A \star B$  de matrices de Cartan (ou de réseaux polarisés)  $A$  et  $B$ . Le réseau de racines  $A \star B$  est le produit tensoriel des réseaux de racines  $A$  et  $B$ . Par rapport à cette opération, les vecteurs propres de l'élément de Coxeter se factorisent très simplement.

Par exemple, les réseaux  $D_4$ ,  $E_6$  et  $E_8$  se décomposent

$$D_4 = A_2 \star A_2 \star A_1 \quad (2.4)$$

$$E_6 = A_3 \star A_2 \star A_1 \quad (2.5)$$

$$E_8 = A_4 \star A_2 \star A_1 \tag{2.6}$$

Cette décomposition est le principal message de la théorie des singularités.

Nous utilisons (2.4), (2.5), (2.6) et le correspondance de Cartan - Coxeter pour obtenir l'expression des vecteurs propres des matrices de Cartan de  $D_4$ ,  $E_6$  et  $E_8$ , c'est le premier résultat important de ce chapitre, voir les paragraphes §2.4.5 et §2.4.7.

Notons qu'une élégante expression des vecteurs propres de Cartan de tous les systèmes de racines finis a été donnée par P. Dorey, voir [Dor2] (a), Table 2, page 659.

Dans son article [Giv], A. Givental a proposé une version  $q$ -déformée de la théorie de Picard - Lefschetz, cela nous a inspiré une  $q$ -déformation de  $A$ ,

$$A(q) = L + q^t L.$$

Comme l'a remarqué Givental, la décomposition (2.3) permet de considérer des matrices non symétriques. Dans notre dernière partie, §2.5, nous calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A(q)$  en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de  $A$ . C'est le second résultat important de ce chapitre.

Il s'avère que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors

$$\lambda(q) = 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q$$

est une valeur propre de  $A(q)$ . Les coordonnées du vecteurs propres correspondant  $v(q)$  sont obtenues à partir de celle de  $v = v(1)$  par multiplication par des puissances appropriées de  $q$ . Ce résultat vient du fait que le diagramme de Dynkin de  $A$  est un arbre, voir §2.5.3. Pour l'exemple de  $A_n$  et  $E_8$ , voir §2.5.5.

## 2.2 Rappels de théorie des singularités

Commençons par rappeler des résultats classiques de la théorie des singularités, voir [AVGZ].

### 2.2.1 Réseaux de cycles évanescents

Soit  $f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , le germe d'une fonction holomorphe tel que  $f(0) = 0$  et 0 est un point critique isolé. Dans toute la suite, nous nous intéressons seulement aux fonctions polynomiales (et en particulier, à celles données dans le paragraphe §2.2.4), donc  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ . L'*anneau de Milnor* de  $f$  est défini par

$$\text{Miln}(f, 0) = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_N]] / (\partial_1 f, \dots, \partial_N f)$$

avec  $\partial_i := \partial / \partial x_i$ .  $\text{Miln}(f, 0)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative de dimension finie. Le nombre,

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \text{Miln}(f, 0)$$

est appelé la *multiplicité* ou le *nombre de Milnor* de  $(f, 0)$ .

Une fibre de Milnor est

$$V_z = f^{-1}(z) \cap \overline{B}_\rho$$

où

$$\overline{B}_\rho = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \mid \sum |x_i|^2 \leq \rho \right\} \text{ pour } 0 < |z| \ll \rho \ll 1.$$

Pour  $z$  appartenant à un petit disque  $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$ , l'espace  $V_z$  est une variété complexe à bord, homotopiquement équivalent à un bouquet  $\vee \mathbb{S}^{N-1}$  de  $\mu$  sphères, [Mil].

La famille des groupes libres abéliens

$$Q(F; z) := \tilde{H}_{N-1}(V_z; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu, \text{ pour } z \in \dot{D}_\varepsilon := D_\varepsilon \setminus \{0\}$$

( $\tilde{H}$  signifie que nous prenons l'homologie réduite pour  $N = 1$ ), est munie de la connexion plate de Gauss – Manin.

Prenons  $t \in \mathbb{R}_+^* \cap \dot{D}_\varepsilon$ , le réseau  $Q(f; t)$  ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de  $t$ . Appelons donc ce réseau  $Q(f)$ . L'opérateur linéaire

$$T(f) : Q(f) \xrightarrow{\sim} Q(f)$$

induit par le chemin  $p(\theta) = e^{i\theta}t$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  est appelé *monodromie classique* du germe  $(f, 0)$ .

Dans les exemples ci-dessous,  $T(f)$  est d'ordre fini, noté  $h$ . Les valeurs propres de  $T(f)$  sont de la forme  $e^{\frac{2i\pi k}{h}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble de  $k$  correspondant à chaque valeur propre est appelé le *spectre* de la singularité.

## 2.2.2 Déformations de Morse

Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{Miln}(f, 0)$ , peut s'identifier avec l'espace tangent à la base  $B$  de la déformation miniverselle de  $f$ . Pour

$$\lambda \in B^0 = B \setminus \Delta$$

où  $\Delta \subset B$  est un sous-ensemble analytique de codimension 1, la fonction correspondante  $f_\lambda : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  a  $\mu$  points critiques de Morse, non dégénérés, avec des valeurs critiques distinctes. L'algèbre  $\text{Miln}(f_\lambda)$  est semi-simple, isomorphe à  $\mathbb{C}^\mu$ .

Notons  $0 \in B$  le point correspondant à  $f$ , de telle sorte que  $f = f_0$  et prenons  $t \in \mathbb{R}_+^* \cap \dot{D}_\varepsilon$  comme dans le paragraphe §2.2.1.

Choisissons  $\lambda \in B^0$  proche de 0, tel que les valeurs critiques  $z_1, \dots, z_\mu$  de  $f_\lambda$  sont de valeurs absolues  $\ll t$ .

Comme dans le paragraphe §2.2.1, pour tout

$$z \in \tilde{D}_\varepsilon := D_\varepsilon \setminus \{z_1, \dots, z_\mu\},$$

le fibre de Milnor  $V_z$  est homotopiquement équivalente à un bouquet  $\vee \mathbb{S}^{N-1}$  de  $\mu$  sphères, et nous nous intéresserons à l'homologie centrale

$$Q(f_\lambda; z) = \tilde{H}_{N-1}(V_z; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu.$$

Le réseau  $Q(f_\lambda; z)$  est muni d'un produit bilinéaire induit par le cup produit de l'homologie, qui est symétrique (resp. antisymétrique) lorsque  $N$  est impair (resp. pair).

La collection de ces réseaux, lorsque  $z \in \tilde{D}_\varepsilon$  varie, est munie de la connexion plate de Gauss – Manin .

Considérons un "octopus"

$$Oct(t) \subset \mathbb{C}$$

formé d'une tête en  $t$ , et d'une collection de chemins  $p_i$  (les "tentacules") qui ne s'intersectent pas et qui relient  $t$  aux valeurs critiques  $z_i$ . Nous obtenons ainsi une base, dite distinguée,

$$\{b_1, \dots, b_\mu\} \subset Q(f_\lambda) := Q(f_\lambda; t).$$

Les  $b_i$  sont appelés *cycles évanescents*. En effet, ils s'évanouissent de  $t$  à  $z_i$  le long de la tentacule  $p_i$ , [Gab], [AVGZ]. Nous illustrons cette situation dans le Chapitre 4, Figure 4.1.

La formule de Picard - Lefschetz décrit l'action du groupe fondamental  $\pi_1(\tilde{D}_\varepsilon; t)$  sur  $Q(f_\lambda)$  par rapport à cette base. Considérons un lacet  $\gamma_i$  qui tourne autour de  $z_i$  le long de la tentacule  $p_i$ , alors la transformation correspondante de  $Q(f_\lambda)$  est la réflexion  $s_i := s_{b_i}$ , voir [Lef], Théorème fondamental, Ch. II, p. 23.

Les lacets  $\gamma_i$  engendrent le groupe fondamental  $\pi_1(\tilde{D}_\varepsilon)$ . Posons

$$\rho : \pi_1(\tilde{D}_\varepsilon; t) \rightarrow GL(Q(f_\lambda)),$$

$\rho$  désigne la représentation de monodromie. L'image de  $\rho$ , notée  $G(f_\lambda)$  et appelée le *groupe de monodromie* de  $f_\lambda$ , est incluse dans le sous-groupe  $O(Q(f_\lambda)) \subset GL(Q(f_\lambda))$  des transformations linéaires respectant les formes bilinéaires sur  $Q(f_\lambda)$  mentionnées précédemment.

Le groupe  $G(f_\lambda)$  est engendré par  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ .

Comme dans le paragraphe §2.2.1, nous avons un opérateur de monodromie

$$T(f_\lambda) \in G(f_\lambda),$$

l'image par  $\rho$  d'un chemin  $p \subset \tilde{D}_\varepsilon$ , partant de  $t$  et tournant autour des points  $z_1, \dots, z_\mu$ .

Cet opérateur  $T(f_\lambda)$  est un produit de  $\mu$  réflexions simples

$$T(f_\lambda) = s_1 s_2 \dots s_\mu,$$

parce que la seule valeur critique 0 de  $f$  devient  $\mu$  valeurs critiques  $z_1, \dots, z_\mu$  de  $f_\lambda$ .

Nous pouvons identifier l'homologie relative (réduite)  $\tilde{H}_{N-1}(V_t, \partial V_t; \mathbb{Z})$  avec le groupe dual  $\tilde{H}_{N-1}(V_t; \mathbb{Z})^*$ . Définissons une application

$$var : \tilde{H}_{N-1}(V_t, \partial V_t; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{N-1}(V_t; \mathbb{Z}),$$

appelée *opérateur de variations*, celle-ci permet de définir une autre application

$$L : Q(f_\lambda)^* \xleftarrow{\sim} Q(f_\lambda),$$

la *forme de Seifert*, telle que la matrice  $A(f_\lambda)$  de la forme bilinéaire dans la base distinguée est

$$A(f_\lambda) = L + (-1)^{N-1} {}^t L,$$

et

$$T(f_\lambda) = (-1)^{N-1} L {}^t L^{-1}.$$

Un choix de chemin  $q$  dans  $B$  entre 0 et  $\lambda$ , permet d'identifier  $Q(f)$  et  $Q(f_\lambda)$  d'une part, et  $T(f)$  et  $T(f_\lambda)$  d'autre part.

L'image  $G(f)$  du groupe de monodromie  $G(f_\lambda)$  dans  $GL(Q(f)) \cong GL(Q(f_\lambda))$  est appelé le groupe de monodromie de  $f$ , cela ne dépend pas du choix du chemin  $q$ .

### 2.2.3 Factorisation de Sebastiani - Thom

Si  $g \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_M]$  est une autre fonction, la somme de deux singularités  $f \oplus g : \mathbb{C}^{N+M} \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par

$$(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y).$$

Nous pouvons observer

$$\text{Miln}(f \oplus g) \cong \text{Miln}(f) \otimes \text{Miln}(g)$$

et remarquer que la fonction  $g(y) = y^2$  est une unité pour cet opérateur. Cela entraîne que les singularités  $f(x_1, \dots, x_N)$  et

$$f(x_1, \dots, x_N) + x_{N+1}^2 + \dots + x_{N+M}^2$$

sont "presque les mêmes". Pour ce qui suit, il est préférable d'avoir  $N \equiv 3 \pmod{4}$  quitte à ajouter quelques carrés à  $f$ .

Le Théorème fondamental de Sebastiani - Thom, [ST], énonce qu'il existe un isomorphisme naturel de réseaux

$$Q(f \oplus g) \cong Q(f) \otimes_{\mathbb{Z}} Q(g),$$

les opérateurs de monodromie sont alors reliés par l'égalité suivante :

$$T_{f \oplus g} = T_f \otimes T_g.$$

Par conséquent, et cette dernière remarque aura toute son importance par la suite, si

$$\text{Spec}(T_f) = \left\{ e^{\mu_p \frac{2i\pi}{h_1}} \right\} \text{ et } \text{Spec}(T_g) = \left\{ e^{\nu_q \frac{2i\pi}{h_2}} \right\}$$

alors

$$\text{Spec}(T_{f \oplus g}) = \left\{ e^{(\mu_p h_2 + \nu_q h_1) \frac{2i\pi}{h_1 h_2}} \right\}$$



### 2.2.4 Singularités simples

D'après [AVGZ] (a), 15.1, les singularités simples sont

$$x^{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (A_n)$$

$$x^2y + y^{n-1}, \quad n \geq 4 \quad (D_n)$$

$$x^4 + y^3 \quad (E_6)$$

$$xy^3 + x^3 \quad (E_7)$$

$$x^5 + y^3 \quad (E_8)$$

Leurs noms proviennent des faits suivants :

- Leur réseau de cycles évanescents peut être identifié avec le réseau de racines correspondant ;
- Le groupe de monodromie s'identifie avec le groupe de Weyl correspondant ;
- La monodromie classique  $T_f$  est un élément de Coxeter, donc l'ordre  $h$  est égal au nombre de Coxeter, et

$$\text{Spec}(T_f) = \left\{ e^{\frac{2ik_1\pi}{h}}, \dots, e^{\frac{2ik_r\pi}{h}} \right\}$$

où les entiers

$$1 = k_1 < k_2 < \dots < k_r = h - 1,$$

sont les exposants du système de racines.

Nous discuterons des systèmes  $D_4$ ,  $E_6$  et  $E_8$  dans le détail par la suite.

## 2.3 La correspondance Cartan - Coxeter

Étudions dans cette section, le lien entre la matrice de Cartan d'un système de racines  $R$  et les transformations de Coxeter. Dans un premier temps, §2.3.1 et §2.3.2, nous rappelons certaines définitions et expliquons la *correspondance Cartan - Coxeter*. Dans le paragraphe suivant, §2.3.3, nous exploitons cette correspondance pour établir un lien entre les vecteurs propres de la matrice de Cartan et ceux d'une transformation de Coxeter. Nous terminons par l'exemple du système de racines  $A_n$  afin d'illustrer notre propos.

### 2.3.1 Réseaux, polarisation, élément de Coxeter

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notions de *réseau polarisé* et d'*automorphisme de Coxeter* d'un réseau polarisé.

Nous appelons un *réseau*, une paire  $(Q, A)$  où  $Q$  est un groupe libre abélien, et  $A : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$  est une application bilinéaire symétrique, appelée *matrice de Cartan*.

**Remarque.** Nous pouvons identifier  $A$  avec l'application

$$A : Q \rightarrow Q^\vee := \text{Hom}(Q, \mathbb{Z}).$$

Un *réseau polarisé* est un triplet  $(Q, A, L)$ , où  $(Q, A)$  est un réseau et  $L : Q \xrightarrow{\sim} Q^\vee$ , appelé *variation* ou *matrice de Seifert*, est un isomorphisme tel que

$$A = A(L) := L + L^\vee$$

où,  $L^\vee : Q = Q^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} Q^\vee$  est le conjugué de  $L$ .

L'*automorphisme de Coxeter* d'un réseau polarisé est défini par

$$C = C(L) := -L^{-1}L^\vee \in GL(Q).$$

Nous dirons que les opérateurs  $A$  et  $C$  sont en *correspondance Cartan - Coxeter*.

**Exemple.** Considérons  $(Q, A)$  un réseau, et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une  $\mathbb{Z}$ -base ordonnée de  $Q$ . La matrice dans cette base de l'application  $A$  est symétrique :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (A(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{Z}).$$

Supposons que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , les coefficients  $a_{ii}$  sont pairs. Nous définissons alors la matrice de  $L$  comme l'unique matrice triangulaire supérieure telle que  $A = L + {}^t L$ . En particulier, si  $L = (\ell_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , nous avons  $\ell_{ii} = \frac{a_{ii}}{2}$ . Dans nos exemples suivants, nous aurons  $a_{ii} = 2$  pour tout  $i$ .

Nous appelons  $L$ , la *polarisation standard* associée à une base ordonnée.  $\otimes$

Remarquons que les réseaux polarisés forment un groupoïde. En effet, un isomorphisme de réseaux polarisés  $f : (Q_1, A_1, L_1) \xrightarrow{\sim} (Q_2, A_2, L_2)$  est, par définition, un isomorphisme de groupes abéliens  $f : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$  tel que  $L_1(x, y) = L_2(f(x), f(y))$  (et par conséquent, nous avons également  $A_1(x, y) = A_2(f(x), f(y))$ ).

Le lemme suivant donne plusieurs égalités entre les applications  $A, C$  et  $L$ .

**Lemme 17.**

1.  $A(x, y) = A(Cx, Cy)$ .
2. Pour tout  $P \in GL(Q)$ ,

$$A(P^\vee LP) = P^\vee A(L)P \text{ et } C(P^\vee LP) = P^{-1}C(L)P.$$

### 2.3.2 Décomposition blanche/noire et Théorème de Steinberg

Dans ce paragraphe, nous souhaitons expliquer pourquoi nous parlons de *correspondance de Cartan - Coxeter*. Pour cela, nous rappelons un résultat de R. Steinberg sur la matrice de Cartan d'un système de racines  $R$  et une transformation de Coxeter, adaptée

à une décomposition blanche/noire des sommets du diagramme de Dynkin  $\Gamma(R)$ . Voir [Ste], [Cas].

Considérons  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  une base de racines simples d'un système de racines  $R$  fini, réduit, irréductible (pas nécessairement simplement enlacé). Notons  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} = (\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$  la matrice de Cartan associée et  $\Gamma(R)$  le diagramme de Dynkin correspondant.

Choisissons une coloration blanche/noire des sommets du graphe  $\Gamma(R)$  telle que deux sommets voisins soient de couleurs différentes. Une telle coloration est possible puisque  $\Gamma(R)$  est un arbre, il est donc 2-coloriable, voir §2.5.3.

Ordonnons ensuite les racines simples, de telle sorte que les  $p$  premières racines soient noires, et les  $r - p$  restantes soient blanches. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous considérons uniquement cette nouvelle base. Dans celle-ci,  $A$  est une matrice par blocs de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2I_p & X \\ Y & 2I_{r-p} \end{pmatrix}$$

Considérons une transformation de Coxeter adaptée à cette décomposition blanche/noire :

$$C = s_1 s_2 \dots s_r = c_n c_b,$$

avec

$$c_n = \prod_{i=1}^p s_i \text{ et } c_b = \prod_{i=p+1}^r s_i.$$

Ici,  $s_i$  désigne la symétrie par rapport à la racine  $\alpha_i$ . Dans la base  $\{\alpha_i\}$  adaptée à la coloration blanche/noire, les matrices  $c_n$  et  $c_b$  s'écrivent

$$c_n = \begin{pmatrix} -I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } c_b = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Y & -I \end{pmatrix}$$

et nous avons

$$c_n + c_b = 2I - A.$$

Cette observation a été faite par R. Steinberg, [Ste] page 591. Elle peut se réécrire comme suit. Posons

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Alors,  $A = L + U$  et  $C = -U^{-1}L$  et nous sommes dans le contexte du paragraphe 2.3.1, cela explique pourquoi nous parlons de *correspondance de Cartan - Coxeter*.

### 2.3.3 Correspondance des vecteurs propres

À présent, nous établissons une correspondance entre les vecteurs propres de la matrice de Cartan  $A$  et ceux de la transformation de  $C$ .

**Théorème 18.** *Soient*

$$L = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ Y & I_{r-p} \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{r-p} \end{pmatrix}$$

deux matrices par blocs. Posons  $A = L + U$  et  $C = -U^{-1}L$ . Soient  $\mu \in \mathbb{C}^*$  et  $\sqrt{\mu}$  l'une de ses racines carrées, notons

$$\lambda = 2 - \sqrt{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.7)$$

Alors un  $v_C = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $C$  pour la valeur propre  $\mu$  si et seulement si  $v_A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \sqrt{\mu}v_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda^1$ .

*Démonstration.* Par vérification directe. □

**Remarque.** La formule (2.7) donne deux valeurs possibles de  $\lambda$  correspondant à  $\pm\sqrt{\mu}$ . Mais,  $\lambda$  ne change pas si nous remplaçons  $\mu$  par  $\mu^{-1}$ .

**Exemple.** Dans le cas des matrices  $2 \times 2$ , les valeurs propres de  $A$  sont  $2 \pm (\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu^{-1}})$ , et celles de  $C$  sont  $\mu^{\pm 1}$ .

**Corollaire 19.** *Avec les notations de la partie précédente (2.3.1), un vecteur*

$$x = \sum x_j \alpha_j$$

est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $2(1 - \cos \theta)$  si et seulement si le vecteur

$$x_c := \sum e^{\pm \frac{i\theta}{2}} x_j \alpha_j$$

est un vecteur propre de  $C$  pour la valeur propre  $e^{2i\theta}$ . Ici, le signe dans  $e^{\pm \frac{i\theta}{2}}$  est positif si  $i$  est un sommet blanc, négatif sinon.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, nous pouvons considérer une base de racines simples telle que les  $r - p$  premières racines sont blanches et les  $p$  dernières sont noires. Dans cette base,  $A$  est une matrice par blocs que l'on peut décomposer de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2I_{r-p} & X \\ Y & 2I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r-p} & 0 \\ Y & I_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{r-p} & X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = L + U$$

Appliquons le Théorème 18 avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} x_1 \\ \vdots \\ e^{\frac{i\theta}{2}} x_{r-p} \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} x_{r-p+1} \\ \vdots \\ e^{-\frac{i\theta}{2}} x_r \end{pmatrix}$$

---

1. Cette formulation a été suggérée par A. Givental

et les valeurs propres bien connues de la matrice de Cartan  $A$ ,  $\lambda = 2 - 2 \cos \theta_k$ , avec  $\theta_k = \frac{2\pi k}{h}$ . Ici,  $k$  appartient à l'ensemble des exposants de  $R$ , noté  $\text{Exp}(R)$ , et  $h$  est le nombre de Coxeter.

Nous obtenons  $x_c := \sum e^{\pm \frac{i\theta}{2}} x_j \alpha_j$  est un vecteur propre de  $C$  pour la valeur propre  $e^{2i\theta_k}$  si et seulement si  $e^{i\theta_k} x = e^{i\theta_k} \sum x_j \alpha_j$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $2 - 2 \cos \theta_k$ .  $\square$

### 2.3.4 Exemple : le système de racines $A_n$

La figure ci-dessous représente le diagramme de Dynkin de  $A_n$  avec la numérotation usuelle des sommets et une coloration blanche-noire.



FIGURE 2.1 – Diagramme de Dynkin de  $A_n$

Le nombre de Coxeter  $h = n + 1$  et l'ensemble des exposants  $\text{Exp}(A_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Les valeurs propres des éléments de Coxeter sont  $e^{2i\theta_k}$ , et celles de la matrice de Cartan  $A(A_n)$  sont  $2 - 2 \cos \theta_k$ , avec  $\theta_k = \frac{\pi k}{h}$ ,  $k \in \text{Exp}(A_n)$ .

Un vecteur propre de  $A(A_n)$  pour la valeur propre  $2 - 2 \cos \theta$  est

$$x(\theta) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-1-2k)\theta}, \sum_{k=0}^{n-2} e^{i(n-2-2k)\theta}, \dots, 1 \right).$$

Notons  $C(A_n)$  l'élément de Coxeter  $C(A_n) = s_1 s_2 \dots s_n$ . Un vecteur propre pour la valeur propre  $e^{2i\theta}$  est

$$X_{C(A_n)}(\theta) = \left( \sum_{k=0}^{n-j} e^{2ik\theta} \right)_{1 \leq j \leq n}.$$

Les exemples qui suivent seront réutilisés par la suite, lorsque nous calculerons les vecteurs propres de  $E_8, E_6$  et  $D_4$ .

**Exemple.** Pour  $n = 2$ , nous avons

$$C_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_{C(A_2)} = \begin{pmatrix} 1 + e^{2i\gamma} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre pour la valeur propre  $e^{2i\gamma}$ ,  $\gamma \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ .

Pour  $n = 4$ , nous avons de même

$$C_{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_{C(A_4)} = \begin{pmatrix} 1 + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + e^{6i\theta} \\ 1 + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} \\ 1 + e^{2i\theta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre pour la valeur propre  $e^{2i\theta}$ ,  $\theta \in \{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\}$ .

## 2.4 Produit de Sebastiani - Thom, factorisation de $E_8$

Dans cette partie, notre objectif est de donner une expression des vecteurs propres des matrices de Cartan de  $E_8$ ,  $E_6$  et  $D_4$ . Le raisonnement est similaire pour ces trois systèmes de racines, aussi nous ne détaillons que le cas de  $E_8$  et donnons à la fin de la partie (§2.4.7), les résultats pour  $E_6$  et  $D_4$ .

La nouvelle méthode de calcul des vecteurs propres que nous proposons repose sur la décomposition de  $E_8$  :

$$E_8 = A_4 \star A_2 \star A_1.$$

$\star$  désigne le produit de Sebastiani – Thom que nous définissons dans le paragraphe §2.4.1. Après quelques remarques élémentaires sur cette décomposition, nous démontrons le théorème suivant (voir Théorème 21) :

**Théorème** (Gabriellov, [Gab], Section 6, Exemple 3). *Il existe une polarisation du réseau de racines  $Q(E_8)$  et un isomorphisme de réseaux polarisés*

$$\Gamma : Q(A_4) \star Q(A_2) \star Q(A_1) \xrightarrow{\sim} Q(E_8). \quad (2.8)$$

La démonstration repose sur les transformations de Gabriellov – Picard – Lefschetz. Signalons au passage que nous étudions dans le Chapitre 4, l'action de ses transformations sur l'ensemble des bases ordonnées des systèmes de racines simplement enlacés.

Ce théorème nous permet de calculer dans le paragraphe §2.4.5 les coordonnées des vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $E_8$ , notée  $A(E_8)$ . Et dans le paragraphe suivant, nous comparons l'expression du vecteur de Perron - Frobenius de  $A(E_8)$  à celle obtenue par Zamolodchikov, dans ces travaux [Zam1] et [Zam2].

### 2.4.1 Produit de Sebastiani - Thom

Définissons le produit de Sebastiani – Thom  $\star$  de deux réseaux polarisés. Le produit de Sebastiani – Thom va nous permettre de décomposer le système de racines  $E_8$  en  $A_4 \star A_2 \star A_1$ .

**Definition 20.** Considérons deux réseaux polarisés  $(Q_1, A_1, L_1)$  et  $(Q_2, A_2, L_2)$ . Posons  $Q = Q_1 \otimes Q_2$ , d'où

$$L := L_1 \otimes L_2 : Q \xrightarrow{\sim} Q^\vee,$$

et définissons

$$A := A_1 \star A_2 := L + L^\vee : Q \xrightarrow{\sim} Q^\vee.$$

Le triplet  $(Q, A, L)$  est appelé *produit de Sebastiani - Thom* des réseaux polarisés  $Q_1$  et  $Q_2$ , il est noté  $Q_1 \star Q_2$ .

**Remarque.** Nous avons,

$$C(L) = -C(L_1) \otimes C(L_2) \in GL(Q_1 \otimes Q_2).$$

Nous pouvons en déduire que si  $\text{Spec}(C(L_i)) = \{e^{\frac{2i\pi k_j}{h_j}}, k_j \in K_i\}$  pour  $i = 1, 2$ , alors

$$\text{Spec}(C(L)) = \{-e^{2i\pi\left(\frac{k_m}{h_1} + \frac{k_n}{h_2}\right)}, (k_m, k_n) \in K_1 \times K_2\}.$$

### 2.4.2 $E_8$ et $A_4 \star A_2 \star A_1$ : analyse élémentaire

Pour commencer notre étude, nous observons le rang, le nombre de Coxeter, et les exposants de  $E_8$  et de  $A_4 \star A_2 \star A_1$ . Commençons le rang,

$$r(E_8) = 8 = r(A_4)r(A_2)r(A_1)$$

le nombre de Coxeter,

$$h(E_8) = h(A_4)h(A_2)h(A_1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$$

Nous pouvons en déduire que

$$|R(E_8)| = 240 = |R(A_4)||R(A_2)||R(A_1)|.$$

Les exposants de  $E_8$  sont 1, 7, 13, 19, 11, 17, 23, 29. Tous ces nombres, à l'exception de 1, sont premiers et ce sont tous les nombres premiers  $\leq 30$ , et ne divisant pas 30. Ils peuvent être déterminés par la formule suivante :

$$\frac{i}{5} + \frac{j}{3} + \frac{1}{2} = \frac{30 + k(i, j)}{30}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

donc

$$k(i, 1) = 1 + 6(i - 1) = 1, 7, 13, 19$$

$$k(i, 2) = 1 + 10 + 6(i - 1) = 11, 17, 23, 29.$$

Cela montre que les exposants de  $E_8$  sont les mêmes que ceux de  $A_4 \star A_2 \star A_1$ .

Le théorème suivant est plus délicat.

### 2.4.3 Décomposition de $Q(E_8)$

**Théorème 21** (Gabrielov, [Gab], Section 6, Exemple 3). *Il existe une polarisation du réseau de racines  $Q(E_8)$  et un isomorphisme de réseaux polarisés*

$$\Gamma : Q(A_4) \star Q(A_2) \star Q(A_1) \xrightarrow{\sim} Q(E_8). \quad (2.9)$$

Dans ce théorème,  $Q(A_n)$  désigne le réseau de racines de  $A_n$  avec la matrice de Cartan standard et la polarisation décrite plus tôt :

$$A(A_n) = L(A_n) + {}^t L(A_n)$$

où  $L(A_n)$  est la matrice de Seifert, triangulaire supérieure.

Dans la preuve du théorème, l'isomorphisme  $\Gamma$  est donné explicitement. La démonstration repose sur les transformations de Gabrielov – Picard – Lefschetz que nous étudions dans le Chapitre 4.

**Les transformations de Gabrielov - Picard - Lefschetz**  $\alpha_m, \beta_m$ .  $(Q, (\cdot, \cdot))$  désigne un réseau de rang  $r$  muni d'un produit scalaire. Nous introduisons deux ensembles de transformations  $\{\alpha_m\}$  et  $\{\beta_m\}$  sur l'ensemble des bases ordonnées de  $Q$ .

Si  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$  est une base et  $m \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ , posons

$$(\alpha_m(x))_i = \begin{cases} x_{m+1} + (x_{m+1}, x_m)x_m & \text{si } i = m \\ x_m & \text{si } i = m + 1 \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$(\beta_m(x))_i = \begin{cases} x_m & \text{si } i = m - 1 \\ x_{m-1} + (x_{m-1}, x_m)x_m & \text{si } i = m \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous définissons également des transformations  $\gamma_m$  par

$$(\gamma_m(x))_i = \begin{cases} -x_m & \text{si } i = m \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Preuve du Théorème 21.

*Démonstration. Une base de  $Q_*$ .*

Pour  $n = 4, 2, 1$ , considérons une base de racines simples  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $Q(A_n)$ .  $Q(A_n)$  est muni du produit scalaire induit par la matrice de Cartan  $A(A_n)$ .

Le produit tensoriel des trois réseaux

$$Q_* = Q(A_4) \otimes Q(A_2) \otimes Q(A_1)$$

est muni de la base suivante, ordonnée dans l'ordre lexicographique :

$$(f_1, \dots, f_8) := (e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, \\ e_3 \otimes e_1 \otimes e_1, e_3 \otimes e_2 \otimes e_1, e_4 \otimes e_1 \otimes e_1, e_4 \otimes e_2 \otimes e_1).$$

Introduisons de plus, un produit scalaire  $(x, y)$  sur  $Q_*$  donné, dans la base  $\{f_i\}$ , par la matrice

$$A_* = A_4 \star A_2 \star A_1.$$

**Passage de  $A_4 \star A_2 \star A_1$  à  $E_8$ .**

Considérons la base  $f = \{f_1, \dots, f_8\}$  du réseau  $Q_*$  décrite dans la partie §2.4.3 et appliquons lui la transformation

$$G' = \gamma_2 \gamma_1 \beta_4 \beta_3 \alpha_3 \alpha_4 \beta_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \beta_6 \beta_3 \alpha_1, \quad (2.10)$$

voir [Gab], Exemple 3. Ici, remarquons que  $\gamma_2 \gamma_1 = \alpha_1^6$ , voir [Bri].



Alors, la base  $G'(f)$  a pour matrice d'intersection, celle donnée par le graphe de Dynkin de  $E_8$  avec les sommets ordonnés comme sur la Figure 2.2, c'est à dire

$$A_G(E_8) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 7 - 8$   
 $\quad \quad \quad |$   
 $\quad \quad \quad 4$

FIGURE 2.2 – Ordre de Gabrielov des racines simples de  $E_8$

Cela termine la démonstration du théorème 21. □

### 2.4.4 Ordre des racines

Le théorème 21 induit une bijection entre la base  $\{f_1, \dots, f_8\}$  et une base de racines simples de  $E_8$  ordonnées comme sur la Figure 2.2. Cette bijection va nous permettre de calculer les coordonnées des vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $E_8$  à partir de celles des vecteurs propres des matrices de Cartan de  $A_4, A_2$  et  $A_1$ . Cependant, avant de calculer ces coordonnées, nous avons choisi de privilégier l'ordre des racines simples de Bourbaki, rappelé dans la Figure 2.3 ci-dessous. Le passage de l'ordre de Gabrielov à celui de Bourbaki est l'objet de cette partie.

**L'application induite sur l'ensemble des racines.** Par définition, l'isomorphisme de réseaux  $\Gamma$ , (2.9), induit une bijection entre les bases

$$g : \{f_1, \dots, f_8\} \xrightarrow{\sim} \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\} \subset R(E_8)$$

où  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$  est une base de racines simples, et une application

$$G : R(A_4) \times R(A_2) \times R(A_1) \rightarrow R(E_8)$$

$$(x, y, z) \mapsto \Gamma(x \otimes y \otimes z)$$

**Remarque.** Ces deux ensembles ont le même cardinal (240) mais  $G$  n'est pas une bijection pour autant, son image est de cardinal 60.

L'ensemble des vecteurs  $\alpha \in Q(E_8)$  tel que  $(\alpha, \alpha) = 2$  coïncide avec le système de racine  $R(E_8)$ , voir [Ser], Première Partie, Ch.5, 1.4.3.



est l'élément de Coxeter factorisé, et

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque.** Remarquons que  $G = G'P$  où  $P$  est la matrice de permutation qui permet le passage de la numérotation de Gabrielov de la Figure 2.2 à celle de Bourbaki (Figure 2.3).

### 2.4.5 Les vecteurs propres de la matrice de Cartan de $E_8$

Nous allons à présent utiliser les résultats qui précèdent pour calculer une expression des vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $E_8$ ,  $A(E_8)$ . Rappelons que  $C_G(E_8) = s_1 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_2 \circ s_5 \circ s_6 \circ s_7 \circ s_8$  est l'élément de Coxeter de Gabrielov avec la numérotation de Bourbaki des racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ .

**Méthode.** Pour obtenir les vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $E_8$ , nous devons passer de  $C_G(E_8)$  à l'élément de Coxeter adapté à la décomposition blanche/noire (comme dans le paragraphe §2.3.2) :

$$C_{NB}(E_8) = s_1 \circ s_4 \circ s_6 \circ s_8 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_5 \circ s_7.$$

Deux éléments de Coxeter sont conjugués dans le groupe de Weyl  $W(E_8)$ . Ici, les éléments  $C_G(E_8)$  et  $C_{NB}(E_8)$  sont conjugués par l'élément  $w \in W(E_8)$ ,

$$C_G(E_8) = w^{-1}C_{NB}(E_8)w$$

tel que

$$w = s_7 \circ s_5 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_6 \circ s_4 \circ s_5 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2$$

Cette expression de  $w$  a été obtenue en appliquant l'algorithme décrit dans [Cas].

Nous obtenons que si  $x_*$  est un vecteur propre de  $C_*(E_8)$ , alors

$$x_{NB} = wG^{-1}x_*$$

est un vecteur propre de  $C_{NB}(E_8)$ . Or nous connaissons les vecteurs propres de  $C_*(E_8)$ , ce qui nous fournit une façon de calculer les vecteurs propres de  $C_{NB}(E_8)$ ? Rappelons que leurs expressions ont un lien avec les vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $A(E_8)$ , en vertu du Théorème 18.

**Application.** Donnons, à présent, l'expression des vecteurs propres de  $A(E_8)$  obtenue avec cette méthode.

Notons  $\theta = \frac{a\pi}{5}$ ,  $1 \leq a \leq 4$ ,  $\gamma = \frac{b\pi}{3}$ ,  $1 \leq b \leq 2$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , et posons

$$\alpha = \theta + \gamma + \delta = \pi + \frac{k\pi}{30}, \quad k \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}.$$

Les huit valeurs propres de  $A(E_8)$  sont de la forme

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\theta, \gamma) = 2 - 2 \cos \alpha.$$

Un vecteur propre de  $A(E_8)$  pour la valeur propre  $\lambda(\theta, \gamma)$  est

$$X_{E_8}(\theta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma + \theta - \delta) + \cos(\gamma - 3\theta - \delta) + \cos(\gamma - \theta - \delta) \\ \cos(2\gamma + 2\theta) \\ \cos(2\gamma) + \cos(2\gamma + 2\theta) + \cos(2\gamma - 2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(2\theta) \\ \cos(\gamma + 3\theta - \delta) + \cos(\gamma + \theta - \delta) + \cos(-\gamma + 3\theta - \delta) \\ 2 \cos(2\gamma) + 2 \cos(2\gamma + 2\theta) + \cos(2\gamma - 2\theta) + \cos(2\gamma + 4\theta) + \cos(4\theta) + 2 \cos(2\theta) + 1 \\ \cos(\gamma + 3\theta - \delta) + \cos(\gamma + \theta - \delta) \\ \cos(2\gamma) + \cos(2\theta - 2\delta) \\ \cos(\gamma - \theta - \delta) \end{pmatrix}$$

Cette expression peut se simplifier en utilisant les formules de trigonométries usuelles, nous obtenons

$$X_{E_8}(\theta, \gamma) = - \begin{pmatrix} 2 \cos(4\theta) \cos(\gamma - \theta - \delta) \\ - \cos(2\gamma + 2\theta) \\ 2 \cos^2(\theta) \\ -2 \cos(\gamma) \cos(3\theta - \delta) - \cos(\gamma + \theta - \delta) \\ -2 \cos(2\gamma + 3\theta) \cos(\theta) + \cos(2\gamma) \\ -2 \cos \theta \cos(\gamma + 2\theta - \delta) \\ -2 \cos(\gamma + \theta - \delta) \cos(\gamma - \theta + \delta) \\ - \cos(\gamma - \theta - \delta) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

#### 2.4.6 Vecteur de Perron – Frobenius

Dans ce paragraphe, nous comparons nos résultats pour les coordonnées du vecteur propre de Perron - Frobenius de la matrice de Cartan de  $E_8$  à ceux de A. B. Zamolodchikov, [Zam1], [Zam2].

Rappelons que le vecteur propre de Perron – Frobenius correspond à la valeur propre

$$2 - 2 \cos \frac{\pi}{30},$$

et peut être écrit ainsi

$$v_{PF} = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{11\pi}{30} \\ \cos \frac{\pi}{15} \\ 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \\ 2 \cos \frac{2\pi}{30} \cos \frac{\pi}{30} \\ 2 \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{1}{2} \\ 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \\ 2 \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{11\pi}{30} \\ \cos \frac{11\pi}{30} \end{pmatrix}.$$

d'après l'expression 2.11 obtenue dans le paragraphe précédent. Ordonnons les coordonnées de  $v_{PF}$  dans l'ordre croissant, nous obtenons

$$v_{PF<} = \begin{pmatrix} \cos \frac{11\pi}{30} \\ 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{11\pi}{30} \\ 2 \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{11\pi}{30} \\ \cos \frac{\pi}{15} \\ 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \\ 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \\ 2 \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{1}{2} \\ 2 \cos \frac{2\pi}{30} \cos \frac{\pi}{30} \end{pmatrix}$$

L'expression du vecteur propre de Perron – Frobenius obtenue par A. B. Zamolodchikov est

$$v_{Zam}(m) = \begin{pmatrix} m \\ 2m \cos \frac{\pi}{5} \\ 2m \cos \frac{\pi}{30} \\ 4m \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \\ 4m \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \\ 4m \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{30} \\ 8m \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \\ 8m \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \end{pmatrix}$$

En posant  $m = \cos \frac{11\pi}{30}$ , nous trouvons en effet,

$$v_{PF<} = v_{Zam} \left( \cos \frac{11\pi}{30} \right).$$

#### 2.4.7 Factorisation de $E_6$ et $D_4$

La méthode que nous venons de décrire pour déterminer les vecteurs propres de la matrice de Cartan de  $E_8$ , s'applique également à  $E_6$  et  $D_4$  en vertu du théorème suivant.

**Décomposition de  $Q(E_6)$  et  $Q(D_4)$ .**

**Théorème 23** (Gabriellov, [Gab], Section 6). *Il existe une polarisation des systèmes de racines  $Q(E_6)$  et  $Q(D_4)$  et deux isomorphismes de réseaux polarisés*

$$\Gamma_{E_6} : Q(A_3) \star Q(A_2) \star Q(A_1) \xrightarrow{\sim} Q(E_6)$$

$$\Gamma_{D_4} : Q(A_2) \star Q(A_2) \star Q(A_1) \xrightarrow{\sim} Q(D_4)$$

La preuve est exactement la même que pour  $Q(E_8)$ . Nous donnons ci-dessous les étapes clefs, ainsi que le calcul des vecteurs propres des matrices de Cartan  $A(E_6)$  et  $A(D_4)$ .

**Pour  $E_6$ .** Le passage de  $A_3 \star A_2 \star A_1$  à  $E_6$  s'effectue par la transformation

$$G'_{E_6} = \gamma_4 \gamma_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \beta_6 \beta_3 \alpha_1.$$

Après le passage de la numérotation des racines de Gabriellov à celle de Bourbaki, nous obtenons la transformation  $G_{E_6}$

$$G_{E_6} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_6(\mathbb{Z})$$

telle que

$$A(E_6) = {}^t G_{E_6} A_* G_{E_6} \text{ et } C_G(E_6) = G_{E_6}^{-1} C_* G_{E_6}$$

Ici,  $A_* = A(A_3) \star A(A_2) \star A(A_1)$  et  $C_* = C(A_3) \otimes C(A_2) \otimes C(A_1)$ . Par ailleurs,  $C_G(E_6)$  est l'élément de Coxeter de Gabriellov exprimé ci-dessous dans la numérotation de Bourbaki, [Bou],

$$C_G(E_6) = s_1 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_2 \circ s_5 \circ s_6.$$

Notons  $C_{NB}(E_6)$  l'élément de Coxeter adapté à la décomposition blanche/noire.  $C_G(E_6)$  et  $C_{NB}(E_6)$  sont conjugués par

$$v = s_5 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_4 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2 \in W(E_6).$$

Ici,  $W(E_6)$  désigne le groupe de Weyl de  $E_6$ .

Ainsi, si  $x_*$  est un vecteur propre de  $C_*(E_6)$  alors  $x_{BN} = v G_{E_6}^{-1} x_*$  est un vecteur propre de  $C_{NB}(E_6)$ .

Finalement, notons  $\theta = \frac{a\pi}{4}$ ,  $1 \leq a \leq 3$ ,  $\gamma = \frac{b\pi}{3}$ ,  $1 \leq b \leq 2$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$  et

$$\alpha = \theta + \gamma + \delta.$$

Les six valeurs propres de la matrice de Cartan  $A(E_6)$  sont  $\lambda(\alpha) = \lambda(\theta, \gamma) = 2 - 2 \cos \alpha$ . Un vecteur propre de  $A(E_6)$  pour la valeur propre  $\lambda(\alpha)$  est donné par

$$X_{E_6}(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(3\gamma + 3\theta - \delta) \\ 2 \cos^2 \theta \\ -2 \cos(3\gamma + 3\theta - \delta) \cos(\gamma + \theta - \delta) \\ -4 \cos^2 \theta \cos(\gamma + \theta - \delta) \\ 1 - 2 \cos(2\gamma + 3\theta) \cos \theta \\ -2 \cos(\gamma) \cos(\theta - \delta) \end{pmatrix}.$$

**Pour  $D_4$**  Le passage de  $A_2 \star A_2 \star A_1$  à  $D_4$  s'effectue par la transformation

$$G_{D_4} = \gamma_3 \beta_3 \alpha_1.$$

Il n'y a pas de changement d'ordre dans la base de racines simples à effectuer contrairement à  $E_6$  et  $E_8$  et nous avons

$$G_{D_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Z})$$

telle que

$$A(D_4) = {}^t G_{D_4} A_* G_{D_4} \text{ et } C_G(D_4) = G_{D_4}^{-1} C_* G_{D_4}.$$

Ici,  $A_* = A(A_2) \star A(A_2) \star A(A_1)$  et  $C_* = C(A_2) \otimes C(A_2) \otimes C(A_1)$ . Par ailleurs,  $C_G(D_4)$  est l'élément de Coxeter

$$C_G(D_4) = s_1 s_2 s_3 s_4$$

L'élément de Coxeter blanc/noir est  $C_{NB}(D_4)$ . Il est conjugué à  $C_G(D_4)$  par

$$u = s_1 s_2 \in W(D_4).$$

Ainsi, si  $x_*$  est un vecteur propre de  $C_*(D_4)$  alors  $x_{BN} = v G_{D_4}^{-1} x_*$  est un vecteur propre de  $C_{NB}(D_4)$ .

Finalement, notons  $\theta = \frac{a\pi}{3}$ ,  $1 \leq a \leq 2$ ,  $\gamma = \frac{b\pi}{3}$ ,  $1 \leq b \leq 2$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$  et

$$\alpha = \theta + \gamma + \delta.$$

Les valeurs propres de la matrice de Cartan  $A(D_4)$  sont  $\lambda(\alpha) = \lambda(\theta, \gamma) = 2 - 2 \cos \alpha$ . L'expression d'un vecteur propre de  $A(D_4)$  pour la valeur propre  $\lambda(\alpha)$  est :

$$X_{D_4}(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 \cos \gamma \cos(\theta - \delta) \\ 2 \cos(3\gamma + \theta - \delta) \cos(\gamma + \theta - \delta) \\ 2 \cos \theta \cos(\gamma - \delta) \\ \cos(\gamma + \theta - \delta) \end{pmatrix}.$$

## 2.5 $q$ -déformation de Givental

Dans cette partie, nous nous intéressons aux spectres des matrices de Cartan  $q$ -déformées, notées  $A(q)$ . La définition de telles matrices s'inspire des travaux de Givental, [Giv], elle est rappelée dans le paragraphe §2.5.1. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit  $A$  une matrice de Cartan généralisée telle que  $\Gamma(A)$  est un arbre.*

1. *Les valeurs propres de  $A(q)$  sont de la forme*

$$\lambda(q) = 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q \quad (2.12)$$

*où  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .*

2. *Il existe des entiers  $k_1, \dots, k_n$  tels que, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$  alors,*

$$x(q) = (q^{\frac{k_1}{2}} x_1, \dots, q^{\frac{k_n}{2}} x_n)$$

*est un vecteur propre de  $A(q)$  pour la valeur propre de  $\lambda(q)$ .*

La démonstration du théorème fait l'objet du paragraphe §2.5.3. Nous terminons cette partie par une illustration du théorème sur les systèmes de racines  $A_n$  et  $E_8$ , voir §2.5.5.

### 2.5.1 $q$ -déformation des matrices de Cartan

Avant de définir les matrices de Cartan  $q$ -déformées, rappelons la définition d'une matrice de Cartan généralisée.

**Definition 24.** Une matrice de Cartan généralisée est une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

1. pour tout  $i \neq j$ ,  $a_{ij} \neq 0$  implique  $a_{ji} \neq 0$
2. pour tout  $i$ ,  $a_{ii} = 2$ .

Si seulement 1 est vérifiée, nous dirons que  $A$  est une *matrice de pseudo-Cartan*.

À une matrice de pseudo-Cartan  $A$ , nous associons un graphe non orienté  $\Gamma(A)$  dont les sommets sont  $1, \dots, n$  et deux sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête si et seulement si  $a_{ij} \neq 0$ .

Une matrice de Cartan généralisée  $A$  admet une unique décomposition

$$A = L + U$$

où  $L = (\ell_{ij})$  (resp.  $U = (u_{ij})$ ) est triangulaire inférieure (resp. supérieure), et dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.



**Definition 25.** La matrice de Cartan  $q$ -déformée d'une matrice de Cartan généralisée  $A = L + U$  est la matrice définie par

$$A(q) = qL + U$$

Cette définition est inspirée de la théorie de Picard - Lefschetz  $q$ -déformée développée par Givental, [Giv].

### 2.5.2 Correspondance de Cartan - Coxeter $q$ -déformée

Avant d'étudier le spectre et les vecteurs propres des matrices de Cartan généralisées  $q$ -déformées, nous souhaitons revenir sur la correspondance de Cartan - Coxeter évoquée dans les deux chapitres précédents.

Notons  $A$  la matrice de Cartan d'un système de racines  $R$  réduit, irréductible et  $c$  l'élément de Coxeter adapté à une coloration blanche/noire des sommets du diagramme de Dynkin de  $R$ . Alors nous avons  $(2I - A)^2 = c + c^{-1} + 2I$  (voir 1.5.1). Cette relation se  $q$ -déforme.

Soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  une base de racines simples adaptées à la décomposition blanche/noire des sommets du graphe de Dynkin de  $R$ . L'élément de Coxeter  $c$  est défini par

$$c = c_n c_w \text{ avec } c_n = \prod_{i=1}^p s_i \text{ et } c_b = \prod_{i=p+1}^r s_i.$$

Les transformations  $s_i$  se  $q$ -déforment, et Givental a montré que la  $q$ -déformation  $C(q)$  de l'élément  $c$  s'exprimait simplement :

$$C(q) = qc,$$

voir [Giv].

**Proposition 26.** Avec les notations que nous venons d'introduire, les matrices  $A(q)$  et  $C(q)$  vérifient

$$[(1 + q)I - A(q)]^2 = C(q) + q^2 C^{-1}(q) + 2qI \tag{2.13}$$

*Démonstration.* La démonstration est similaire à la relation standard entre la matrice de Cartan et la relation de Coxeter. Dans la base de racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ , les matrices  $A(q)$  et  $C(q)$  s'écrivent :

$$A(q) = qL + {}^tL = \begin{pmatrix} (1+q)I & X \\ q{}^tX & (1+q)I \end{pmatrix} \text{ et } C(q) = -qL^{-1} {}^tL =$$

□

Une conséquence de ce résultat est le corollaire suivant.

**Corollaire 27.** *Les valeurs propres de la matrice de Cartan  $q$ -déformée  $A(q)$  sont*

$$\lambda_k(q) = 1 + q - 2\sqrt{q} \cos \theta_k \quad (2.14)$$

où  $\theta_k = \frac{\pi k}{h}$ ,  $k$  est un exposant de  $R$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà vu que le spectre de  $c$ , nous pouvons en déduire facilement celui de  $C(q)$  :

$$\text{Spec}(C(q)) = \left\{ qe^{2i\theta_k} \mid \theta_k = \frac{k\pi}{h}, k \in \text{Exp}(R) \right\}.$$

D'après la relation (2.13), les valeurs propres de  $[(1+q)I - A(q)]^2$  sont de la forme  $4q \cos^2 \theta_k$ . La dualité des exposants de  $R$  permet de conclure sur les valeurs propres de  $A(q)$ .  $\square$

Dans toute la suite,  $A$  désigne une matrice de Cartan généralisée que nous  $q$ -déformons. Nous allons étudier son spectre et ses vecteurs propres.

### 2.5.3 Spectre et vecteurs propres des matrices de Cartan $q$ -déformées

L'expression des valeurs propres des matrices de Cartan généralisées  $q$ -déformées est donnée dans le Théorème suivant.

**Théorème 28.** *Soit  $A$  une matrice de Cartan généralisée telle que  $\Gamma(A)$  est un arbre.*

1. *Les valeurs propres de  $A(q)$  sont de la forme*

$$\lambda(q) = 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q \quad (2.15)$$

où  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .

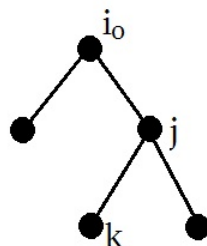
2. *Il existe des entiers  $k_1, \dots, k_n$  tels que, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$  alors,*

$$x(q) = (q^{\frac{k_1}{2}} x_1, \dots, q^{\frac{k_n}{2}} x_n)$$

*est un vecteur propre de  $A(q)$  pour la valeur propre de  $\lambda(q)$ .*

**Remarque.** Dans ce théorème, nous retrouvons l'expression des valeurs propres (2.14) trouvée dans le cadre des matrices de Cartan des systèmes de racines par la correspondance de Cartan – Coxeter  $q$ -déformée.

Avant de prouver le théorème, nous avons besoin de deux lemmes préliminaires.


 FIGURE 2.4 – Exemple :  $i_0 < j < k$ 

**Lemmes préliminaires.** Soit  $\Gamma$  un arbre non orienté, dont l'ensemble des sommets  $I = V(\Gamma)$  est fini.

Nous souhaitons munir l'ensemble des sommets de l'arbre  $\Gamma$  d'un ordre partiel. Pour cela, choisissons une racine  $i_0$ , c'est le sommet minimal pour l'ordre partiel que nous construisons. Chacun des fils de  $i_0$  est plus grand que son père, et ainsi de suite. Un tel ordre définit également une orientation de  $\Gamma$  :  $i \rightarrow j$  si  $i < j$ .

**Exemple.** Si  $\Gamma$  est l'arbre de la Figure 2.4, nous avons  $i_0 < j < k$ .

**Lemme 29.** Supposons que pour chaque arête  $e = (i, j), i < j$  de  $\Gamma$ , nous disposons d'un nombre complexe non nul  $b_{ij}$ . Alors il existe une collection de complexes non nuls  $\{c_i\}_{i \in I}$  telle que

$$b_{ij} = \frac{c_j}{c_i}, \quad i < j$$

pour toutes les arêtes  $(i, j)$ .

Nous pouvons choisir les nombres  $c_i$  de telle sorte que ce sont des produits de  $b_{pq}$ .

*Démonstration.* Posons  $c_{i_0} = 1$  pour l'unique sommet minimal  $i_0$ , et nous définissons les autres  $c_i$  un à un, en descendant de la racine vers les feuilles, en utilisant comme définition

$$c_j = b_{ij}c_i, \quad i < j.$$

Les nombres  $c_i$  ainsi définis sont des produits de  $b_{pq}$ . □

**Lemme 30.** Soient  $A = (a_{ij})$  et  $A' = (a'_{ij})$  deux matrices de pseudo-Cartan, telle que  $\Gamma(A) = \Gamma(A')$ . Posons  $b_{ij} = \frac{a'_{ij}}{a_{ij}}$ . Supposons que  $a_{ii} = a'_{ii}$  pour tout  $i$  et

$$b_{ij} = b_{ji}^{-1} \text{ pour } i \neq j. \tag{2.16}$$

Alors, il existe une matrice diagonale  $D = \text{Diag}(c_1, \dots, c_r)$  telle que

$$A' = D^{-1}AD.$$

Par ailleurs, les nombres  $c_i$  peuvent être choisis comme des produits de  $b_{pq}$ .

*Démonstration.* Choisissons un ordre partiel  $<_p$  sur l'ensemble des sommets de l'arbre  $V(\Gamma)$  comme ci-dessus. (*Attention* : cet ordre partiel diffère en général de l'ordre total standard sur  $\{1, \dots, n\}$ .)

Appliquons le lemme 29 à la collection de nombres  $\{b_{ij}, i \leq_p j\}$ . Nous obtenons une suite de nombres  $c_i$  tels que

$$b_{ij} = \frac{c_j}{c_i}$$

pour tout  $i \leq_p j$ . La condition 2.16 implique que cette égalité reste vraie pour tout  $i \neq j$ .

Par définition, c'est équivalent à dire que

$$a'_{ij} = c_i^{-1} a_{ij} c_j,$$

c'est à dire,  $A' = D^{-1}AD$ . □

**Preuve du théorème 28.** À présent, nous pouvons montrer le théorème 28 sur les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices de Cartan  $q$ -déformées.

*Démonstration.* Considérons deux matrices :  $A(q) = (a(q)_{ij})$  avec  $a(q)_{ii} = 1 + q$  et

$$a(q)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ qa_{ij} & \text{si } i > j \end{cases}$$

et

$$A'(q) = \sqrt{q}A + (1 - \sqrt{q})^2 I = (a(q)'_{ij}).$$

Remarquons que  $a(q)'_{ii} = 1 + q$  et  $a(q)'_{ij} = \sqrt{q}a(q)_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

Nous pouvons appliquer le Lemme 30 aux matrices  $A(q)$  et  $A'(q)$ . Donc, il existe une matrice diagonale  $D$ , dont les coefficients sont des puissances de  $q$ , telle que

$$A(q) = D^{-1}A'(q)D.$$

Or les valeurs propres de  $A'(q)$  sont

$$\lambda(q) = \sqrt{q}\lambda + (1 - \sqrt{q})^2 = 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q.$$

Ainsi, si  $v$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors  $v$  est un vecteur propre de  $A'(q)$  pour  $\lambda(q)$  et  $Dv$  est un vecteur propre de  $A(q)$  pour la valeur propre  $\lambda(q)$ . □

#### 2.5.4 Remarque (M. Finkelberg)

Ce paragraphe est issu d'une observation de M. Finkelberg sur l'expression des valeurs propres des matrices de Cartan  $q$ -déformées :

$$\lambda(q) = 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q$$

Il a remarqué une ressemblance avec le nombre de points d'une courbe elliptique  $X$  sur un corps fini.

En effet, dans nos exemples,  $\lambda = 2 - 2 \cos \theta$ . En posant,

$$\alpha = \sqrt{q}e^{i\theta}$$

(une racine de Frobenius), alors  $|\alpha| = \sqrt{q}$  et

$$\lambda(q) = 1 - \alpha - \bar{\alpha} + q,$$

voir [IR], Chapitre 11, §1, et [Kn], Chapter 10, Theorem 10.5.

Ainsi, les valeurs propres de Coxeter  $e^{2i\theta}$  semblent analogues aux racines de Frobenius d'une courbe elliptique sur  $\mathbb{F}_1$ .

### 2.5.5 Exemples

Afin d'illustrer le Théorème 28, nous donnons les exemples des systèmes de racines  $A_n$  et  $E_8$ .

**Déformation standard pour  $A_n$**  Considérons la  $q$ -déformation suivante de la matrice de Cartan  $A = A(A_n)$  :

$$A(q) = \begin{pmatrix} (1+q) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -q & (1+q) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & -q & (1+q) & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -q & (1+q) \end{pmatrix}$$

Alors, le spectre de  $A(q)$  est

$$\text{Spec}(A(q)) = \{\lambda(q) := 1 + (\lambda - 2)\sqrt{q} + q \mid \lambda \in \text{Spec}(A(1))\}.$$

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur propre de  $A = A(1)$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$x(q) = \left( x_1, q^{\frac{1}{2}}x_2, \dots, q^{\frac{(n-1)}{2}}x_n \right)$$

est un vecteur propre de  $A(q)$  pour la valeur propre  $\lambda(q)$ .

**Déformation standard pour  $E_8$**  Une  $q$ -déformation de la matrice de Cartan est la suivante :

$$A_{E_8}(q) = \begin{pmatrix} 1+q & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+q & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 1+q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & -q & 1+q & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & 1+q & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1+q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1+q & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1+q \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont

$$\lambda(q) = 1 + q + (\lambda - 2)\sqrt{q} = 1 + q - 2\sqrt{q} \cos \theta$$

où  $\lambda - 2 \cos \theta$  est une valeur propre de la matrice de Cartan  $A(E_8)$ .

De plus, si  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$  est un vecteur propre de  $A(E_8)$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$X = (x_1, \sqrt{q}x_2, \sqrt{q}x_3, qx_4, q\sqrt{q}x_5, q^2x_6, q^2\sqrt{q}x_7, q^3x_8)$$

est un vecteur propre de  $A_{E_8}(q)$  pour la valeur propre  $\lambda(q)$ .

# Chapitre 3

## Systemes de Toda $q$ -déformés

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>80</b>
<b>3.2</b>	<b>Relations de commutation</b>	<b>82</b>
3.2.1	Les équations de Toda	82
3.2.2	Opérateur et commutativité	83
3.2.3	$q$ -déformation des masses	86
<b>3.3</b>	<b>Solitons</b>	<b>86</b>
3.3.1	Un cas particulier, $A_1$	88
3.3.2	Mise en place de la méthode de Hirota	89
3.3.3	Développement en série	90
3.3.4	Construction d'une solution	93
3.3.5	Compléments sur les constantes $c_{j,a}^{(k)}$	96
3.3.6	Perspectives	99

---

### 3.1 Introduction

Soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  une base de racines simples d'un système de racines  $R$  irréductible. Notons

$$\theta = \sum_{j=1}^r n_j \alpha_j$$

la plus longue racine, et  $\alpha_0 := -\theta$  avec  $n_0 = 1$ , de telle sorte que

$$\sum_{j=0}^r n_j \alpha_j = 0$$

Soient  $A := A(R)$  la matrice de Cartan du système  $R$  et  $(\cdot) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée  $W$ -invariante.

Les équations du mouvement dans la théorie de Toda affine sont alors données par

$$\square\phi + \frac{m^2}{\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)) = 0 \quad (3.1)$$

dans le cas réel, et par

$$\square\phi = -\frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(i\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)) \quad (3.2)$$

dans le cas complexe, où  $m$  et  $\beta$  sont des constantes réelles et  $\phi : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{h}$ .

Ici,  $\square\phi = \ddot{\phi}(x, t) - \phi''(x, t)$  où  $\dot{\phi}(x, t)$  désigne la dérivée de  $\phi$  par rapport à sa variable  $t$ , et  $\phi'$  la dérivée par rapport à  $x$ .

Inspirés par l'équation (3.1), nous introduisons dans la première partie, deux applications  $M$  et  $\tilde{M}$  de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^r$  dans  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ , où  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$  désigne l'ensemble des matrices de taille  $r$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{M} : \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^r &\rightarrow \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \\ (B, n) &\mapsto D = (d_{ij}) \end{aligned}$$

avec

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, d_{ij} = n_j (e^{\beta b_{ji}} - e^{-\beta \sum_{p=1}^r n_p b_{pi}})$$

$M$  est l'approximation linéaire de  $\tilde{M}$ , voir §3.2.2. L'objectif de cette première partie est d'étudier des relations de commutations, le résultat principal en est :

**Théorème.** *Si  $A := A(A_r)$  est la matrice de Cartan de type  $A_r$  et  $n = (1, \dots, 1)$ , alors*

$$[\tilde{M}(A(q), n), \tilde{M}(A(q'), n)] = 0 \quad (3.3)$$



Ici,  $A(q)$  désigne une  $q$ -déformation de la matrice  $A$  définie comme suit :

$$A(q) = A^+ + qA^-$$

où  $A^+$  (respectivement  $A^-$ ) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), voir §3.2.2.

Une telle déformation a été introduite par A. Givental, dans l'article [Giv], où il propose une version  $q$ -déformée de la théorie de Picard - Lefschetz.

Cette déformation nous permet également d'introduire un *produit scalaire  $q$ -déformé* :

**Definition.** Le produit scalaire  $q$ -déformé  $(\cdot)_q$  est l'application bilinéaire définie sur  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, (\alpha_i \cdot \alpha_j)_q = A(q)_{ij}$$

Dans la deuxième partie, nous proposons une version  $q$ -déformée des équations de la théorie de Toda affine complexe données par :

$$\square\phi = -\frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^r n_j \alpha_j \exp(i\beta(\alpha_j \cdot \phi)_q) \quad (3.4)$$

Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de type  $A_r$ , nous construisons des solutions de ces équations, qui sont des  $q$ -déformations des 1-solitons classiques, en utilisant la méthode de Hirota décrite dans l'article de T. Hollowood, [Hol].

Posons  $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{r+1}}$ . Soit  $a \in \{1, \dots, r\}$  un exposant de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$ .

Soient  $v_a = v_a(q), \sigma_a = \sigma_a(q) \in \mathbb{C}$  des solutions d'une équation

$$\sigma_a^2(v_a^2 - 1) = m^2(\zeta^a + q\zeta^{-a} - 1 - q).$$

Introduisons des nombres

$$\omega_{a,\ell,k} = -\frac{k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell}{k^2(\zeta^{-a} - 1) + 1 - \zeta^{-\ell}},$$

$0 \leq \ell \leq r$ .

**Théorème.** *Supposons que  $q$  est distinct de  $\omega_{a,\ell,k}, k \geq 0 \leq \ell \leq r$ . Alors les équations de Toda affine complexes  $q$ -déformées admettent une solution (dite "1-soliton")  $\phi_{(a)}(x, t) \in \mathfrak{h}[[\epsilon]]$  de la forme*

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \ln(\tau_{j,a}(x, t))$$

avec, pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ ,

$$\tau_{j,a}(x, t) = 1 + \zeta^{aj} e^{\sigma_a(x-v_a t)} \epsilon + \sum_{k=2}^{\infty} c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x-v_a t)} \epsilon^k.$$

Les nombres  $c_{j,a}^{(k)}$ ,  $k \geq 2$ , sont des constantes qui, en tant que des fonctions de  $q$ , sont de la forme

$$c_{j,a}^{(k)} = (q-1) \frac{N_{j,a}^{(k)}(q)}{D_a^{(k)}(q)}$$

où  $N_{j,a}^{(k)}(q)$  est un polynôme en  $q$  calculé par récurrence, et

$$D_a^{(k)}(q) = \prod_{j=2}^k \prod_{\ell=0}^r (q - \omega_{a,\ell,k}).$$

Ce théorème est démontré dans le paragraphe § 3.3 ci-dessous.

Pour  $q = 1$  les coefficients  $c_{j,a}^{(k)}$  disparaissent, et nous retrouvons les 1-solitons étudiés dans [Hol].

## 3.2 Relations de commutation

### 3.2.1 Les équations de Toda

Les équations du mouvement pour la théorie de Toda affine sont données par

$$\square\phi + \frac{m^2}{\beta} \sum_{j=0}^r n_j \exp(\beta(\alpha_j^\vee \cdot \phi)) \alpha_j^\vee = 0 \quad (3.5)$$

Ici,  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  désigne une fonction lisse et  $\square\phi = \ddot{\phi} - \phi''$ .  $\beta$  et  $m^2$  sont des constantes réelles.

Introduisons à présent, deux opérateurs  $\tilde{\mathfrak{m}}$  et  $\mathfrak{m}$ . Soit  $\tilde{\mathfrak{m}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  une application non linéaire définie par

$$\tilde{\mathfrak{m}}(h) = \sum_{j=0}^r n_j \exp(\beta(\alpha_j^\vee \cdot h)) \alpha_j^\vee \quad (3.6)$$

de sorte que, l'équation (3.5) se réécrit

$$\square\phi + \frac{m^2}{\beta} \tilde{\mathfrak{m}}(\phi) = 0$$

**Definition 31.** L'opérateur des masses  $\mathfrak{m}$  est l'approximation linéaire de l'application  $\tilde{\mathfrak{m}}$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathfrak{h} \\ h &\mapsto \sum_{j=0}^r n_j (\alpha_j^\vee \cdot h) \alpha_j^\vee \end{aligned}$$

**Remarque :**  $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\beta + O(\beta^2)$

### 3.2.2 Opérateur et commutativité

**Définition des opérateurs.** La base de racines simples  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  constitue une base de  $\mathfrak{h}$  et nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\alpha_i) &= \sum_{j=1}^r n_j (\alpha_j \cdot \alpha_i) \alpha_j + n_0 (\alpha_0 \cdot \alpha_i) \alpha_0 \\ &= \sum_{j=1}^r n_j a_{ji} \alpha_j + \sum_{j=1}^r n_j \sum_{p=1}^r n_p (\alpha_p \cdot \alpha_i) \\ &= \sum_{j=1}^r n_j (a_{ji} + \sum_{p=1}^r n_p a_{pi}) \alpha_j \end{aligned}$$

Définissons alors une application

$$\begin{aligned} M : \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^r &\rightarrow \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \\ (B, n) &\mapsto C = (c_{ij}) \end{aligned}$$

avec

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, c_{ij} = n_j (b_{ji} + \sum_{p=1}^r n_p b_{pi})$$

de telle sorte que  $M(A(R), (n_1, \dots, n_r)) \alpha_i = \mathbf{m}(\alpha_i)$ .

**Remarque :** Cette application est linéaire par rapport à la première variable.

De façon similaire, nous pouvons définir une application

$$\begin{aligned} \tilde{M} : \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^r &\rightarrow \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \\ (B, n) &\mapsto D = (d_{ij}) \end{aligned}$$

avec

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, d_{ij} = n_j (e^{\beta b_{ji}} - e^{-\beta \sum_{p=1}^r n_p b_{pi}})$$

Cette application n'est pas linéaire et vérifie  $\tilde{M}(A(R), (n_1, \dots, n_r)) \alpha_i = \tilde{\mathbf{m}}(\alpha_i)$ .

**Relations de commutations.** L'objectif de cette partie est d'étudier des relations de commutations impliquant les deux opérateurs introduits ci-dessus.

**Remarque :** Pour deux matrices  $B, B'$  quelconques,

$$[\tilde{M}(B), \tilde{M}(B')] = 0 \Rightarrow [M(B), M(B')] = 0$$

par unicité du développement de Taylor en la variable  $\beta$ .

**$q$ -déformation de Givental.** Pour toute matrice  $B$ , introduisons sa décomposition sous la forme

$$B = B^+ + B^- \quad (3.7)$$

où  $B^+ = (b_{ij}^+)$  (respectivement  $B^- = (b_{ij}^-)$ ) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) avec

$$b_{ii}^+ = b_{ii}^- = \frac{b_{ii}}{2}$$

Suivant les travaux de Givental [Giv], introduisons

**Definition 32.** Pour toute matrice  $B$ , on note  $B(q)$  la matrice  $q$ -déformée définie par

$$B(q) = B^+ + qB^-$$

pour  $q$  quelconque.

**Le cas de  $A_2$ .**

**Proposition 33.** Soient  $r = 2$ ,  $n = (1, 1)$  et  $A$  une matrice symétrique. Alors

$$[M(A^+, n), M(A^-, n)] = 0 \quad (3.8)$$

si et seulement si  $A$  est diagonale ou  $A$  est proportionnelle à la matrice de Cartan de  $A_2$ , c'est à dire  $A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

*Démonstration.* Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  une matrice symétrique,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ .

Alors, l'égalité  $[M(A^+, n), M(A^-, n)] = 0$  est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} (a + 4b + c)b = 0 \\ (a - 2b - 2c)b = 0 \end{cases}$$

Soit  $b = 0$  et la matrice  $A$  est alors diagonale, soit  $b \neq 0$  et  $a = c = -2b$  est l'ensemble des solutions du système, ce qui nous donne  $A$  proportionnelle à la matrice de Cartan de  $A_2$ . □

Remarquons que pour  $r = 3$ , il existe des matrices symétriques qui ne sont ni diagonales, ni proportionnelles à la matrice de Cartan de  $A_3$ , mais qui vérifie la relation (3.8). Par exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas de  $A_r$ .

**Théorème 34.** Si  $A := A(A_r)$  la matrice de Cartan de type  $A_r$  et  $n = (1, \dots, 1)$ , alors

$$[\tilde{M}(A^+, n), \tilde{M}(A^-, n)] = 0 \quad (3.9)$$

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un résultat intermédiaire, dont la démonstration se fait par du calcul matriciel élémentaire :

**Lemme 35.** Soit

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & & \dots & \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Alors,

$$U_n^n = (-1)^{n+1} V_n$$

*Démonstration du Théorème 34.* Nous avons

$$\tilde{M}(A^-, n) = (e^\beta - 1)I_r + (1 - e^\beta)U_r$$

$$\tilde{M}(A^+, n) = (e^\beta - 1)I_r + (1 - e^{-\beta})V_r$$

Comme  $V_r$  est une puissance de  $U_r$  d'après le lemme précédent,  $\tilde{M}(A^-, n)$  et  $\tilde{M}(A^+, n)$  commutent.  $\square$

**Corollaire 36.** Si  $A := A(A_r)$  est la matrice de Cartan de type  $A_r$  et  $n = (1, \dots, 1)$ , alors

$$[M(A(q), n), M(A(q'), n)] = 0 \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Le théorème 34. implique que  $[M(A^+, n), M(A^-, n)] = 0$  et nous obtenons que  $[M(A(q), n), M(A(q'), n)] = 0$  par linéarité de l'application  $M$  par rapport à sa première variable.  $\square$

En fait, nous pouvons donner un résultat plus fort que le corollaire 36. puisque nous avons :

**Théorème 37.** Si  $A := A(A_r)$  est la matrice de Cartan de type  $A_r$  et  $n = (1, \dots, 1)$ , alors

$$[\tilde{M}(A(q), n), \tilde{M}(A(q'), n)] = 0 \quad (3.11)$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\tilde{M}(A(q), n) = (e^{\beta(1+q)} - 1)I_r + (1 - e^{-\beta q})U_r + (1 - e^{-\beta})V_r$$

Et par le lemme 35., nous obtenons le résultat.  $\square$

**Remarque (Givental) :** D'après la correspondance de McKay, nous pouvons réaliser les matrices  $M(A(q), n)$  comme des éléments de l'anneau commutatif des représentations de  $\mu_n$  le groupe cyclique à  $n + 1$  éléments, ce qui explique leur commutativité. Notons que cela ne fonctionne que pour le type  $A_n$ .

### 3.2.3 $q$ -déformation des masses

Dans cette partie, nous supposons que  $\beta = 1$  et  $A(q)$  désigne la  $q$ -déformation de la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie de type  $A_r$  et  $n = (1, 1, \dots, 1)$  est un vecteur de taille  $r$ .

Lorsque  $q = 1$ , il est bien connu que les coordonnées de  $v_{PF}$ , le vecteur de Perron–Frobenius de la matrice de Cartan  $A(1)$ , sont donnés par

$$\sin\left(\frac{k\pi}{r+1}\right), k \in \{1, \dots, r\} \quad (3.12)$$

De plus, les valeurs propres de la matrice  $M(A(1), n)$ , appelées masses, sont proportionnelles aux carrés des coordonnées du vecteur propre de Perron–Frobenius de la matrice de Cartan  $A(1)$ , voir par exemple [BS].

Dans la suite, nous montrons que les valeurs propres de la matrice  $M(A(q), n)$  sont une  $q$ -déformation des carrés des coordonnées de  $v_{PF}$  que l'on peut écrire :

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{r+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\zeta^{-k} + \zeta^k). \quad (3.13)$$

**Proposition 38.** *Les valeurs propres de la matrice  $M(A(q), n)$  sont données par*

$$1 + q - (\zeta^{-k} + q\zeta^k), k \in \{1, \dots, r\} \quad (3.14)$$

où  $\zeta = \exp(\frac{2\pi}{r+1})$ .

La démonstration de cette proposition, repose sur le lemme suivant :

**Lemme 39.** *Les valeurs propres de la matrice  $U_n$  introduite dans le lemme 35. , sont*

$$\{-e^{\frac{2k\pi}{n+1}}, k \in \{1, \dots, n\}\} \quad (3.15)$$

*Démonstration.* Le déterminant de la matrice  $(X.I_n - U_n)$  est  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} X^k$ .  $\square$

*Démonstration de la Proposition 38.* Nous avons  $M(A(q), n) = (1+q).I_r + qU_r + V_r$ , et les lemmes 35. et 39. permettent d'obtenir les valeurs propres de  $M(A(q), n)$ .  $\square$

## 3.3 Solitons

Dans cette deuxième partie, nous allons nous intéresser à l'équation du mouvement pour la théorie de Toda affine complexe  $q$ -déformée :

$$\square\phi = -\frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^r n_j \exp(i\beta(\alpha_j \cdot \phi)_{(q)}) \alpha_j \quad (3.16)$$

où  $m, \beta$  sont des constantes,  $\square\phi(x, t) = \ddot{\phi}(x, t) - \phi''(x, t)$  et  $(x, y)_{(q)}$  désigne le produit scalaire  $q$ -déformé au sens de Givental.

**Le produit scalaire  $q$ -déformé.**

**Definition 40.** Le produit scalaire  $q$ -déformé  $(\cdot)_{(q)}$  est l'application bilinéaire non symétrique définie sur  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, (\alpha_i \cdot \alpha_j)_{(q)} = A(q)_{ij}$$

On se place dans une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de type  $A_r$ , de sorte que

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, n_j = 1$$

**Le résultat principal.** Après avoir traité le cas particulier où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de type  $A_1$  (voir §3.3.1), nous construisons des solutions de (3.16) en suivant la méthode de Hirota décrite dans l'article de T.Hollowood, [Hol].

Notons  $a \in \{1, \dots, r\}$  un exposant de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$ . Soient  $v_a = v_a(q), \sigma_a = \sigma_a(q) \in \mathbb{C}$  des solutions d'une équation de dispersion  $q$ -déformée :

$$\sigma_a^2(v_a^2 - 1) = m^2(\zeta^a + q\zeta^{-a} - 1 - q). \quad (3.17)$$

**Remarque :** Nous pouvons écrire  $\zeta^a + q\zeta^{-a} - 1 - q = 2 \cos_{(q)}\left(\frac{2\pi a}{r+1}\right) - 2_{(q)}$ . Introduisons les nombres

$$\omega_{a,\ell,k} = -\frac{k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell}{k^2(\zeta^{-a} - 1) + 1 - \zeta^{-\ell}}, \quad (3.18)$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{r+1}}$ ,  $a \in \{1, \dots, r\}$  est un exposant de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$  et  $0 \leq \ell \leq r$ .

Dans les parties § 3.3.2 à § 3.3.5 ci-dessous, nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 41.** *Supposons que  $q$  est distinct de  $\omega_{a,\ell,k}, k \geq 0, 0 \leq \ell \leq r$ . Alors les équations de Toda affine complexes  $q$ -déformées admettent une solution (dite "1-soliton")  $\phi_{(a)}(x, t) \in \mathfrak{h}[[\epsilon]]$  de la forme*

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \ln(\tau_{j,a}(x, t))$$

avec, pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ ,

$$\tau_{j,a}(x, t) = 1 + \zeta^{aj} e^{(\sigma_a(x-v_a t)+\xi)\epsilon} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x-v_a t)} \epsilon^k.$$

Les nombres  $c_{j,a}^{(k)}, k \geq 2$ , sont des constantes qui, en tant que des fonctions de  $q$ , sont de la forme

$$c_{j,a}^{(k)} = (q-1) \frac{N_{j,a}^{(k)}(q)}{D_a^{(k)}(q)}$$

où  $N_{j,a}^{(k)}(q)$  est un polynôme en  $q$  calculé par récurrence, et

$$D_a^{(k)}(q) = \prod_{j=2}^k \prod_{\ell=0}^r (q - \omega_{a,\ell,j}).$$

**Les grandes étapes de la démonstrations.** Avant d'entrer dans les détails de la preuve, donnons les grandes lignes de celle-ci.

- §3.3.2 Pour mettre en place la méthode de Hirota, nous effectuons un changement de variable dans les équations de Toda affine complexe  $q$ -déformée, les nouvelles variables sont alors des fonctions  $\tau_{j,a}(x, t)$  pour  $j \in \{0, \dots, r\}$  qui vérifient :

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a} \tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}'' \tau_{j,a} + \tau_{j,a}'^2 = m^2 \tau_{j,a}^{1-q} (\tau_{j+1,a} \tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^{1+q})$$

- §3.3.3 Pour déterminer les fonctions  $\tau_{j,a}$ , nous introduisons leur développement en série selon un paramètre formel  $\epsilon$  :

$$\tau_{j,a}(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{j,a}^{(k)}(x, t) \epsilon^k$$

et trouvons une équation différentielle vérifiée par les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $j \in \{0, \dots, r\}$  :

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{(k)''} = m^2 (q \tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q) \tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$$

- §3.3.4 Nous déterminons la forme des fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  :

$$\tau_{j,a}^{(k)} = c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x - v_a t)} \quad (3.19)$$

où  $\sigma_a$  et  $v_a$  sont deux constantes qui vérifient l'équation de dispersion  $q$ -déformée (3.17). Nous donnons un algorithme de calcul des constantes  $c_{j,a}^{(k)}$ .

- §3.3.5 Enfin, nous étudions les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  et montrons qu'elles ont la forme décrite dans le théorème 41.

### 3.3.1 Un cas particulier, $A_1$

Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de type  $A_1$ , l'équation est dite de "sine-Gordon". En effet, on a

$$\square \phi = -\frac{2m^2}{\beta} \sin(\beta(\alpha \cdot \phi)_{(q)}) \alpha \quad (3.20)$$

La solution est alors

$$\phi(x, t) = \frac{4}{(1+q)\beta} \arctan(\exp(\sigma(x - vt))) \alpha \quad (3.21)$$

où  $\sigma$  et  $v$  sont des constantes qui vérifient  $\sigma^2(1 - v^2) = 2(1+q)m^2$ .



*Démonstration.* En effet, la particularité du cas  $r = 1$  est que

$$\forall j \in \{0, 1\}, (\alpha_j \cdot \phi_{(q)})_q = \frac{1+q}{2} (\alpha_j \cdot \phi_{(q)})$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\square\phi = -\frac{m^2}{i\beta} \sum_{j=0}^1 \alpha_j \exp\left(i\beta \frac{1+q}{2} (\alpha_j \cdot \phi_{(q)})\right) \quad (3.22)$$

En posant  $\tilde{\beta} = \beta \frac{1+q}{2}$  et  $\tilde{m}^2 = \frac{m^2(1+q)}{2}$ , l'équation (3.22) se réécrit :

$$\square\phi = -\frac{\tilde{m}^2}{i\tilde{\beta}} \sum_{j=0}^1 \alpha_j \exp(i\tilde{\beta}(\alpha_j \cdot \phi_{(q)})) \quad (3.23)$$

D'après les travaux de Hollowood, la solution d'une telle équation est

$$\phi(x, t) = \frac{2}{\tilde{\beta}} \arctan(\exp(\sigma(x - vt)))\alpha$$

avec l'équation de dispersion  $\sigma^2(1 - v^2) = 4\tilde{m}^2$ . Autrement dit,

$$\phi(x, t) = \frac{4}{(1+q)\beta} \arctan(\exp(\sigma(x - vt)))\alpha \quad (3.24)$$

avec  $\sigma$  et  $v$  qui vérifient l'équation de dispersion annoncée.  $\square$

Dans toute la suite, nous supposons que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de type  $A_r$  avec  $r > 1$ .

### 3.3.2 Mise en place de la méthode de Hirota

Pour construire une solution de l'équation (3.16), nous allons commencer par effectuer un changement de variables afin d'obtenir des relations de Hirota bilinéaire  $q$ -déformées. Posons

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \ln(\tau_{j,a}(x, t))\alpha_j \quad (3.25)$$

Les nouvelles variables sont donc les fonctions  $\tau_{j,a}(x, t)$  pour  $j \in \{0, \dots, r\}$ , par la suite, nous les noterons simplement  $\tau_{j,a}$ .

Avec ce changement de variable, l'équation du Toda  $q$ -déformée devient

$$\sum_{j=0}^r \frac{\ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}''\tau_{j,a} + \tau_{j,a}'^2}{\tau_{j,a}^2} \alpha_j = m^2 \sum_{j=0}^r \alpha_j \prod_{k=0}^r \tau_{k,a}^{-(\alpha_j \cdot \alpha_k)_{(q)}} \quad (3.26)$$

Nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=0}^r \frac{\ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}''\tau_{j,a} + \tau_{j,a}'^2}{\tau_{j,a}^2} \alpha_j = m^2 \sum_{j=0}^r \frac{\tau_{j-1,a}^q \tau_{j+1,a}}{\tau_{j,a}^{1+q}} \alpha_j \quad (3.27)$$

Nous nous autorisons ici un abus de notation, dans toute la suite,  $\tau_{j,a}$  signifie  $\tau_{j \bmod r+1,a}$ .

Nous obtenons que si les fonctions  $\tau_{j,a}$  sont solutions des équations (3.28) ci-dessous, alors elles sont également solutions des équations (3.27).

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}''\tau_{j,a} + \tau_{j,a}'^2 = m^2(\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^2) \quad (3.28)$$

Nous allons, à présent, construire des solutions de ces équations en se plaçant dans l'algèbre des séries formelles  $\mathbb{C}[[\epsilon]]$ .

### 3.3.3 Développement en série

Introduisons, pour chaque fonction  $\tau_{j,a}(x, t)$ , son développement en série suivant un paramètre quelconque  $\epsilon$  :

$$\tau_{j,a} = 1 + \epsilon\tau_{j,a}^{(1)} + \epsilon^2\tau_{j,a}^{(2)} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^k \tau_{j,a}^{(k)} \in \mathbb{C}[[\epsilon]]$$

Dans ce paragraphe, l'objectif est de trouver des équations différentielles dont les fonctions  $\tau_{j,a}^{(p)}$  sont solutions, en effectuant un développement en série des équations de Hirota (3.28) à tout ordre en  $\epsilon$ .

Après avoir traité le cas de l'ordre 1, nous montrons plus généralement que, pour  $k > 1$ , les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont solutions d'équations différentielles de la forme

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{(k)''} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$$

voir Lemme 43. ci-dessous.

**L'ordre 1.** En effectuant un développement de (3.28) à l'ordre 1 en  $\epsilon$ , nous obtenons que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(1)}$  sont solutions des équations différentielles linaires

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a}^{(1)} - \tau_{j,a}^{(1)''} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(1)} + \tau_{j+1,a}^{(1)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(1)}) \quad (3.29)$$

**À l'ordre  $k > 1$ .**

**Definition 42.** Nous appellerons **monôme de poids  $k$  en  $j$** , tout produit de la forme  $\tilde{\tau}_{s_1,a}^{(t_1)} \dots \tilde{\tau}_{s_n,a}^{(t_n)}$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\tilde{\tau}_{s_i,a}^{(t_i)}$  désigne  $\tau_{s_i,a}^{(t_i)}$  ou l'une de ses dérivées par rapport l'une de ses variables.

2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, s_i \in \{j-1, j, j+1\}$
3.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, 1 \leq t_i < k$
4.  $\sum_{i=1}^n t_i = k$

Nous allons montrer le lemme suivant :

**Lemme 43.** *Pour tout  $k > 1$  et tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ , les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont solutions d'une équation différentielle de la forme :*

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}}) \quad (3.30)$$

où  $\Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$  est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

**Remarque :**  $\Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$  ne dépend que de fonctions  $\tau_{s,a}^{(t)}$  pour  $t < k$ .

*Démonstration.* Rappelons que les fonctions  $\tau_{j,a}(x, t)$  sont solutions des équations

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}^{\prime\prime}\tau_{j,a} + \tau_{j,a}^{\prime 2} = m^2(\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^2)$$

et nous avons posé

$$\tau_{j,a} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^k \tau_{j,a}^{(k)}.$$

Effectuons un développement des équations satisfaites par les fonctions  $\tau_{j,a}$  en  $\epsilon$  à tout ordre, en commençant par le terme de gauche  $\ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}^{\prime\prime}\tau_{j,a} + \tau_{j,a}^{\prime 2}$ .

**Développement du membre de gauche dans (3.28).** Le développement limité à tout ordre de  $\ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}^{\prime\prime}\tau_{j,a} + \tau_{j,a}^{\prime 2}$  est donné par

$$\ddot{\tau}_{j,a}\tau_{j,a} - \dot{\tau}_{j,a}^2 - \tau_{j,a}^{\prime\prime}\tau_{j,a} + \tau_{j,a}^{\prime 2} = \epsilon(\ddot{\tau}_{j,a}^{(1)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(1)}) + \sum_{k=2}^{+\infty} (\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} + \beta_k)\epsilon^k$$

où  $\beta_k$  est défini pour  $k \geq 1$  par :

$$\beta_k = \sum_{s=1}^k \ddot{\tau}_{j,a}^{(s)}\tau_{j,a}^{(k-s)} - \dot{\tau}_{j,a}^{(s)}\dot{\tau}_{j,a}^{(k-s)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(s)}\tau_{j,a}^{(k-s)} + \tau_{j,a}^{\prime(s)}\tau_{j,a}^{\prime(k-s)}$$

Remarquons que  $\beta_k$  est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

À présent, intéressons nous au terme  $m^2(\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^2)$ .

**Développement du membre de droite dans (3.28).**  $\rightsquigarrow$  Commençons tout d'abord par écrire le développement de  $\tau_j^2$  en introduisant, pour tout  $k \geq 2$ , le terme

$$\gamma_k = \sum_{s=1}^{k-1} \tau_{j,a}^{(s)} \tau_{j,a}^{(k-s)}$$

de telle sorte que

$$\tau_{j,a}^2 = 1 + 2\tau_{j,a}^{(1)}\epsilon + \sum_{k=2}^{+\infty} (2\tau_{j,a}^{(k)} + \gamma_k)\epsilon^k \quad (3.31)$$

$\rightsquigarrow$  Intéressons nous ensuite au terme  $\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q$  :  
Posons, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\delta_k = \sum_{s=1}^k \frac{q(q-1)\dots(q-s+1)}{s!} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_s) \\ \sum j_i = k}} \tau_{j-1,a}^{(j_1)} \dots \tau_{j-1,a}^{(j_s)} = q\tau_{j-1,a}^{(k)} + d_k$$

$$\sigma_k = \sum_{s=1}^k \frac{(1-q)(-q)\dots(1-q-s+1)}{s!} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_s) \\ \sum j_i = k}} \tau_{j,a}^{(j_1)} \dots \tau_{j,a}^{(j_s)} = (1-q)\tau_{j,a}^{(k)} + s_k$$

$d_k$  et  $s_k$  sont des monômes de poids  $k$  en  $j$  et les éléments  $\delta_k$  et  $\sigma_k$  forment les développements en série de  $\tau_{j-1,a}^q$  et  $\tau_{j,a}^{1-q}$  :

$$\tau_{j-1,a}^q = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k \epsilon^k \quad \text{et} \quad \tau_{j,a}^{1-q} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k \epsilon^k$$

Finalement, on peut écrire le développement limité à tout ordre de  $m^2(\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^2)$  :

$$\begin{aligned} m^2(\tau_{j+1,a}\tau_{j,a}^{1-q}\tau_{j-1,a}^q - \tau_{j,a}^2) &= m^2(q\tau_{j-1,a}^{(1)} + \tau_{j+1,a}^{(1)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(1)})\epsilon \\ &+ m^2(q\tau_{j-1,a}^{(2)} + \tau_{j+1,a}^{(2)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(2)} + \nu_2 + (1-q)(q\tau_{j,a}^{(1)}\tau_{j-1,a}^{(1)} + \tau_{j,a}^{(1)}\tau_{j+1,a}^{(1)}) + q\tau_{j-1,a}^{(1)}\tau_{j+1,a}^{(1)})\epsilon^2 \\ &+ \sum_{k=3}^{+\infty} m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)} + \kappa_k)\epsilon^k \end{aligned}$$

où

$$\nu_2 = s_2 + d_2 - \gamma_2$$

$$\kappa_k = \sigma_k + \delta_k + \sum_{s=1}^{k-1} \sigma_s \delta_{k-s} + ((1-q)\tau_{j,a}^{(1)} + q\tau_{j-1,a}^{(1)})\tau_{j+1,a}^{(k-1)} + \sum_{t=2}^{k-1} \left( \sum_{s=0}^t \sigma_s \delta_{t-s} \right) \tau_{j+1,a}^{(k-t)} - \gamma_k$$

est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

Pour tout  $k \geq 2$ , remarquons que le terme d'ordre  $k$  dans le développement est la somme de  $m^2(\tau_{j+1,a}^{(k)} + q\tau_{j-1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)})$  et d'une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

**Conclusion.** Par unicité du développement en série, nous trouvons bien que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  satisfont des équations de la forme

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}}) \quad (3.32)$$

où  $\Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$  est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ . □

### 3.3.4 Construction d'une solution

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont solutions d'équations différentielles de la forme

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}}) \quad (3.33)$$

où  $\Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$  est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

Nous allons à présent montrer

**Lemme 44.** *Pour tout  $k \geq 1$ , et pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ , les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  définies par :*

$$\tau_{j,a}^{(k)}(x, t) = c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x - v_a t)} \quad (3.34)$$

sont solutions des équations 3.33. Ici,  $\sigma_a, v_a$  et  $c_{j,a}^{(k)}$  sont des constantes,  $\sigma_a$  et  $v_a$  vérifient l'équation de dispersion  $q$ -déformée suivante

$$\sigma_a^2(v_a^2 - 1) = m^2(\zeta^a + q\zeta^{-a} - (1+q)) \text{ avec } \zeta = e^{\frac{2i\pi}{r+1}}.$$

Et, pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  se calculent par récurrence.

Pour prouver ce résultat, et donner la méthode de calcul des constantes  $c_{j,a}^{(k)}$ , nous allons commencer par traiter les cas  $k = 1$  avant de généraliser.

*Démonstration.* Commençons donc par l'ordre 1.

**L'ordre 1.** Nous avons déjà vu, dans le paragraphe §3.3.3, que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(1)}$  satisfont les équations :

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a}^{(1)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(1)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(1)} + \tau_{j+1,a}^{(1)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(1)})$$

Les solutions de telles équations sont alors données par,  $\forall j \in \{0, \dots, r\}$

$$\tau_{j,a}^{(1)} = \zeta^{ja} \exp(\sigma_a(x - v_a t)) \quad (3.35)$$

où  $a$  est un exposant de  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire,  $a \in \{1, \dots, r\}$ .  $\sigma_a$  et  $v_a$  vérifient la condition de dispersion  $q$ -déformée suivante :

$$\sigma_a^2(v_a^2 - 1) = m^2(\zeta^a + q\zeta^{-a} - (1+q)) \quad (3.36)$$

Dans la suite, nous noterons

$$\theta := \theta(x, t) = \sigma_a(x - v_a t)$$

de telle sorte que les solutions s'écriront simplement

$$\forall j \in \{0, \dots, r\}, \tau_{j,a}^{(1)} = \zeta^{ja} e^\theta \quad (3.37)$$

avec

$$c_{j,a}^{(1)} = \zeta^{ja}. \quad (3.38)$$

**L'ordre  $k \geq 2$ .** Nous allons maintenant déterminer les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}(x, t)$  pour tout  $k \geq 2$  et ainsi montrer le lemme 44.

Procédons pour cela, par récurrence sur  $k$ . L'initialisation venant d'être faite, supposons la propriété montrée jusqu'au rang  $k-1 \geq 1$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $k$ .

D'après le lemme 43., les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont solutions d'équations différentielles de la forme

$$\ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}}) \quad (3.39)$$

où  $\Lambda_j((\tau_{s,a}^{(t)})_{\substack{s \in \{j-1, j, j+1\} \\ 1 \leq t < k}})$  est une combinaison linéaire de monômes de poids  $k$  en  $j$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont solutions d'un système d'équations différentielles :

$$(S^{(k)}) : \forall j \in \{0, \dots, r\}, \ddot{\tau}_{j,a}^{(k)} - \tau_{j,a}^{\prime\prime(k)} = m^2(q\tau_{j-1,a}^{(k)} + \tau_{j+1,a}^{(k)} - (1+q)\tau_{j,a}^{(k)}) + \hat{C}_j^{(k)} e^{k\theta} \quad (3.40)$$

où  $\hat{C}_j^{(k)}$  est une constante qui dépend des constantes  $c_{s,a}^{(t)}$  pour  $s \in \{j-1, j, j+1\}$  et  $t < k$  et des constantes issues du développement en série effectué dans le paragraphe précédent.

**Résolution du système  $(S^{(k)})$ .** En notant  $\square\tau = \ddot{\tau} - \tau''$ , le système (3.40) se réécrit :

$$\square \begin{pmatrix} \tau_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ \tau_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} = m^2 A \begin{pmatrix} \tau_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ \tau_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} + e^{k\theta} C \quad (3.41)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -(1+q) & 1 & & \dots & & q \\ q & -(1+q) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & -(1+q) & 1 & & \\ & & \dots & \dots & & \\ 1 & & \dots & & q & -(1+q) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \hat{C}_0^{(k)} \\ \dots \\ \hat{C}_r^{(k)} \end{pmatrix}$$

Cherchons une solution de ce système sous la forme  $\tau_{j,a}^{(k)} = c_{j,a}^{(k)} e^{k\theta}$  pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ . Nous avons alors

$$\square \begin{pmatrix} \tau_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ \tau_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} = k^2 \sigma_a^2 (v_a^2 - 1) e^{k\theta} \begin{pmatrix} c_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ c_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Comme  $\sigma_a$  et  $v_a$  satisfont la relation de dispersion  $q$ -déformée 3.17, nous pouvons également écrire

$$\square \begin{pmatrix} \tau_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ \tau_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} = k^2 m^2 (\zeta^a - 1 + q \overline{(\zeta^a - 1)}) e^{k\theta} \begin{pmatrix} c_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ c_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Finalement, les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  sont solutions du système linéaire

$$(L_k) : m^2 (N_k + q N_k^*) \begin{pmatrix} c_{0,a}^{(k)} \\ \dots \\ c_{j,a}^{(k)} \\ \dots \\ c_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} = C \quad (3.42)$$

avec

$$N_k := (k^2 (\zeta^a - 1) + 1) I_{r+1} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & & \dots & & 0 & -1 \\ -1 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

et  $N_k^*$  désigne toujours la matrice transposée conjuguée de  $N_k$ .

Lorsque  $N_k + qN_k^*$  est inversible (voir paragraphe suivant), ce système admet donc une unique solution.

Pour tout  $k \geq 1$ , les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}(x, t) = c_{j,a}^{(k)} e^{k\theta}$  sont solutions des équations de Hirota et leur forme est bien celle énoncée dans le lemme.  $\square$

### 3.3.5 Compléments sur les constantes $c_{j,a}^{(k)}$

Nous allons maintenant étudier sur les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  introduites dans le paragraphe précédent comme des fonctions de  $q$ , et montrer qu'elles ont la forme décrite dans le théorème 41 :

$$c_{j,a}^{(k)} = (q-1) \frac{N_{j,a}^{(k)}(q)}{D_a^{(k)}(q)} \quad (3.44)$$

où  $N_{j,a}^{(k)}(q)$  est un polynôme en  $q$  calculé par récurrence, et

$$D_a^{(k)}(q) = \prod_{j=2}^k \prod_{\ell=0}^r (q - \omega_{a,\ell,j}). \quad (3.45)$$

Commençons par observer l'exemple de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ .

**Exemple.**  $\otimes$  Plaçons nous dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ .

**L'ordre 1.** Nous avons,

$$\begin{cases} \tau_{0,a}^{(1)} = e^\theta \\ \tau_{1,a}^{(1)} = \zeta^a e^\theta \\ \tau_{2,a}^{(1)} = \zeta^{2a} e^\theta \end{cases} \quad (3.46)$$

avec,  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ,  $a \in \{1, 2\}$  et  $\theta = \theta(x, t) := \sigma_a(x - v_a t)$ . Rappelons que les constantes  $\sigma_a$  et  $v_a$  satisfont la condition de dispersion

$$\sigma_a^2(v_a^2 - 1) = m^2(\zeta^a + q\zeta^{-a} - (1 + q))$$

**L'ordre 2.** À l'ordre 2, nous pouvons écrire les fonctions  $\tau_{j,a}^{(2)}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \tau_{0,a}^{(2)} = c_{0,a}^{(2)} e^{2\theta} \\ \tau_{1,a}^{(2)} = c_{1,a}^{(2)} e^{2\theta} \\ \tau_{2,a}^{(2)} = c_{2,a}^{(2)} e^{2\theta} \end{cases} \quad (3.47)$$

Les constantes  $c_{0,a}^{(2)}$ ,  $c_{1,a}^{(2)}$  et  $c_{2,a}^{(2)}$  sont solutions du système linéaire  $L^{(2)}$  décrit dans le paragraphe précédent. Nous pouvons réécrire ce système sous la forme suivante :



$$(L^{(2)}) : m^2 N^{(2)}(q) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{c}_{0,a}^{(2)} \\ \tilde{c}_{1,a}^{(2)} \\ \tilde{c}_{2,a}^{(2)} \end{pmatrix} = C \quad (3.48)$$

avec

$$N_2(q) = (4\zeta^a - 3 + q(4\zeta^{-a} - 3)) \cdot I_3 - E - q^t E \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Remarquons que  ${}^t E = E^2$ , ce qui nous permet d'en déduire que

$$[E, {}^t E] = 0$$

Les matrices  $I_3, E$  et  ${}^t E$  commutent, ce qui nous permet d'établir le spectre de la matrice  $N^{(2)}(q)$  :

$$\text{Spec}(N^{(2)}(q)) = \{4\zeta^a - 3 - \zeta^\ell + q(4\zeta^{-a} - 3 - \zeta^{-\ell}) \mid \ell \in \{0, 1, 2\}\} \quad (3.50)$$

Notons  $q_1, q_2$  et  $q_3$  les valeurs propres de  $N^{(2)}(q)$ . Le déterminant de la matrice  $N^{(2)}(q)$  est donc

$$\det(N^{(2)}(q)) = \prod_{i=1}^3 (q - q_i) = \prod_{0 \leq \ell \leq 2} (4\zeta^a - 3 - \zeta^\ell + q(4\zeta^{-a} - 3 - \zeta^{-\ell})) \quad (3.51)$$

**Remarque :** Notons que tous les termes du produit sont de la forme  $z + q\bar{z}$  que l'on pourrait assimiler à une  $q$ -déformation de la partie réelle de  $z$ .

Les solutions du système linéaire  $(L^{(2)})$  sont alors données par :

$$c_{0,a}^{(2)} = -\frac{q-1}{2} \times \frac{(\zeta^a - 2)q^4 + (11\zeta^a + 3)q^3 + (12\zeta^a + 15)q^2 + (8 - \zeta^a)q - 2\zeta^a}{(\zeta^a + 4)(q - \zeta^a)(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3)} \quad (3.52)$$

$$c_{1,a}^{(2)} = -\frac{q-1}{2} \times \frac{(2\zeta^a + 3)q^4 + (8 - 3\zeta^a)q^3 - (15\zeta^a + 3)q^2 - (8\zeta^a + 9)q - 2}{(\zeta^a + 4)(q - \zeta^a)(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3)} \quad (3.53)$$

$$c_{2,a}^{(2)} = \frac{q-1}{2} \frac{(3\zeta^a + 1)q^4 + (8\zeta^a + 11)q^3 + (12 - 3\zeta^a)q^2 - (9\zeta^a + 1)q - 2 - 2\zeta^a}{(\zeta^a + 4)(q - \zeta^a)(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3)} \quad (3.54)$$

(Calculs effectués par Maple.)

⊛

Généralisons ces observations, ce qui terminera la démonstration du théorème 41. D'après le paragraphe précédent, les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}(x, t)$  s'écrivent

$$\tau_{j,a}^{(k)} = c_{j,a}^{(k)} e^{k\theta}$$

Nous l'avons vu, les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  sont solutions du système linéaire

$$(L_k) : m^2(N_k + qN_k^*) \begin{pmatrix} c_{0,a}^{(k)} \\ \vdots \\ c_{j,a}^{(k)} \\ \vdots \\ c_{r,a}^{(k)} \end{pmatrix} = C \quad (3.55)$$

Or

$$N_k + qN_k^* = (k^2(\zeta^a - 1) + 1 + q\overline{(k^2(\zeta^a - 1) + 1)}) \cdot I_{r+1} - E - q^t E \quad (3.56)$$

où

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que  $[E, {}^t E] = 0$  puisque  ${}^t E = E^r$ . Les valeurs propres de la matrice  $N_k + qN_k^*$  sont donc

$$k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell + q\overline{(k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell)} \text{ avec } \ell \in \{0, \dots, r\} \quad (3.57)$$

Le déterminant de ce système de Cramer est donc

$$D_a^{(k)}(q) = \prod_{\ell=0}^r \left( k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell + q\overline{(k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell)} \right) \quad (3.58)$$

Ses racines sont donc

$$\omega_{a,\ell,k} = -\frac{k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell}{k^2(\zeta^{-a} - 1) + 1 - \zeta^{-\ell}} \quad (3.59)$$

Les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  appartiennent à  $\mathbb{Q}[\zeta]$  et leur pôles sont inclus dans l'union de l'ensemble des pôles des constantes  $c_j^{(t)}$  pour  $t < k$  et l'ensemble

$$\left\{ -\frac{k^2(\zeta^a - 1) + 1 - \zeta^\ell}{k^2(\zeta^{-a} - 1) + 1 - \zeta^{-\ell}}, \ell \in \{0, \dots, r\} \right\} \quad (3.60)$$

De plus, lorsque  $q = 1$ , on sait par les travaux de [Hol], que les fonctions  $\tau_{j,a}^{(k)}$  sont nulles pour  $k \geq 2$ . Donc  $\forall k \geq 2, (q-1) | c_{j,a}^{(k)}$ . Finalement, les constantes  $c_{j,a}^{(k)}$  ont bien la forme donnée dans le théorème :

$$c_{j,a}^{(k)} = (q-1) \frac{N_{j,a}^{(k)}(q)}{D_a^{(k)}(q)}.$$

### 3.3.6 Perspectives

Pour terminer ce chapitre, nous abordons quelques pistes de recherche qu'il reste encore à étudier.

**Perspective n° 1 - Masses et  $q$ -déformation.** Tout d'abord, replaçons nous dans le cas où  $q = 1$  et rappelons l'un des résultats de Hollowood, voir [Hol]. Dans cet article, il montre que les 1-solitons sont de la forme :

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \ln \left[ 1 + \exp \left( \sigma(x - vt) + \xi + \frac{2i\pi a}{r+1} j \right) \right] \alpha_j$$

où  $a \in \{1, \dots, r\}$  est un exposant de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de type  $A_r$ . Il calcule ensuite les masses de ces solitons et montre que l'on retrouve les masses des particules fondamentales données par

$$M_a = \frac{4m(r+1)}{\beta^2} \sin \left( \frac{\pi a}{r+1} \right) \quad (3.61)$$

Nous rappelons ci-dessous, les grandes lignes de ce calcul.

*Démonstration.* Les masses des solitons solutions sont données par le moment :

$$M = \frac{-1}{\gamma(v)v} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}_{(a)} \phi'_{(a)} dx$$

où  $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

Introduisons une base  $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$  de  $\mathbb{R}^{r+1}$  telle que,  $\alpha_j = e_j - e_{j+1}$ , voir par exemple [Bou]. Ici,  $j$  désigne  $j \bmod r+1$ . Dans cette base, nous pouvons écrire,

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \ln(\tau_j) \alpha_j = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \ln \left( \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right) e_j$$

Notons,

$$\phi_j = \phi \cdot e_j = -\frac{1}{i\beta} \ln \left( \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right). \quad (3.62)$$

À présent, considérons

$$P = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{r+1} \dot{\phi}_j \phi_j' \right) dx$$

En effectuant le changement de variable  $\phi_j'(x, t) dx = d\phi_j$ ,

$$P = - \sum_{j=1}^{r+1} \int_{\phi_j^-}^{\phi_j^+} \dot{\phi}_j d\phi_j$$

où  $\phi_j^\pm$  sont les valeurs asymptotiques de  $\phi_j(x, t)$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ . D'après (3.62), nous avons

$$\dot{\phi}_j = \frac{\sigma v}{i\beta} \left( \frac{\zeta^{ja} e^\theta}{1 + \zeta^{ja} e^\theta} - \frac{\zeta^{a(j-1)} e^\theta}{1 + \zeta^{a(j-1)} e^\theta} \right)$$

Rappelons que  $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{r+1}\right)$  et  $\theta = \sigma(x - vt) + \xi$ .

Nous avons,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{ja} e^\theta}{1 + \zeta^{ja} e^\theta} &= \frac{\zeta^a}{\zeta^a - 1} \left( \frac{\zeta^{ja} e^\theta - \zeta^{ja} e^\theta}{1 + \zeta^{ja} e^\theta} \right) = \frac{\zeta^a}{\zeta^a - 1} \left( 1 - \frac{1 + \zeta^{a(j-1)} e^\theta}{1 + \zeta^{ja} e^\theta} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \zeta^{-a}} \left( 1 - \frac{1 + \zeta^{a(j-1)} e^\theta}{1 + \zeta^{ja} e^\theta} \right) = \frac{1}{1 - \zeta^{-a}} (1 - \exp(i\beta\phi_j)) \end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{\zeta^{a(j-1)} e^\theta}{1 + \zeta^{a(j-1)} e^\theta} = \frac{1}{1 - \zeta^a} (1 - \exp(-i\beta\phi_j))$$

Ce qui nous permet d'écrire  $\dot{\phi}_j$  en terme de  $\phi_j$  :

$$\dot{\phi}_j = \frac{\sigma v}{i\beta} \left( \frac{-e^{i\beta\phi_j}}{1 - \zeta^{-a}} + \frac{e^{-i\beta\phi_j}}{1 - \zeta^a} + \frac{1}{1 - \zeta^{-a}} - \frac{1}{1 - \zeta^a} \right)$$

Nous pouvons maintenant calculer  $P$  :

$$\begin{aligned} P &= - \sum_{j=1}^{r+1} \int_{\phi_j^-}^{\phi_j^+} \dot{\phi}_j d\phi_j = - \sum_{j=1}^{r+1} \frac{\sigma v}{i\beta} \left( \frac{-1}{1 - \zeta^{-a}} \left[ \frac{e^{i\beta\phi_j}}{i\beta} \right]_{\phi_j^-}^{\phi_j^+} + \frac{1}{1 - \zeta^a} \left[ \frac{e^{-i\beta\phi_j}}{-i\beta} \right]_{\phi_j^-}^{\phi_j^+} \right) \\ &= - \frac{\sigma v}{\beta^2} \sum_{j=1}^{r+1} \left[ \frac{1}{1 - \zeta^a} e^{-i\beta\phi_j} + \frac{1}{1 - \zeta^{-a}} e^{i\beta\phi_j} \right]_{\phi_j^-}^{\phi_j^+} \end{aligned}$$

Or,  $\phi_j = \frac{-1}{i\beta} \ln \left( \frac{1 + \zeta^{aj} e^\theta}{1 + \zeta^{a(j-1)} e^\theta} \right)$ , d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_j(x, t) = \frac{-1}{i\beta} \ln(\zeta^a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j(x, t) = 0$$

Finalement, nous pouvons calculer l'expression des masses,

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{P}{\gamma(v)v} = \frac{2\sigma(r+1)}{\beta^2} \sqrt{1-v^2} \\ &= \frac{4m(r+1)}{\beta^2} \sin \left( \frac{\pi a}{r+1} \right) \end{aligned}$$

en utilisant la relation de dispersion  $\sigma^2(1-v^2) = 4m^2 \sin^2 \left( \frac{\pi a}{r+1} \right)$ . □

La question qui se pose alors naturellement, est la suivante : est-il possible de  $q$ -déformer ce résultat ? Nous avons montré plus tôt (voir Théorème 41), que les solitons  $q$ -déformés s'écrivaient sous la forme :

$$\phi_{(a)}(x, t) = -\frac{1}{i\beta} \sum_{j=0}^r \alpha_j \ln(\tau_{j,a}(x, t))$$

avec, pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ ,

$$\tau_{j,a}(x, t) = 1 + \zeta^{aj} e^{\sigma_a(x-v_a t) + \xi} \epsilon + \sum_{k=2}^{\infty} c_{j,a}^{(k)} e^{k\sigma_a(x-v_a t)} \epsilon$$

Les solitons  $\phi_{(a)}$  sont développables en séries formelles, et nous pourrions alors calculer les masses  $q$ -déformées des solitons solutions. Obtiendrait-on alors une  $q$ -déformation des masses des particules fondamentales ?

**Perspective n° 2 - Solitons d'ordres supérieurs** Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés uniquement à la  $q$ -déformation des 1-solitons solutions. Évidemment, la question de généraliser ce procédé afin de déterminer des  $n$ -solitons  $q$ -déformés se pose. L'existence de tels solitons présageraient de l'existence de système intégrable.



## Chapitre 4

# Étude de l'ensemble des bases distinguées

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>104</b>
<b>4.2</b>	<b>Définitions géométrique et algébrique</b>	<b>105</b>
4.2.1	Cycles évanescents	105
4.2.2	Changements de bases	106
4.2.3	Bases distinguées et racines	108
<b>4.3</b>	<b>Actions de groupes et éléments de Coxeter</b>	<b>108</b>
4.3.1	Actions de groupe sur $\mathcal{B}(R)$	109
4.3.2	Orbites et Coxeter	110
<b>4.4</b>	<b>Matrices de Gabrielov</b>	<b>112</b>
4.4.1	Graphe étiqueté et connexité	113
4.4.2	Matrices de Gabrielov	115
4.4.3	Actions de $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$ et $\rho(Br_\ell)$ .	117
4.4.4	Perspectives	119
<b>4.5</b>	<b>Cardinal de <math>\mathcal{B}d</math></b>	<b>120</b>
<b>4.6</b>	<b>Transitivité de l'action de <math>BW(A_\ell)</math> sur <math>\mathcal{B}(A_\ell)</math></b>	<b>122</b>
<b>4.7</b>	<b>Annexe - Preuve du lemme 61</b>	<b>125</b>

---

## 4.1 Introduction

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $\ell$  muni d'une application bilinéaire symétrique à valeurs dans un corps  $k$ ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow k.$$

Pour  $a \in V$ , considérons une réflexion simple  $s_a : V \xrightarrow{\sim} V$  définie par

$$\forall x \in V, s_a(x) = x - \langle x, a^\vee \rangle a.$$

Notons  $R \subset V$  un système de racines irréductible simplement enlacé, c'est à dire de type  $A, D$  ou  $E$ . Notons  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire invariant par  $W(R)$ , de telle sorte que

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = (\alpha, \beta)$$

pour toutes racines  $\alpha, \beta \in R$ .

Fixons également une base de racines simples  $e = \{e_1, \dots, e_\ell\}$  telle que

$$A_R = ( (e_i, e_j) )_{1 \leq i, j \leq \ell}$$

soit la matrice de Cartan du système  $R$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , notons également  $s_i := s_{e_i}$  et  $W(R) = \langle s_1, \dots, s_\ell \rangle$  le groupe de Weyl de  $R$ . Un élément de Coxeter est un élément de  $W(R)$  de la forme

$$s_{x_1} \dots s_{x_\ell}$$

où  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  est un ensemble ordonné de  $\ell$  racines simples. Distinguons l'un de ces éléments, noté  $c_e$  et défini par

$$c_e = s_1 \dots s_\ell.$$

Les transformations de Coxeter forment une classe de conjugaison dans  $W$ , voir par exemple [Bou], Chap V, §6, Prop 1, ou [Car1], Théorème 10.3.1. Notons  $\mathcal{T}_c$  l'ensemble de ces éléments. Rappelons que cet ensemble est de cardinal  $\frac{|W|}{h}$ , voir [Del].

Enfin, notons  $\mathcal{B}(V)$  (respectivement  $\mathcal{B}(R)$ ) l'ensemble des bases ordonnées de  $V$  (resp. des bases ordonnées de  $V$  formées de racines de  $R$ ).

Dans ce chapitre, nous étudions  $\mathcal{B}(R)$  et l'un de ses sous-ensembles, l'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$ . Dans un premier temps, voir paragraphe §4.2, nous donnons une définition algébrique de cet ensemble, en faisant le lien avec la notion de base distinguée aperçue dans le Chapitre 2, §2.2.2, voir aussi [AVGZ]. En quelques mots, l'ensemble des bases distinguées est l'orbite de la base de racines simples  $e$  pour l'action des transformations données par Gabrielov sur  $\mathcal{B}(R)$ , [Gab].

Dans un deuxième temps, §4.3, nous étudions l'action de ces transformations sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$ . Cette étude s'inspire des travaux de A.I. Bondal, [Bo], et Brieskorn [Bri]. Nous montrons que ces transformations induisent une action du groupe de tresses  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  et nous démontrons le théorème suivant (voir §4.3.2) :



**Théorème.** *Pour tout  $x \in \mathcal{B}(R)$ , nous avons*

$$c_b(x) = -w_k(x)$$

où  $w_k$  est un élément du groupe de Weyl qui ne dépend que de l'orbite  $\mathcal{O}_k$  de  $x$  pour l'action de  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  et  $c_b \in Z(Br_\ell)$ .

Par ailleurs, cette action commute avec celle du groupe de Weyl, ce qui nous permet de considérer l'orbite  $\mathcal{O}$  d'une base de racines simples  $e$  fixée pour l'action de  $BW(R) = \rho(Br_\ell \times W) \subset \text{Aut}(\mathcal{B}(R))$ . Dans la partie §4.4, nous associons à tout élément  $x \in \mathcal{B}(R)$  un graphe  $G_x$  et une matrice  $M_x$  et nous montrons que si  $x \in \mathcal{O}$ , alors  $G_x$  est un graphe connexe et  $M_x$  est une matrice de Gabrielov. Les matrices de Gabrielov sont définies comme suit :

**Definition.** Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{\ell,\ell}(k)$  est une matrice de Gabrielov si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, M_{ii} = 2$
2.  $\forall i \neq j, M_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Dans §4.5, nous donnons le cardinal de l'ensemble des bases distinguées, c'est à dire, l'orbite de  $e$  pour l'action de  $Br_\ell$ , en utilisant les résultats de Deligne et Voigt, voir [Del] et [Voi].

Enfin, nous terminons cette étude en montrant que, lorsque  $R = A_\ell$ , l'action de  $BW(R)$  sur  $\mathcal{B}(R)$  est transitive, voir Théorème 74.

## 4.2 Définitions géométrique et algébrique

La notion de base distinguée a déjà été évoquée dans le Chapitre 2, §2.2.2. Nous en rappelons ici les grandes lignes, en insistant sur l'interprétation géométrique de la définition. Après avoir introduit plusieurs transformations sur les bases distinguées (voir [Gab]), nous utilisons la bijection entre les systèmes de racines simplement enlacés et les classes des singularités simples pour donner une définition des bases distinguées plus algébrique. C'est cette dernière définition qui sera utilisée dans toute la suite de ce Chapitre.

### 4.2.1 Cycles évanescents

$f : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  désigne le germe d'une fonction holomorphe tel que  $f(0) = 0$  et 0 est un point critique isolé.

Considérons un "octopus"

$$Oct(z) \subset \mathbb{C}$$

dont la tête, notée  $z$ , est munie de tentacules, c'est à dire, de chemins  $p_i$  tels que  $p_i(0) = z$  et  $p_i(1) = z_i, 1 \leq i \leq \ell$ . Les extrémités des tentacules sont les valeurs critiques d'une fonction  $f_\lambda$  associée à  $f$  (voir Chapitre 2, §2.2.2).

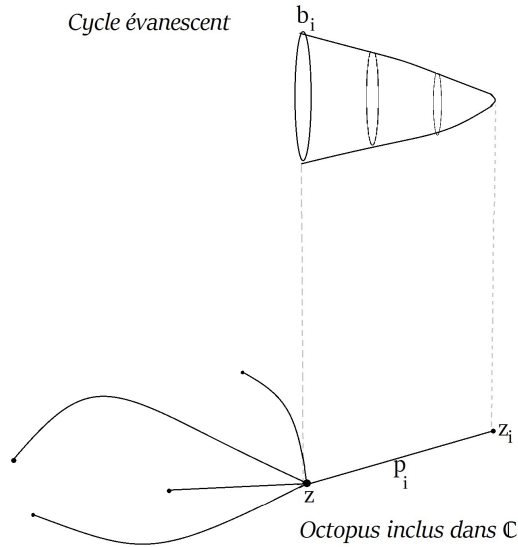


FIGURE 4.1 – Schéma de l'octopus et d'un cycle évanescent

Nous obtenons alors une base  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$  incluse dans un espace d'homologie isomorphe à  $\mathbb{Z}^\ell$ . Les  $b_i$  sont appelés cycles évanescents car ils s'évanouissent de  $z$  à  $z_i$  le long du chemin  $p_i$ , [Gab], [AVGZ]. La Figure 4.1 résume cette construction.

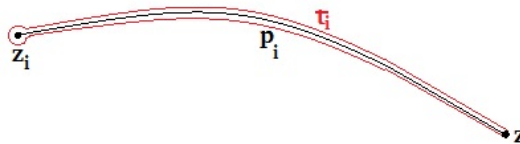
Une base distinguée est une base de cycles évanescents telle que les chemins  $p_i$  ne s'intersectent pas, et sont ordonnés dans le sens suivant :

$$\forall i, \arg \frac{dp_{i+1}}{dt}(0) < \arg \frac{dp_i}{dt}(0)$$

#### 4.2.2 Changements de bases

Si  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$  est une base de cycles évanescents (mais pas nécessairement une base distinguée) et  $(p_i)_{1 \leq i \leq \ell}$  les chemins correspondants, Gabrielov décrit plusieurs transformations permettant de construire de nouvelles bases de cycles évanescents.

Notons  $\tau_i$  un lacet autour du chemin  $p_i$  comme sur la Figure 4.2 et décrivons les deux transformations permettant d'obtenir une nouvelle base.

FIGURE 4.2 – Le chemin  $p_i$  et son lacet  $\tau_i$ .

1. Remplacer le chemin  $p_j$  par  $\tau_i^{-1}p_j$ . D'après la formule de Picard Lefschetz,  $x_j$  est remplacé par  $x_j - (x_j, x_i)x_i$ . Notons cette transformation  $\mu_i^j$
2. Remplacer le chemin  $p_j$  par  $\tau_i p_j$ . Cette fois-ci,  $x_j$  est remplacé par  $x_j + (x_j, x_i)x_i$ . Notons cette transformation  $\nu_i^j$

**Remarque.** Dans le contexte de ce Chapitre, les transformations  $\mu_i^j$  et  $\nu_i^j$  sont identiques. Cependant, dans les travaux de Gabrielov, [Gab], la forme linéaire  $(\cdot, \cdot)$  peut être non symétrique.

Ces transformations préservent la propriété d'être une base de cycles évanescents, mais pas celle d'être une base distinguée. Introduisons alors deux nouvelles transformations, que nous nommerons par la suite *transformations de Gabrielov*. Cette fois,  $x$  désigne une base distinguée.

1. Pour  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , notons  $\mu_i$  la transformation qui consiste à appliquer l'opération  $\mu_i^{i+1}$  puis à échanger les vecteurs  $i$  et  $i + 1$ . C'est à dire,

$$\mu_i(x) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, s_{x_i}(x_{i+1}), x_i, x_{i+2}, \dots, x_\ell\}$$

Nous appellerons cette transformation, la  $i$ -ème mutation. Rappelons que  $s_{x_i}$  est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur  $x_i$ . De telles symétries engendrent le groupe de Weyl.

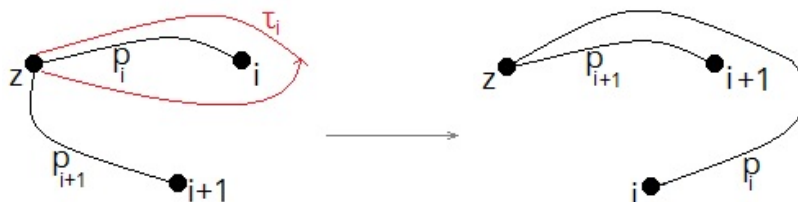


FIGURE 4.3 – Illustration de la transformation  $\mu_i$  sur un octopus.

2. Pour  $2 \leq i \leq \ell$ , notons  $\nu_i$  la transformation qui consiste à appliquer  $\nu_i^{i-1}$  puis à échanger les vecteurs  $i$  et  $i - 1$ . C'est à dire

$$\nu_i(x) = \{x_1, \dots, x_{i-2}, x_i, s_{x_i}(x_{i-1}), x_{i+1}, \dots, x_\ell\}$$

**Remarque.** Pour toute base  $x$ ,  $\mu_i \nu_{i+1}(x) = \nu_{i+1} \mu_i(x) = x$ .

Gabrielov ajoute une dernière transformation, les changements de signe  $\gamma_i$  définis par :

$$\gamma_i(x) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_\ell\} \text{ pour } 1 \leq i \leq \ell, x \in \mathcal{B}(V).$$

Ces changements de signe induisent une action de  $\mathbb{Z}_2^\ell$  sur l'ensemble des bases de l'espace vectoriel  $V$ .

**Proposition 45.** (Gabriellov, [Gab])

- Les transformations  $\mu_i, \nu_i$  envoient une base distinguée sur une base distinguée.
- Une base distinguée peut être envoyée sur n'importe quelle autre base distinguée par une suite finie de transformations  $\mu_i, \nu_i, \gamma_i$ .

**Remarque.** Dans le paragraphe §4.4.3, nous montrons que les changements de signes  $\gamma_i$  s'expriment en fonction des mutations  $\mu_i$ .

### 4.2.3 Bases distinguées et racines

Nous l'avons rappelé dans le Chapitre 2, les systèmes de racines simplement enlacés sont en bijection avec les classes des singularités simples  $f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ , voir [AVGZ]. Cette bijection permet d'identifier le réseau de racines  $Q(R)$  avec le réseau des cycles évanescents et la matrice de Cartan  $A(R)$  avec la matrice d'intersection par rapport à une base distinguée. Ainsi, nous obtenons une définition équivalente des bases distinguées donnée ci-dessous, c'est celle que nous utiliserons dans toute la suite de ce chapitre.

Soit  $R$  un système de racines simplement enlacé inclus dans un espace vectoriel  $V$ .  $\mathcal{B}(R)$  désigne l'ensemble des bases ordonnées de  $V$  formées de racines de  $R$  et  $e$  est une base de racines simples fixée.

**Définition 46.** Une base  $x \in \mathcal{B}(R)$  est dite **distinguée** s'il existe une suite finie de transformations de Gabriellov  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  telle que

$$x = \Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_n(e)$$

Notons  $\mathcal{B}d$  l'ensemble des bases distinguées.

Dans la suite, notre objectif est d'étudier l'action des transformations de Gabriellov sur  $\mathcal{B}(R)$  et sur l'ensemble des bases distinguées.

## 4.3 Actions de groupes et éléments de Coxeter

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'ensemble des bases ordonnées de racines  $\mathcal{B}(R)$ . Le groupe de Weyl  $W(R)$  et  $\mathbb{Z}_2^\ell$  (via les changements de signes  $\gamma_i$ ) agissent naturellement sur cet ensemble, mais ici, nous étudions plus particulièrement l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$ .

En effet, nous montrons que les mutations agissent comme le groupe de tresses, noté  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  et que cette action commute avec l'action du groupe de Weyl. Cela nous permet de définir un homomorphisme  $\rho : Br_\ell \times W \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{B}(R))$  que nous retrouverons par la suite.

Enfin, nous définissons une application

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{B}(R) \rightarrow W \\ x \mapsto c_x \end{cases},$$

et nous montrons que si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite pour l'action de  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$ , alors  $\delta(x) = \delta(y)$ , voir Théorème 49 et Proposition 55. Pour cette étude, nous utilisons des résultats de Brieskorn, [Bri], sur l'action d'un élément  $c_b$  du centre de  $Br_\ell$ .

### 4.3.1 Actions de groupe sur $\mathcal{B}(R)$

**Action du groupe de tresses.** L'article de A.I. Bondal, [Bo], traite de l'étude d'un crochet de Poisson  $P$  sur l'espace  $\mathcal{A}$  des formes bilinéaires sur un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , dont la matrice est triangulaire supérieure avec le coefficient 1 sur la diagonale. Dans la première partie, Bondal construit une action du groupe de tresses sur l'ensemble des bases semi-orthonormales d'un espace vectoriel de dimension finie. Le résultat suivant est inspiré de ses travaux.

**Proposition 47.** *Les mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$  induisent une action du groupe de tresses  $Br_\ell$  sur l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(R)$  d'un système de racines  $R$ .*

*Démonstration.* Pour  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , rappelons que la mutation  $\mu_i$  est définie par

$$\mu_i(x) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, s_{x_i}(x_{i+1}), x_i, x_{i+2}, \dots, x_\ell\}$$

où  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$  est une base de racines de  $R$ , avec  $(x_i, x_i) = 2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  puisque  $R$  est simplement enlacé. Remarquons que la mutation  $\mu_i$  n'affecte que le  $i$ -ème et le  $(i+1)$ -ème vecteurs de la base  $x$ , donc si  $|i - j| > 1$ ,  $\mu_i \mu_j = \mu_j \mu_i$ .

De plus, soit  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , vérifions que, pour toute base  $x \in \mathcal{B}(R)$ ,  $\mu_i \mu_{i+1} \mu_i = \mu_{i+1} \mu_i \mu_{i+1}$ . Dans un souci de clarté, nous effectuons les calculs lorsque  $\ell = 3$  :

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 \mu_1(x) &= \{x_3 - bx_2 - (c - ab)x_1, x_2 - ax_1, x_1\} \\ &= \mu_2 \mu_1 \mu_2(x) \end{aligned}$$

où  $a = (x_1, x_2)$ ,  $b = (x_2, x_3)$  et  $c = (x_1, x_3)$ .

Les mutations vérifient donc bien les relations du groupe de tresses  $Br_\ell$ . □

**Deux actions commutent.** Rappelons que l'action du groupe de Weyl  $W$  sur le système de racines  $R$  est stable. En conséquence,  $W$  agit sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$  des bases de l'espace vectoriel  $V$  formées de racines de  $R$  :

$$\begin{aligned} W \times \mathcal{B}(R) &\rightarrow \mathcal{B}(R) \\ (s, \{x_1, \dots, x_\ell\}) &\mapsto \{s(x_1), \dots, s(x_\ell)\} \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, notre objectif est de décrire les effets des actions de  $Br_\ell$  et  $W$  sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$ . Commençons tout d'abord par un théorème très simple.

**Théorème 48.** *Les actions de  $Br_\ell$  et de  $W$  sur  $\mathcal{B}(R)$  commutent.*

*Démonstration.* Notons  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$  un élément de  $\mathcal{B}(R)$  et  $s \in W$ . Soit  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ .

$W$  conserve le produit scalaire, d'où  $(x_{i+1}, x_i) = (s(x_{i+1}), s(x_i))$ , et comme  $s$  est une application linéaire,

$$s(\mu_i(x)) = \mu_i(s(x))$$

□

Par conséquent, nous disposons d'un homomorphisme

$$\rho : Br_\ell \times W \rightarrow Aut(\mathcal{B}(R))$$

et nous notons  $BW(R) = \rho(Br_\ell \times W)$ .

Par ailleurs, pour deux sous-groupes  $X, Y$  de  $Aut(\mathcal{B}(R))$ , nous notons  $XY$  leur produit. En particulier,  $BW(R) = \rho(Br_\ell)W$ .

### 4.3.2 Orbites et Coxeter

**Action du centre de  $Br_\ell$ .** Poursuivons notre étude de l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$  sur l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(R)$ . Introduisons l'élément  $c_b \in Br_\ell$  défini par

$$c_b = (\mu_1 \dots \mu_{\ell-1})^\ell$$

Cet élément est un générateur du centre de  $Br_\ell$ , noté  $Z(Br_\ell)$ , voir par exemple [Bri]. De plus, notons

$$\mathcal{B}(R) = \cup \mathcal{O}_k$$

la partition de  $\mathcal{B}(R)$  en orbites pour l'action de  $Br_\ell$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $e \in \mathcal{O}_1 = \mathcal{B}d$ , l'ensemble des bases distinguées.

Le théorème suivant décrit l'action de cet élément  $c_b \in Z(Br_\ell)$  sur l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(R)$ .

**Théorème 49.** *Pour tout  $x \in \mathcal{B}(R)$ , nous avons*

$$c_b(x) = -w_k(x)$$

où  $w_k$  est un élément du groupe de Weyl qui ne dépend que de l'orbite  $\mathcal{O}_k$  de  $x$ .

La démonstration de ce théorème est l'objet des deux paragraphes suivants.

**Théorème 49 - résultats intermédiaires.** La démonstration du Théorème 49 nécessitent plusieurs résultats intermédiaires, donnés ci-après. Ces résultats peuvent se retrouver dans l'article de Brieskorn, [Bri].

Pour plus de clarté nous notons, comme Brieskorn,

$$x \star y = s_x(y) \text{ et } \bar{x} = -x \text{ pour } x, y \in V$$

Commençons tout d'abord avec quelques règles de calcul,

**Lemme 50.** Soient  $x, y, z \in V$ , nous avons

1.  $x \star \bar{x} = x$
2.  $(x \star y) \star (x \star z) = x \star (y \star z)$

Ces règles de calcul élémentaires permettent d'obtenir les deux règles suivantes

**Corollaire 51.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k, a, b \in V$ , nous avons

1.  $(x_1 \star \dots \star x_k \star a) \star (x_1 \star \dots \star x_k \star b) = x_1 \star \dots \star x_k \star a \star b$
2.  $(x_1 \star \dots \star x_k) \star (x_1 \star \dots \star x_{k-1}) = x_1 \star \dots \star x_{k-1} \star x_k \star \overline{x_{k-1}}$ .

Par ailleurs, remarquons que, pour  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  et  $x \in \mathcal{B}(R)$ ,  $\mu_i(x)$  s'écrit, avec la notation que nous venons d'introduire,

$$\mu_i(x) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \star x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_\ell\}$$

Introduisons les éléments

$$\pi' = \prod_{i \equiv 1[2]} \mu_i, \quad \pi'' = \prod_{i \equiv 0[2]} \mu_i \quad \text{et} \quad \pi = \pi' \pi''$$

et remarquons l'analogie avec la décomposition blanc-noir des sommets du graphe de Dynkin et l'élément de Coxeter adapté à une telle décomposition, vus dans §1.5.

Notons enfin  $\omega_\ell^+$  l'élément de  $Br_\ell$  défini par,

$$\omega_\ell^+ = \begin{cases} \pi^{\frac{\ell}{2}} & \text{si } \ell \equiv 0[2] \\ \pi^{\frac{\ell-1}{2}} \pi' & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons

**Lemme 52.**

$$c_b = (\omega_\ell^+)^2$$

De plus, en constatant que  $\omega_\ell^+ = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\ell-1})(\mu_1 \dots \mu_{\ell-2}) \dots (\mu_1 \mu_2) \mu_1$ , nous pouvons montrer par récurrence le résultat suivant :

**Lemme 53.** Pour tout  $x \in B(R)$ , nous avons

$$\omega_\ell^+(x) = \{x_1 \star x_2 \star \dots \star x_n, \dots, x_1 \star x_2, x_1\}$$

À toute base de racines  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ , nous associons la transformation

$$c_x = s_{x_1} \dots s_{x_\ell} \in W.$$

Notons

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{B}(R) \rightarrow W \\ x \mapsto c_x. \end{cases}$$

Rappelons que si  $x$  est une base de racines simples alors  $c_x$  est un élément de Coxeter de  $W$  et  $c_x$  et  $c_e$ , l'élément de Coxeter que nous avons distingué dans l'introduction, sont conjugués.

**Remarque.** L'action de  $\mathbb{Z}_2^\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  via les changements de signe  $\gamma_i$  préservent  $c_x$ , pour  $x \in \mathcal{B}(R)$  :

$$c_x = c_{\gamma_i(x)}, \quad 1 \leq i \leq \ell.$$

Nous verrons dans la Proposition 55 ci-dessous, que l'action de  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  via les mutations  $\mu_i$  préserve également les transformations  $c_x$ .

La proposition suivante relie les éléments  $c_b \in Z(Br_\ell)$  et  $c_x$  pour  $x \in \mathcal{B}(R)$  :

**Proposition 54.** *Pour toute base de racines  $x \in \mathcal{B}(R)$ ,*

$$c_b(x) = c_x(\bar{x})$$

*Démonstration.* D'après le lemme 39,  $c_b(x) = (\omega_\ell^+)^2(x)$ . Alors, en appliquant à deux reprises le lemme 53, on obtient, pour tout  $1 \leq j \leq \ell$ ,

$$((\omega_\ell^+)^2(x))_j = (x_1 \star \dots \star x_\ell) \star \dots \star (x_1 \star \dots \star x_{j+1}) \star (x_1 \star \dots \star x_j)$$

Or, en appliquant une fois le point 2. puis  $(n + 1 - j)$  fois le point 1. du corollaire 51, nous obtenons finalement

$$((\omega_\ell^+)^2(x))_j = x_1 \star x_2 \star \dots \star x_\ell \star \bar{x}_j = s_{x_1} \dots s_{x_\ell}(\bar{x}_j) = c_x(\bar{x}_j)$$

ce qui achève la démonstration. □

**Théorème 49 - démonstration.** La démonstration du Théorème 49 est alors une conséquence de la Proposition 54 et de la remarque suivante :

**Proposition 55.** *Soit  $x \in \mathcal{O}_k$  fixé. Alors, pour tout  $x' \in \mathcal{O}_k$ ,*

$$c_x = c_{x'}.$$

*Démonstration.* En effet, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ , nous avons

$$c_x = c_{\mu_i(x)}$$

puisque  $s_{x_i} s_{x_{i+1}} s_{x_i} = s_{s_{x_{i+1}}(x_i)}$  □

## 4.4 Matrices de Gabrielov

À présent, nous allons étudier l'ensemble des bases ordonnées de racines  $\mathcal{B}(R)$  et l'orbite des bases distinguées  $\mathcal{B}d \subset \mathcal{B}(R)$  avec une approche différente. Nous considérons toujours  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de racines simples fixée dont  $\mathcal{B}d$  est l'orbite pour l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$ .

À chaque base  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\} \in \mathcal{B}(R)$ , nous associons une matrice  $M_x$  définie par

$$M_x = ((x_i, x_j))_{ij}.$$



Nous noterons  $\text{Mat}$  l'application qui à  $x \in \mathcal{B}(R)$  associe sa matrice  $M_x$ .

Soient  $x \in \mathcal{B}d$  et  $M_x = \text{Mat}(x)$ , remarquons qu'alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$M_{\mu_i(x)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_x)_{i+1,i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-(i+1)} \end{pmatrix} \times M_x \times \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_x)_{i+1,i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-(i+1)} \end{pmatrix}$$

où  $(M_x)_{ij}$  désigne le coefficient  $i, j$  de la matrice  $M_x$ .

L'action des mutations  $\mu_i$  sur  $\mathcal{B}(R)$  induit donc une action sur  $\text{Mat}(\mathcal{B}(R))$ . Cette action est donnée pour toute matrice  $M \in \text{Mat}(\mathcal{B}(R))$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  par

$$\mu_i(M) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{i+1,i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-(i+1)} \end{pmatrix} \times M \times \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{i+1,i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-(i+1)} \end{pmatrix}$$

Si nous restreignons à l'ensemble  $\text{Mat}(\mathcal{B}d)$ , cette action est bien sûr transitive par définition de  $\mathcal{B}d$ .

Dans un premier temps, nous associons à  $x \in \mathcal{B}(R)$  un graphe étiqueté noté  $G_x$ . Nous étudions ces graphes  $G_x$  et les matrices  $M_x$  définies à l'instant, et en particulier, nous montrons que si  $x$  est dans l'orbite de  $e$  pour l'action de  $BW(R)$ , alors  $G_x$  est connexe et  $M_x$  est une matrice de Gabrielov. Les matrices de Gabrielov sont définies comme suit :

**Definition 56.** Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{\ell,\ell}(k)$  est une matrice de Gabrielov si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, M_{ii} = 2$
2.  $\forall i \neq j, M_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Enfin, nous utilisons ces résultats pour démontrer que dans ces conditions, l'orbite de  $x$  pour l'action de  $\mathbb{Z}_2^\ell$  est incluse dans celle pour l'action de  $\rho(Br_\ell)$ , voir Théorème 66.

#### 4.4.1 Graphe étiqueté et connexité

Nous allons associer un graphe  $G_x$  à tout élément  $x$  de  $\mathcal{B}(R)$ . La correspondance matrice  $M_x$  – graphe  $G_x$  sera bijective.

**Graphe étiqueté associé à  $x \in \mathcal{B}(R)$ , action des mutations.**

**Definition 57.** À toute matrice  $x \in \mathcal{B}(R)$ , nous associons un graphe étiqueté  $G_x = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ , tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{1, \dots, \ell\} \text{ désigne l'ensemble des sommets} \\ \text{pour } i \neq j, (i, (M_x)_{ij}, j) \in \mathcal{A} &\iff (M_x)_{ij} = (x_i, x_j) \neq 0 \end{aligned}$$

**Exemple.** Si  $e = \{e_1, \dots, e_\ell\}$  est la base de racines simples d'un système de racines  $R$  de type  $A_\ell$ , alors le graphe  $G_e$  coïncide, aux étiquettes près, avec le diagramme de Dynkin de  $A_\ell$ .

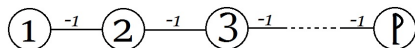


FIGURE 4.4 – Graphe associé à la base de racines simples de  $A_\ell$ .

Le groupe de tresses  $Br_\ell$  agit également sur l'ensemble des graphes  $G_x$  pour  $x \in \mathcal{B}(R)$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \mu_i(G_x) = \mathcal{G}(\mu_i(M_x))$$

en notant  $\mathcal{G}$  l'application qui à une matrice  $M_x$  associe le graphe associé  $G_x$ .

**Graphe étiqueté connexe.** Observons à présent que l'action des mutations préserve la connexité de tels graphes.

**Definition 58.** Nous dirons qu'un graphe étiqueté  $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$  est **connexe**, si et seulement si pour toute paire de sommets  $(s_1, s_2) \in \mathcal{S}^2$ , il existe une suite finie d'arêtes

$$(k_1, m_1, k_2), (k_2, m_2, k_3), \dots, (k_{p-2}, m_{p-2}, k_{p-1}), (k_{p-1}, m_{p-1}, k_p) \in \mathcal{A}^{p-1}$$

telles que  $k_1 = s_1$  et  $k_p = s_2$ .

**Proposition 59.** Soit  $x \in \mathcal{B}(R)$ . Si  $G_x$  un graphe étiqueté connexe et  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ . Alors  $\mu_i(G)$  est connexe.

*Démonstration.* Considérons  $x = \{x_1, \dots, x_\ell\}$  une base de racines et notons  $G$  son graphe associé, supposé connexe. Notons  $a = (x_i, x_{i+1})$ ,  $x' = \mu_i(x)$  et  $G' = \mu_i(G)$ . Il y a alors deux cas possibles.

- Si  $a = 0$ , la mutation  $\mu_i$  échange seulement les numéros des sommets  $i$  et  $i + 1$ , ça n'affecte pas la connexité du graphe  $G$ .
- Si  $a \neq 0$ , réalisons une étude au voisinage des sommets  $i$  et  $i + 1$ . En dehors de ce voisinage, le graphe  $G$  n'est pas modifié et la connexité est préservée. Pour tous les sommets  $k$  voisin du sommet  $i$  et/ou du sommet  $i + 1$  dans  $G$ , nous avons :
  - Soit  $b = (x_i, x_k) \neq 0$ , alors la configuration est la suivante :

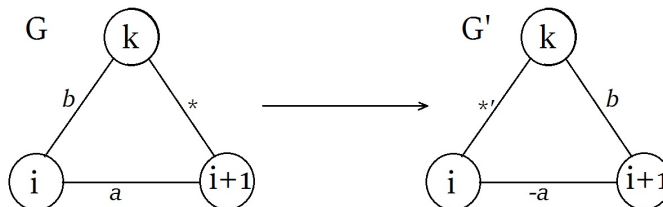


FIGURE 4.5 – Si  $k$  est voisin de  $i$

Peu importe la valeur de  $(x_k, x_{i+1})$ , tout chemin dans  $G$  passant par l'arête  $(k, b, i)$  reste un chemin dans  $G'$  en remplaçant l'arête  $(k, b, i)$  par les arêtes  $(k, b, i+1)$  puis  $(i+1, -a, i)$ .

- Si  $b = (x_i, x_k) = 0$ , alors nécessairement  $c = (x_{i+1}, x_k) \neq 0$  puisque  $k$  est un voisin des sommets  $i$  et  $i+1$ . Dans ce cas, la configuration est la suivante :

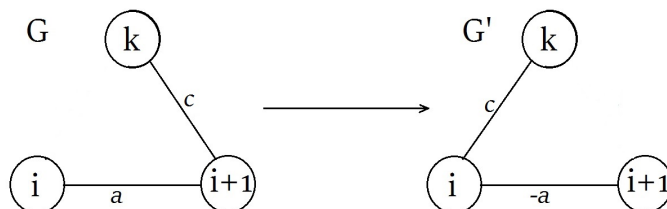


FIGURE 4.6 – Si  $k$  est voisin de  $i+1$  sans être un voisin de  $i$

Là encore, tout chemin dans  $G$  passant par  $(k, c, i+1)$  donne un chemin dans  $G'$  en remplaçant cette arête par  $(k, c, i)$  puis  $(i, -a, i+1)$

La connexité au voisinage des sommets  $i$  et  $i+1$  est donc préservée, et hors de ce voisinage, les arêtes ne sont pas affectées par la mutation  $\mu_i$  donc le graphe  $G'$  est connexe.

□

**Corollaire 60.** Soit  $x \in \mathcal{B}(R)$ . Si  $x$  est dans l'orbite de  $e$  pour l'action de  $BW(R)$ , alors  $G_x$  est un graphe connexe.

*Démonstration.* Le graphe de  $G_e$  coïncide avec le diagramme de Dynkin de  $R$  (aux étiquettes près), dans le cas d'un système de type  $A$ ,  $D$  ou  $E$ , ce diagramme est connexe. De plus, nous venons de voir que l'action de  $Br_\ell$  préserve la connexité, et l'action du groupe de Weyl  $W$  préserve les matrices  $M_x$  et donc la connexité des graphes  $G_x$  pour  $x \in BW(R)e$ . □

#### 4.4.2 Matrices de Gabrielov

Rappelons la définition d'une matrice de Gabrielov.

**Definition.** Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{\ell, \ell}(k)$  est une matrice de Gabrielov si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, M_{ii} = 2$
2.  $\forall i \neq j, M_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Notre objectif est de montrer que pour tout  $x \in BW(R)e$ , la matrice  $M_x$  est une matrice de Gabrielov (Corollaire 64).

Nous dirons qu'une base de racines  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  vérifie la condition  $(C_\star)$  si

$$\forall j \in \{1, \dots, \ell-1\}, (x_j, x_{j+1}) \in \{0, 1, -1\}.$$

L'objectif du lemme suivant est de prouver que l'ensemble des bases distinguées qui vérifient  $(C_\star)$  est stable par les mutations.

**Lemme 61.** *Soit  $x \in \mathcal{B}(R)$  une base de racines telle que  $G_x$  est connexe. Si  $x$  vérifie  $(C_\star)$ , alors  $\forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $\mu_i(x)$  vérifie également la condition  $(C_\star)$ .*

**Remarque :** Notons  $x' = \mu_i(x)$ , pour  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ , alors pour tout  $k \in \{1, \dots, \ell\} \setminus \{i, i + 1\}$ ,  $x_k = x'_k$ . Les seuls produits scalaires dont il faut vérifier s'ils appartiennent ou non à l'ensemble  $\{0, 1, -1\}$  sont donc  $(x'_{i-1}, x'_i)$  et  $(x'_{i+1}, x'_{i+2})$  (puisque  $(x'_i, x'_{i+1}) = -(x_i, x_{i+1}) \in \{0, 1, -1\}$ ). Cependant, nous ferons tout de même une démonstration générale.

*Démonstration.* Supposons que  $x \in \mathcal{B}d$  vérifie  $(C_\star)$  et soit  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ . Notons  $x' = \mu_i(x)$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  tel que  $\lambda_1 = (x'_j, x'_{j+1}) \notin \{0, 1, -1\}$ , c'est à dire,  $|\lambda_1| > 1$ .

D'après la proposition 60, le graphe  $G_{x'}$  associé à la base  $x'$  est connexe, donc il existe un sommet  $k$  de  $G_{x'}$  voisin de  $x'_j$  ou de  $x'_{j+1}$ . Il y a alors trois configurations possibles,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  désigne respectivement  $(x'_j, k)$  et  $(x'_{j+1}, k)$ .

- Configuration n° 1 :  $|\lambda_1| \geq 2$ ,  $|\lambda_2| \neq 0$  et  $|\lambda_3| = 0$
- Configuration n° 2 :  $|\lambda_1| \geq 2$ ,  $|\lambda_2| = 0$  et  $|\lambda_3| \neq 0$
- Configuration n° 3 :  $|\lambda_1| \geq 2$ ,  $|\lambda_2| \neq 0$  et  $|\lambda_3| \neq 0$

Nous pouvons montrer que pour chaque configuration, appliquer la mutation  $\mu_j$  engendre une infinité de graphes distincts ou des bases distinguées. Ce qui est absurde puisque les ensembles  $\mathcal{B}(R)$  et  $\mathcal{G}(\text{Mat}(\mathcal{B}(R)))$  sont finis. Un tel entier  $j$  n'existe pas et donc  $x'$  vérifie également la condition  $(C_\star)$ .

Les détails de cette démonstration pour chaque configuration sont donnés dans le paragraphe annexe, §4.7. □

**Lemme 62.** *Soit  $x \in \mathcal{B}(R)$  une base de racines qui vérifie la condition  $(C_\star)$ , alors  $\forall i \neq j, (x_i, x_j) \in \{0, 1, -1\}$ . En d'autres termes,  $M_x$  est une matrice de Gabrielov.*

*Démonstration.* Comme  $(, )$  est symétrique, il suffit de montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, \ell - 1\}, \forall i \in \{1, \dots, \ell - k\}, (x_k, x_{k+i}) \in \{0, 1, -1\}$$

Démontrons ce résultat par récurrence sur  $i$ .

Pour  $i = 1$ ,  $(x_k, x_{k+1}) \in \{0, 1, -1\}$  car  $x$  vérifie la condition  $(C_\star)$ .

Supposons que  $(x_k, x_{k+i}) \in \{0, 1, -1\}$  et montrons qu'alors  $(x_k, x_{k+i+1}) \in \{0, 1, -1\}$ .

Appliquons la transformation  $\mu_{k+i-1} \circ \dots \circ \mu_{k+1} \circ \mu_k \in Br_\ell$  sur  $x$ , nous obtenons

$$x' = \mu_{k+i-1} \circ \dots \circ \mu_{k+1} \circ \mu_k(x) = \{\dots, x_k, x_{k+i+1}, \dots, x_n\}$$

Or d'après le lemme 61, la condition  $(C_\star)$  est stable par  $Br_\ell$ , donc  $x'$  vérifie également  $(C_\star)$  et  $(x_k, x_{k+i+1}) \in \{0, 1, -1\}$ . □

**Théorème 63.** *Si  $x$  est une base distinguée, alors  $M_x$  est une matrice de Gabrielov.*

*Démonstration.* Toutes les matrices  $M_x$  pour  $x \in \mathcal{B}d$  sont obtenues à partir de la matrice de Cartan de  $R$  en appliquant une suite finie de mutations. Or, nous venons de montrer que la condition  $(C_*)$  est stable par l'action des mutations (Lemme 61) et que la matrice  $M_x$  d'une base de racines  $x$  vérifiant  $(C_*)$  est une matrice de Gabrielov (Lemme 62).  $\square$

**Corollaire 64.** *Si  $x$  est dans l'orbite de  $e$  pour l'action de  $BW(R)$ , alors  $M_x$  est une matrice de Gabrielov.*

*Démonstration.* L'action du groupe de Weyl préservent les matrices  $M_x$  et toutes les matrices de  $\text{Mat}(\mathcal{B}d)$  sont des matrices de Gabrielov d'après le Théorème précédent.  $\square$

Terminons avec une conséquence surprenante du Théorème 49 :

**Théorème 65.** *Pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  et pour tout  $x \in \mathcal{B}(R)$  tel que  $M_x$  est une matrice de Gabrielov, nous avons*

$$\mu_i^{12}(x) = x$$

*Démonstration.* Remarquons que la mutation  $\mu_i$  appliquée à une base  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  n'affectent que le  $i$ -ème et le  $i + 1$ -ème vecteurs. Aussi, on peut se ramener au cas  $\ell = 2$ , où il n'y a qu'une mutation  $\mu_1$ .

Les calculs montrent alors que si  $(x_1, x_2) \in \{0, 1, -1\}$ ,  $\mu_1^{12}(x) = x$ .  $\square$

**Remarque (Perspectives).** Après ce Théorème 65, il semble naturel d'étudier le groupe

$$Br_\ell / \langle \mu_i^{12}, i \in \{1, \dots, \ell - 1\} \rangle.$$

En particulier, ce groupe est-il infini comme  $Br_\ell$  ou non ?

#### 4.4.3 Actions de $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$ et $\rho(Br_\ell)$ .

Rappelons les changements de signes introduits par Gabrielov, [Gab]. Pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ,

$$\gamma_i(\{x_1, \dots, x_\ell\}) = \{x_1, \dots, -x_i, \dots, x_\ell\}.$$

Ces fonctions  $\gamma_i$  induisent une action de  $\mathbb{Z}_2^\ell$  sur l'ensemble  $\mathcal{B}(R)$ .

Dans l'article [Bri], Brieskorn remarque dans un exemple que  $\gamma_2\gamma_1 = \mu_1^6$ . Après avoir donné un exemple dans  $\mathfrak{sl}_3$ , nous montrons que si  $M_x$  est une matrice de Gabrielov et  $G_x$  est un graphe connexe, alors l'orbite  $\rho(Br_\ell)x$  contient  $\mathbb{Z}_2^\ell x$ . Nous proposons une démonstration constructive de ce résultat en exprimant les changements de signes  $\gamma_i$  comme des produits de mutations (Théorème 66).

**Exemple.** Reprenons l'exemple du système de racines  $A_2$  dans la figure 4.9. Nous pouvons par exemple observer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_1^3(\{e_1, e_2\}) &= \{e_1, -e_2\} = \gamma_2(\{e_1, e_2\}) \\ \mu_1^9(\{e_1, e_2\}) &= \{-e_1, e_2\} = \gamma_1(\{e_1, e_2\}) \end{aligned}$$

Cette observation sur les changements de signes se généralise et fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 66.** *Si  $G_x$  est un graphe connexe et  $M_x$  est une matrice de Gabrielov, alors l'orbite de  $x$  pour l'action de  $\mathbb{Z}_2^\ell$  est contenu dans  $\rho(Br_\ell)x$ , l'orbite de  $x$  pour l'action des mutations.*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{B}(R)$  une base de racines telle que  $G_x$  soit un graphe connexe et  $M_x$  une matrice de Gabrielov. Soit  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ . Commençons par quelques observations.

— Si  $\lambda := (x_i, x_{i+1}) = \pm 1$ , nous avons

$$\mu_i^3(x) = \begin{cases} \gamma_{i+1}(x) & \text{si } \lambda = 1 \\ \gamma_i(x) & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\mu_i^6(x) = \gamma_i \circ \gamma_{i+1}(x)$$

$$\mu_i^9(x) = \begin{cases} \gamma_i(x) & \text{si } \lambda = 1 \\ \gamma_{i+1}(x) & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}$$

Lorsque  $(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ ,  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$  s'écrivent donc  $\mu_i^m$  avec  $m \in \{3, 9\}$  selon la valeur de  $(x_i, x_{i+1})$ .

— En revanche, supposons cette fois que  $(x_{i-1}, x_i) = (x_i, x_{i+1}) = 0$  et montrons que  $\gamma_i(x) = \nu(x)$ , où  $\nu \in Br_\ell$ .

D'après la proposition 60, le graphe  $G_x$  associé à la base  $x$  est connexe, donc l'ensemble

$$\Upsilon = \{j \mid j \neq i \text{ et } (x_j, x_i) \neq 0\}$$

est non vide et nous pouvons alors considérer l'élément  $x_{j_0} \in \Upsilon$  avec  $|j_0 - i|$  minimal (notons que cet élément n'est pas nécessairement unique). Nous pouvons supposer que  $j_0 < i$ , le raisonnement dans le cas inverse étant très similaire. Nous avons alors

$$x = \{x_1, \dots, x_{j_0}, \dots, x_i, \dots, x_\ell\}$$

Appliquons alors la transformation  $\mu_{j_0+1} \circ \dots \circ \mu_{i-1}$  sur  $x$ . Par définition de  $j_0$ , nous avons

$$\mu_{j_0+1} \circ \dots \circ \mu_{i-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{j_0}, x_i, x_{j_0+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\ell\}$$

Comme dans le point précédent, nous appliquons ensuite  $\mu_{j_0}^m$  avec  $m \in \{3, 9\}$  selon le signe de  $(x_{j_0}, x_i)$  et nous obtenons

$$\mu_{j_0}^m \circ \mu_{j_0+1} \circ \dots \circ \mu_{i-1}(x) = \{x_1, \dots, x_{j_0}, -x_i, x_{j_0+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\ell\}$$

Enfin, si nous appliquons  $\mu_{i-1} \circ \mu_{i-2} \circ \dots \circ \mu_{j_0+1}$ , nous avons

$$\mu_{i-1} \circ \mu_{i-2} \circ \dots \circ \mu_{j_0+1} \circ \mu_{j_0}^m \circ \mu_{j_0+1} \circ \dots \circ \mu_{i-1}(x) = \gamma_i(x)$$

et  $\gamma_i(x)$  appartient à l'orbite de  $x$  pour l'action du groupe de tresses  $Br_\ell$ . □

#### 4.4.4 Perspectives

Durant notre étude, nous avons cherché un critère nous permettant de savoir si une matrice était la matrice d'une base distinguée ou non. Nous avons observé le résultat suivant,

**Lemme 67.** *Si  $M_x$  est la matrice d'une base distinguée  $x$ , alors  $\det(M_x) = \Delta_R$  où  $\Delta_R$  est le déterminant de la matrice de Cartan de  $R$ .*

*Démonstration.*  $M \in \text{Mat}(\mathcal{B}d)$  donc, d'après la proposition 64,  $\forall i \neq j, M_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . De puis, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ,

$$\det(\mu_i(M)) = \det(T(M))^2 \times \det(M)$$

où

$$T(M) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{i+1,i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-(i+1)} \end{pmatrix}$$

$\det(T(M)) = \pm 1$ , donc  $\det(\mu_i(M)) = \det(M)$ . En d'autres termes, les mutations préservent le déterminant.

De plus, la matrice de Cartan de  $R$  appartient à l'ensemble  $\text{Mat}(\mathcal{B}d)$  et les mutations agissent transitivement sur cet ensemble, ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque :** Cette condition n'est pas suffisante.

**Exemple** (Contre-Exemple). Soit  $e = \{e_1, \dots, e_4\}$  une base de racines simples du système de racines  $D_4$ . Alors  $M_e$  est la matrice de Cartan de  $D_4$  et son déterminant est 4.

Cependant, la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est également de déterminant 4, et pourtant, il n'existe aucune suite finie de mutations qui transforme  $M_e$  en  $X$ , donc  $X$  n'est pas la matrice d'une base  $x \in \mathcal{B}d$ .

Par ailleurs, le logiciel de calcul formel Maple nous a permis de déterminer que le nombre de matrices de Gabrielov de taille 4 et de déterminant 4 est 104. Or, lorsque  $R = D_4$ , l'ensemble des matrices  $M_x$  pour  $x \in \mathcal{B}d$  est de cardinal 72. La condition n'est donc pas suffisante dans ce cas.

Cependant, nous pensons que lorsque  $R$  est un système de racines de type  $A_\ell$ , le résultat suivant est vrai.

**Conjecture 1.** *Soit  $R$  un système de racines de type  $A_\ell$ , et  $e = \{e_1, \dots, e_\ell\}$  une base de racines simples fixée telle que,  $\mathcal{B}d$ , l'ensemble des bases distinguées, est l'orbite de  $e$  pour l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$ . Alors,*

$$M \in \text{Mat}(\mathcal{B}d) \iff M \text{ est une matrice de Gabrielov et } \det(M) = \Delta_{A_\ell} = \ell + 1$$

Cette conjecture se vérifie pour  $\ell \in \{2, 3, 4\}$ .

## 4.5 Cardinal de $\mathcal{B}d$

Dans cette section, nous utilisons les résultats des deux parties précédentes pour déterminer le cardinal de l'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$ . Rappelons que  $\mathcal{B}d$  est l'orbite d'une base de racines simples  $e$  fixée pour l'action de  $Br_\ell$ .

Nous commençons par évoquer des résultats obtenus auprès de Tits et Zagier par Pierre Deligne, extraits d'une lettre manuscrite à Eduard Looijenga, [Del]. Puis, en faisant le lien entre son travail et les bases distinguées, nous en déduisons le cardinal de cet ensemble.

**L'ensemble  $\Xi_c$  de Deligne.** Soit  $c \in W$ , un élément de Coxeter. Introduisons les ensembles suivants :

$$\Xi_c = \{\{x_1, \dots, x_\ell\} \in \mathcal{B}(R) \mid s_{x_1} \dots s_{x_\ell} = c\}$$

$$\Xi'_c = \{(s_{x_1}, \dots, s_{x_\ell}) \mid (x_1, \dots, x_\ell) \in \Xi_c\}$$

Le résultat suivant découle naturellement de la Proposition 55.

**Proposition 68.** *L'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$  est inclus dans  $\Xi_{c_e}$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $e \in \mathcal{B}d$  et toute autre base  $x \in \mathcal{B}d$  vérifie  $c_x = c_e$ , donc  $x \in \Xi_{c_e}$ .  $\square$

Grâce aux résultats de Deligne énoncés ci-dessous, nous allons montrer par la suite que les deux ensembles  $\mathcal{B}d$  et  $\Xi_{c_e}$  sont égaux. Cela nous permet d'obtenir le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{B}d$ , voir Figure 4.5.

**Lemme 69.**  $|\Xi_c| = 2^\ell \times |\Xi'_c|$ .

*Démonstration.* Introduisons la fonction

$$\phi_c: \begin{cases} \Xi_c \longrightarrow \Xi'_c \\ x = \{x_1, \dots, x_\ell\} \longmapsto \{s_{x_1}, \dots, s_{x_\ell}\} \end{cases}$$

Si  $\forall x \in V, s_a(x) = s_b(x)$ , alors  $a = \pm b$ .

Donc,  $\phi_c(\{x_1, \dots, x_\ell\}) = \phi_c(\{y_1, \dots, y_\ell\}) \iff \forall i \in \{1, \dots, \ell\}, x_i = \pm y_i$ .  $\square$

**Théorème 70 (Deligne).**  *$Br_\ell$  agit transitivement sur  $\Xi'_c$ .*

La démonstration se fait par récurrence sur  $\ell$ , voir [Del]. Ce théorème permet à Deligne de déterminer le cardinal des ensembles  $\Xi_c$  pour les systèmes de racines  $A, D$  et  $E$ . Nous retrouverons ces résultats dans le paragraphe suivant.



**Action de  $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$  sur  $\Xi_{c_e}$ .** Rappelons que  $e = \{e_1, \dots, e_\ell\}$  désigne une base de racines simples de  $R$  fixée. L'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$  est alors l'orbite de  $e$  pour l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$ . Nous avons aussi noté

$$c_e = s_1 \dots s_\ell$$

la transformation de Coxeter,  $c_e \in W$ , le groupe de Weyl de  $R$ .

**Corollaire 71.**  $\Xi_{c_e}$  forme une orbite pour l'action de  $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$ .

*Démonstration.* Soit  $f = \{f_1, \dots, f_\ell\} \in \Xi_{c_e}$ , c'est à dire  $s_{f_1} \dots s_{f_\ell} = c_e$ . Il faut montrer qu'il existe  $\tilde{\beta} \in \rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$  tel que  $f = \tilde{\beta}(e)$ .

Nous avons  $(s_{f_1}, \dots, s_{f_\ell}) \in \Xi'_{c_e}$ , et  $(s_1, \dots, s_\ell) \in \Xi'_{c_e}$ . Comme  $Br_\ell$  agit transitivement sur  $\Xi'_{c_e}$  d'après le théorème 70, il existe  $\beta \in Br_\ell$  tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \beta(s_{f_i}) = s_i$$

Notons  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell) = (\beta(f_1), \dots, \beta(f_n))$ . Alors,

$$\phi_{c_e}(\tilde{f}) = \phi_{c_e}(e)$$

Donc, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ,  $\tilde{f}_i = \pm e_i$ . En composant  $\beta$  avec les changements de signe  $\gamma \in Br_\ell$  adéquats, nous construisons  $\tilde{\beta} = \gamma \circ \beta \in \rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$  telle que  $f = \tilde{\beta}(e)$ . L'action de  $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$  sur  $\Xi_{c_e}$  est bien transitive.  $\square$

**Cardinal de l'ensemble des bases distinguées  $\mathcal{B}d$ .** Nous venons de montrer que  $\Xi_{c_e}$  est une orbite pour l'action de  $\rho(Br_\ell)\mathbb{Z}_2^\ell$ . Les bases de  $\Xi_{c_e}$  vérifient les hypothèses du Théorème 66, puisque pour tout  $x \in \Xi_{c_e}$ ,  $M_x$  est la matrice de Cartan de  $R$  et  $G_x$  est son diagramme de Dynkin.

**Corollaire 72.** L'ensemble  $\Xi_{c_e}$  est égal à l'ensemble des bases distinguées, c'est à dire

$$\Xi_{c_e} = \mathcal{B}d$$

*Démonstration.*  $e \in \Xi_{c_e}$  donc, d'après le Corollaire 71 et le Théorème 66,  $\Xi_{c_e} = \mathcal{B}d$ .  $\square$

**Conséquence :** La lettre de Deligne, [Del], nous permet à présent de donner le cardinal de l'ensemble des bases distinguées. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.5 ci-dessous.

$R$	$\#\mathcal{B}d$
$A_\ell$	$2^\ell(\ell + 1)^{\ell-1}$
$D_\ell$	$2^{\ell+1}(\ell - 1)^\ell$
$E_6$	$2^{15}3^4$
$E_7$	$2^83^{12}$
$E_8$	$2^93^55^7$

FIGURE 4.7 – Cardinal de l'ensemble des bases distinguées

## 4.6 Transitivité de l'action de $BW(A_\ell)$ sur $\mathcal{B}(A_\ell)$

Dans ce paragraphe, nous considérons que  $R = A_\ell$  pour  $\ell \geq 1$ .

Rappelons que  $BW(R) = \rho(Br_\ell \times W) \subset \text{Aut}(\mathcal{B}(R))$ . L'objectif de ce dernier paragraphe est de faire quelques remarques sur l'action de  $BW(A_\ell)$  sur l'ensemble des bases ordonnées de racines  $\mathcal{B}(A_\ell)$  en particulier dans le cas où  $A(R)$ .

Dans son article [Car2], Carter classe les classes de conjugaison du groupe de Weyl en introduisant la notion de graphes admissibles. Ces graphes sont en correspondance avec les classes de conjugaisons des transformations  $c_x$  pour  $x \in \mathcal{B}(R)$  que nous avons introduites précédemment.

La particularité du système de racines  $A_n$  est d'avoir un seul graphe admissible, le diagramme de Dynkin. En d'autres termes, pour tout  $x \in \mathcal{B}(A_\ell)$ , les transformations  $c_x$  sont conjugués, ce sont donc des éléments de Coxeter.

Cette observation nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B}(A_\ell)/Br_\ell &\rightarrow \mathcal{T}_c \\ \mathcal{O}_k &\mapsto c_{x_k} \text{ où } x_k \in \mathcal{O}_k. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $\Phi$  est bijective, et que l'action de  $BW(A_\ell)$  est transitive sur  $\mathcal{B}(R)$ .

**Proposition 73.** *L'application  $\Phi$  est surjective.*

*Démonstration.* Soit  $c_k$  une transformation de Coxeter, il existe  $h \in W$  tel que

$$c_e = hc_k h^{-1}$$

Considérons alors l'élément  $h.e = \{he_1, \dots, he_\ell\}$ , nous avons

$$c_{h.e} = s_{h.e_1} s_{h.e_2} \dots s_{h.e_\ell} = h s_{e_1} h^{-1} h s_{e_2} h^{-1} \dots h s_{e_\ell} h^{-1} = hc_e h^{-1} = c_k$$

Notons  $\mathcal{O}_k$  l'orbite de  $h.e$  pour l'action de  $Br_\ell$ , alors  $\Phi(\mathcal{O}_k) = c_k$ . □

**Théorème 74.**  *$BW(A_\ell)$  agit transitivement sur  $\mathcal{B}(A_\ell)$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{B}(A_\ell)$ , une base de racines. Montrons qu'il existe  $\gamma \in BW(A_\ell)$  tel que

$$e = \gamma(x).$$

- Si  $c_x = c_e$ , alors comme nous avons montré que  $\Xi_e = \mathcal{B}d$ ,  $x$  est également une base distinguée.  $x$  et  $e$  sont alors dans la même orbite pour l'action de  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(R)$  et il existe bien  $\gamma \in Br_\ell \hookrightarrow BW(A_\ell)$  tel que  $e = \gamma(x)$ .

- Sinon  $c_x$  et  $c_e$  sont des transformations de Coxeter distinctes, et il existe  $h \in W$  tel que

$$c_e = hc_x h^{-1}.$$

Le pseudo-élément de Coxeter associé à l'élément  $h.x \in \mathcal{B}(R)$  est

$$\begin{aligned} c_{h.x} &= s_{h.x_1} s_{h.x_2} \cdots s_{h.x_\ell} \\ &= h s_{x_1} h^{-1} \cdot h s_{x_2} h^{-1} \cdots h s_{x_\ell} h^{-1} \\ &= h s_{x_1} s_{x_2} \cdots s_{x_\ell} h^{-1} \\ &= h c_x h^{-1} = c_e. \end{aligned}$$

Donc  $h.x \in \Xi_e = \mathcal{B}d$  et il existe un élément  $\beta \in Br_\ell$  tel que  $\beta(h.x) = e$ .  $\gamma = \beta.h$  convient donc. □

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application  $\Phi$  introduite plus haut.

**Théorème 75.** *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B}(A_\ell)/Br_\ell &\rightarrow \mathcal{T}_c \\ \mathcal{O}_k &\mapsto c_{x_k} \text{ où } x_k \in \mathcal{O}_k \end{aligned}$$

est bijective.

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q \in \mathcal{B}(A_\ell)/Br_\ell$  deux orbites distinctes telles que

$$\Phi(\mathcal{O}_p) = \Phi(\mathcal{O}_q) = c_{pq}.$$

Considérons  $x_p$  et  $x_q$  des représentants des orbites  $\mathcal{O}_p$  et  $\mathcal{O}_q$ . Comme l'action de  $BW(A_\ell)$  commute, on a vu dans le théorème précédent qu'il existait  $\beta_p \in Br_\ell, \beta_q \in Br_\ell, h \in W$  tels que

$$\begin{cases} c_e = h c_{pq} h^{-1} \\ \beta_p(h.x_p) = e \\ \beta_q(h.x_q) = e \end{cases}$$

Donc,  $\beta_p(h.x_p) = \beta_q(h.x_q)$ , c'est à dire,  $x_p = h^{-1} \beta_p^{-1} \beta_q(h.x_q)$ . Or les actions de  $W$  et  $Br_\ell$  commutent, donc  $x_p = \beta_p^{-1} \beta_q(x_q)$  et  $x_p$  et  $x_q$  sont dans la même orbite pour l'action de  $Br_\ell$  sur l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(A_\ell)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\mathcal{O}_p \neq \mathcal{O}_q$ . □

Finalement, nous pouvons résumer les actions du groupe de Weyl  $W$  et du groupe de tresses  $Br_\ell$  sur l'ensemble  $\mathcal{B}(A_\ell)$  par la Figure 4.8.

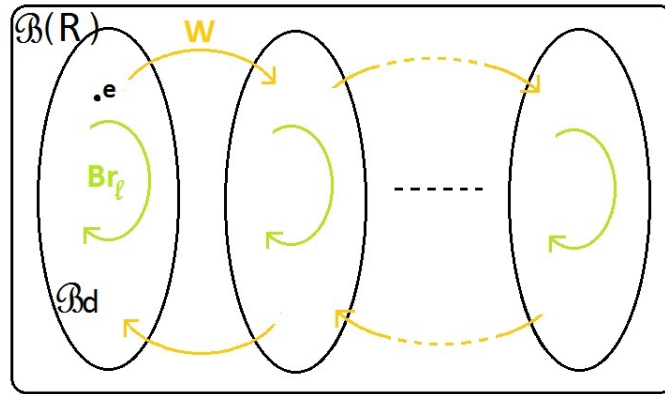


FIGURE 4.8 – Actions de  $W$  et de  $Br_\ell$  sur  $\mathcal{B}(A_\ell)$ .

**Remarque.** Nous connaissons le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{B}d$  ( $|\mathcal{B}d| = 2^\ell(\ell + 1)^{\ell-1}$ , voir Figure 4.5), et celui de  $\mathcal{T}_c$ . Il y a en effet  $\frac{|W|}{h} = \ell!$  transformations de Coxeter puisque  $W$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_{\ell+1}$  et  $h = \ell + 1$ . Nous pouvons donc retrouver le cardinal de l'ensemble des bases de racines  $\mathcal{B}(A_\ell)$  :

$$|\mathcal{B}(A_\ell)| = 2^\ell(\ell + 1)^{\ell-1}\ell!$$

Nous terminons par un autre exemple, et nous observons l'action de  $Br_2$  et  $W \simeq \mathfrak{S}_3$  sur l'ensemble des bases de racines d'une algèbre de Lie de type  $A_2$ .

**Exemple.** Dans le cas de  $A_2$ , le groupe de tresses  $Br_2$  est réduit à une seule mutation  $\mu_1$ . Dans la figure 4.9 ci-dessous, nous donnons l'action de  $W$  (représentée par des flèches oranges) et de  $Br_2$  (représentée par des flèches vertes) sur l'ensemble  $\mathcal{B}(A_2)$  de cardinal 24.

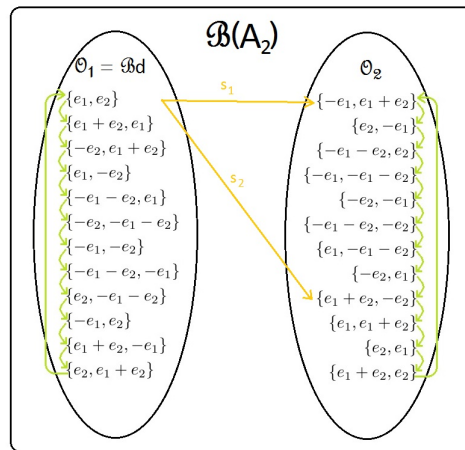


FIGURE 4.9 – L'action de  $W$  (en orange) et de  $Br_2$  (en vert) sur  $\mathcal{B}(A_2)$ .

Observons que pour toute base  $x \in \mathcal{B}(A_2)$ ,  $\mu_1^{12}(x) = x$ . Cette assertion a été prouvée dans le Théorème 65.

**Remarque.** Dans le cas des systèmes de racines de type  $D$  ou  $E$ , l'action de  $BW(R)$  sur  $\mathcal{B}(R)$  n'est pas transitive.

## 4.7 Annexe - Preuve du lemme 61

Dans cette annexe, nous donnons les détails techniques de la preuve du lemme 61. Avant de commencer, rappelons le contexte.

Nous considérons toujours  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de racines simples fixée, et  $\mathcal{B}d$  l'ensemble des bases distinguées, c'est à dire, l'orbite de  $e$  pour l'action des mutations  $\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}$ . Rappelons que l'ensemble  $\mathcal{B}d$  est de cardinal fini.

À chaque base distinguée, nous pouvons associer une matrice,

$$\forall x \in \mathcal{B}d, M_x = ((x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq \ell}.$$

ainsi, qu'un graphe étiqueté,

$$G_x = (\mathcal{S}, \mathcal{A}) \text{ avec } \mathcal{S} = \{1, \dots, \ell\} \text{ et } (i, -m_{ij}, j) \in \mathcal{A} \iff m_{ij} \neq 0.$$

Nous dirons qu'une base de racines  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  vérifie la condition  $(C_\star)$  si

$$\forall j \in \{1, \dots, \ell - 1\}, (x_j, x_{j+1}) \in \{0, 1, -1\}$$

L'objectif du lemme suivant est de prouver que l'ensemble des bases distinguées qui vérifient  $(C_\star)$  est stable par les mutations.

**Lemme 76.** *Soit  $x \in \mathcal{B}d$  une base de racines qui vérifie  $(C_\star)$ , alors  $\forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $\mu_i(x)$  vérifie également la condition  $(C_\star)$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $x \in \mathcal{B}d$  vérifie  $(C_\star)$  et soit  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ . Notons  $x' = \mu_i(x)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  tel que

$$\lambda_1 = (x'_j, x'_{j+1}) \notin \{0, 1, -1\},$$

c'est à dire,  $|\lambda_1| > 1$ . D'après la proposition 60, le graphe  $G_{x'}$  associé à la base  $x'$  est connexe, donc il existe un sommet  $x'_k$  de  $G_{x'}$  voisin de  $x'_j$  ou de  $x'_{j+1}$ . Dans un soucis de clarté, ces trois sommets  $x'_j, x'_{j+1}$  et  $x'_k$  seront notés  $j, j + 1$  et  $k$  sur les figures.

Il y a alors trois configurations possibles,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  désignent respectivement  $(x'_j, k)$  et  $(x'_{j+1}, k)$ .

— Configuration n° 1 :

$$|\lambda_1| \geq 2, |\lambda_2| \neq 0 \text{ et } |\lambda_3| = 0$$

Ce qui, dans le graphe  $G_{x'}$  revient à avoir la configuration suivante (localement) :

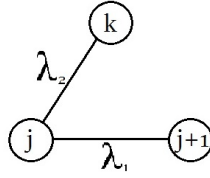


FIGURE 4.10 – Configuration n° 1

— Configuration n° 2 :

$$|\lambda_1| \geq 2, |\lambda_2| = 0 \text{ et } |\lambda_3| \neq 0$$

Au niveau du graphe  $G_{x'}$ , cela signifie qu'on a, localement, un graphe de la forme :

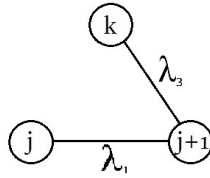


FIGURE 4.11 – Configuration n° 2

— Configuration n° 3 :

$$|\lambda_1| \geq 2, |\lambda_2| \neq 0 \text{ et } |\lambda_3| \neq 0$$

C'est à dire,

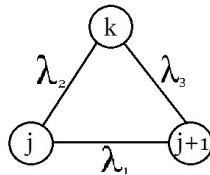


FIGURE 4.12 – Configuration n° 3

Nous allons montrer que pour chaque configuration, nous pouvons engendrer une infinité de graphes distincts ou une infinité de bases distinguées. Ce qui est absurde puisque les ensembles  $\mathcal{B}d$  et  $\mathcal{G}(\text{Mat}(\mathcal{B}d))$  sont finis. Un tel entier  $j$  n'existe pas et donc  $x'$  vérifie également la condition  $(C_*)$ .

**Configuration n° 1.** Appliquons la mutation  $\mu_j$  à plusieurs reprises à partir de la configuration n° 1.

Introduisons la suite  $(\lambda_{3,n})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lambda_{3,n}$  est le produit scalaire entre les sommets  $k$  et  $j + 1$  après  $n$  applications de  $\mu_j$ . Nous avons alors :

$$\begin{cases} \lambda_{3,0} = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_{3,1} = \lambda_2 \\ \forall n \geq 2, \lambda_{3,n+2} = \lambda_{3,n} - (-1)^n \lambda_1 \lambda_{3,n+1} \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{3,n} \in \mathbb{Z}$  et par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{3,n+1}| > |\lambda_{3,n}|$ . Donc la suite  $(\lambda_{3,n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ , et il y a une infinité de graphes distincts. Absurde.

**Configuration n° 2.** En appliquant  $\mu_j$ , nous nous ramenons à la configuration précédente. Absurde.

**Configuration n° 3.** Là encore, appliquons la mutation  $\mu_j$  à plusieurs reprises à partir de la configuration n° 3. Nous pouvons considérer la suite des produits scalaires entre les sommets  $k$  et  $j + 1$  après  $n$  applications de  $\mu_j$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cette suite de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  est alors définie par :

$$\begin{cases} \lambda_{3,0} = \lambda_3 \\ \lambda_{3,1} = \lambda_2 \\ \lambda_{3,n+2} = \lambda_{3,n} - (-1)^n \lambda_1 \lambda_{3,n+1} \end{cases}$$

Dans toute la suite, nous supposons que  $|\lambda_{3,n}| > 0$ , auquel cas, nous sommes ramenés à la configuration n° 2.

Supposons qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $|\lambda_{3,n_0}| < |\lambda_{3,n_0+1}|$ .

Alors par récurrence, comme dans la configuration n° 1, nous montrons que  $(|\lambda_{3,n}|)_{n \geq n_0}$  est strictement croissante donc  $|\lambda_{3,n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Absurde.

Si un tel rang  $n_0$  n'existe pas.

La suite  $(|\lambda_{3,n}|)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être strictement décroissante, il existe nécessairement un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $(|\lambda_{3,n}|)_{n \geq n_0}$  est constante.

Nous avons donc

$$|v_{n_0}| = |v_{n_0+1}| = |v_{n_0+2}|$$

Or

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}} \right| \\ &= \left| \frac{v_{n_0}}{v_{n_0+1}} + (-1)^{n_0+1} \lambda_1 \right| \\ &= |\pm 1 + (-1)^{n_0+1} \lambda_1| \end{aligned}$$

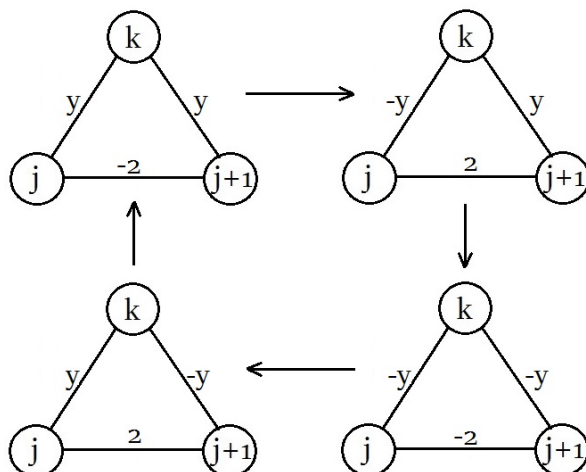


FIGURE 4.13 – Dernier cas possible.

Si  $|\lambda_1| > 2$ , nous aboutissons à une contradiction. Reste à traiter le cas où  $\lambda = 2$  ou  $\lambda = -2$ .

Si  $\lambda_1 = 2$  et qu'il existe un rang  $n_1 \geq n_0$  tel que  $v_{n_1} = v_{n_1+1}$ , nous pouvons encore montrer que la suite  $(|\lambda_{3,n}|)_{n \geq n_1}$  tend vers  $+\infty$ , absurde. De même, si  $\lambda_1 = -2$  et qu'il existe un rang  $n_1 \geq n_0$  tel que  $v_{n_1} = -v_{n_1+1}$ .

Si  $\lambda = \pm 2$  et qu'un tel  $n_1$  n'existe pas, les deux configurations mises de côtés sont équivalentes. En appliquant  $\mu_j$ , nous avons en effet, la configuration représentée par la Figure 4.13 ci-dessous.

Contrairement aux configurations précédentes, appliquer la mutation  $\mu_j$  dans ce cas là, n'engendre pas une infinité de graphes de  $\mathcal{G}(\text{Mat}(\mathcal{B}d))$ . Pour trouver une contradiction, nous allons montrer que  $\mu_j$  engendre une infinité de bases distinguées. Pour cela, notons

$$x_n = \mu_j^{n_0+n}(x) = \{x_{1,n}, \dots, x_{\ell,n}\}$$

$x_{j,n}$  est une combinaison linéaire de  $x_{j,0}$  et de  $x_{j+1,0}$  :

$$x_{j,n} = a_n x_{j,0} + b_n x_{j+1,0}$$

Par récurrence, nous pouvons montrer que les suites  $(|a_n|)$  et  $(|b_n|)$  sont strictement croissantes, donc l'ensemble  $\mathcal{B}d$  est infini. Absurde.

Finalement, un tel entier  $j$  n'existe pas, et  $x'$  vérifie la condition  $(C_\star)$ .  $\square$



# Biographies et Bibliographie



# Biographies

## Harold Scott MacDonald Coxeter

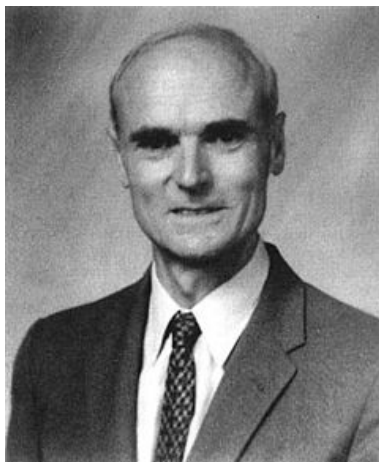


FIGURE 4.14 – Harold Scott MacDonald Coxeter (1907 – 2003)

Harold Scott MacDonald Coxeter est un mathématicien britannique et canadien, né le 9 Février 1907 à Londres, et décédé le 31 Mars 2003 à Toronto (Canada).

**Études et parcours professionnel.** Coxeter fait ses études supérieures à l'Université de Cambridge, et décroche son doctorat en 1931. Il travaille quelques temps à l'Université de Princeton, avant de s'installer définitivement à l'Université de Toronto.

**Ses travaux.** Coxeter a apporté sa contribution dans les domaines de la théorie des polytopes, la géométrie non euclidienne, la théorie des groupes et la combinatoire.

Les polytopes de Coxeter sont les domaines fondamentaux de groupes de réflexions discrets, aujourd'hui appelés les groupes de Coxeter. Les groupes de Weyl sont un exemple de groupes de Coxeter. En 1934, Coxeter classe certains de ces groupes de Coxeter.

Il laisse plus de 150 articles publiés, et 12 livres. Avant de devenir mathématicien, il voulait être compositeur. Pour lui, la musique et les mathématiques étaient fortement liées, il publie d'ailleurs en 1962, un article à ce sujet dans le *Canadian Music Journal*.

## Eugene Dynkin



FIGURE 4.15 – Eugene Dynkin (1924 – 2014)

Eugene Borisovich Dynkin est un mathématicien russe né le 11 Mai 1924 à Leningrad, et décédé le 14 Novembre 2014 dans l'état de New York.

**Études et parcours professionnel.** Eugene Dynkin entre à l'Université de Moscou à l'âge de 16 ans (1940), malgré les ennuis politiques de son père avec le régime stalinien. Des problèmes de vue lui permettent d'éviter le service militaire et de poursuivre ses études pendant la seconde guerre mondiale. Après l'obtention de son doctorat en 1948, il devient d'ailleurs l'assistant de Kolmogorov. De 1954 à 1968, il a un poste permanent à l'Université de Moscou et se consacre de plus en plus aux probabilités. Dynkin est ensuite transféré à l'Institut central d'économie et de mathématiques de l'Académie des sciences de l'URSS jusqu'en 1976, il devient Professeur à l'Université Cornell, dans l'état de New York, aux États – Unis.

**Ses travaux.** Pendant ces dix premières années à l'Université de Moscou, il s'intéresse aussi bien aux probabilités qu'à l'algèbre. En particulier, c'est à cette époque qu'il introduit les graphes qui portent son nom, les diagrammes de Dynkin, une nouvelle approche pour la classification des algèbres de Lie semi-simples. Ce sont les travaux de Weyl et de van der Waerden qui lui inspirent ces diagrammes. Coxeter introduit également ces diagrammes, de façon indépendante.

En 1945, il publie son premier article en probabilités, résolvant un problème sur les chaînes de Markov posé par Kolmogorov. Par la suite, ses travaux se concentrent sur les probabilités, plutôt que sur l'algèbre.

## Bertram Kostant



FIGURE 4.16 – Bertram Kostant (1928 – 2017)

Bertram Kostant est un mathématicien américain, né le 24 Mai 1928 à Brooklyn, et décédé le 2 Février 2017 dans le Massachusetts.

**Études et Parcours professionnel.** Bertram Kostant débute ses études supérieures à l'Université Purdue (Indiana - États-Unis), il étudie d'abord l'ingénierie chimique puis décroche un Bachelor en mathématiques (1950).

Il étudie ensuite à l'Université de Chicago, il y découvre les groupes de Lie ("The sheer beauty of it all resonated with me" - B. Kostant). Il obtient son Master en 1951 et son Doctorat en 1954. Sa thèse s'intitule *Representations of a Lie algebra and its enveloping algebra on a Hilbert space*.

De 1954 à 1956, Kostant enseigne à l'Université de Princeton (New Jersey - États-Unis), ses travaux se portent alors sur la structure des algèbres de Lie simples. Il travaille à l'Université de Californie à Berkeley jusqu'en 1962, puis rejoint l'Institut de technologie du Massachusetts (MIT). Il prend sa retraite en 1993 et devient Professeur émérite.

**Ses travaux.** Ce qui caractérise le travail de Kostant, c'est sa capacité à mettre en relation les mathématiques fondamentales, en particulier les groupes de Lie, et la physique théorique.

Il a travaillé sur tous les aspects de la théorie de Lie, comme la théorie de la quantification géométrique (dont il est l'un des principaux concepteurs) et la géométrie symplectique, la géométrie des espaces homogènes, la cohomologie des algèbres de Lie ou encore la mécanique hamiltonienne.

Kostant laisse derrière lui une centaine de publications en 60 ans de recherche. Entre autres reconnaissances, il a reçu en Juin 2016 la Médaille Wigner "pour ses contributions fondamentales à la théorie des représentations qui ont mené à de nouvelles branches des mathématiques et de la physique".



# Bibliographie

- [AVGZ] V.I. Arnold, A.N. Varchenko, S. M. Gusein – Zade, *Singularities of Differentiable Maps*. Volume II Monodromy and Asymptotics of Integrals. Monographs in Mathematics vol. 83. Birkhäuser, Basel (1988)
- [BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Coxeter functors and a theorem of Gabriel*. Russian Math. Surveys, Volume 28, Number 2. (1973), 19 – 23
- [BG] D. Borthwick, S. Garibaldi, *Did a 1-dimensional magnet detect a 248-dimensional Lie algebra ?*. AMS Not. **58** (2011), 1055 – 1065
- [Bou] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Groupes et algèbres de Lie*. Chapitres 4 à 6. Springer Science & Business Media, 26 Mai 2007 – 282 pages. ISBN 978-3-540-34491-9
- [BCDS] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey, R. Sasaki, *Affine Toda field theory and exact S-matrices*. Nucl. Phys. **B338** (1990), 689 – 746
- [Bo] A. I. Bondal, *A symplectic groupoid of triangular bilinear forms and the braid group*, Izv. Math. **68** :4 (2004), 659–708.
- [Bri] E. Brieskorn, *Automorphic sets and braids and singularities*. Contemp. Math. **78**, 45 – 115 (1988)
- [BS] L. Brillion, V. Schechtman, *Coxeter element and particle masses*. Sel. Math. New Ser. **22**(4), 2591 – 2609 (2016)
- [BRSV] L. Brillion, R. Ramazashvili, V. Schechtman, A. Varchenko, *Vanishing cycles and Cartan eigenvectors*. Arnold Math. Journal, (2017)
- [Bru] F. Bruhat, *Formes réelles des algèbres semi-simples*. Séminaire Sophus Lie, **1** (1954 - 1955), Exposés n° 11 - 12
- [Car1] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*. John Wiley & Sons, 1989 - 335 pages.
- [Car2] R.W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Princeton, NJ, USA 1968/1969, pages 297 – 318.
- [Cas] B. Casselman, *Essays on Coxeter groups. Coxeter elements in finite Coxeter groups* (2017). <https://www.math.ubc.ca/cass/research/pdf/Element.pdf>
- [CDS] B.K. Chakrabarti, A. Dutta, P. Sen, *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models*. Lecture Notes in Physics Monographs, vol. 41. Springer, Berlin

- [CAS] V. Cohen - Aptel, V. Schechtman, *Vecteurs de Perron – Frobenius et produits Gamma*, Comptes Rendus Mathématique **350** (2012), 1003 – 1006
- [C et al.] R. Coldea, D. A. Tennant, E. M. Wheeler, E. Wawrzynska, D. Prabhakaran, M. Telling, K. Habicht, R. Smeibidl, K. Kiefer, *Quantum criticality in an Ising chain : experimental evidence for emergent  $E_8$  symmetry*. Science **327**, 177 – 180 (2010)
- [Cor] E. Corrigan, *Recent developments on affine Toda field theory*, in : G. Semenov et al (eds), Particles and fields (1999), 1 – 34
- [Cox] H. S. M. Coxeter, *The product of the generators of a finite group generated by reflections*. Duke Math. J. **18**, 765 – 782 (1951)
- [De] G. Delfino, *Integrable field theory and critical phenomena : the Ising model in a magnetic field*. J. Phys. A Math. Gen. **37**, R45 – R78 (2004)
- [Del] P. Deligne, Lettre manuscrite à Looijenga, datée du 09 Mars 1974
- [Dor1] P. Dorey, *The exact S-matrices of affine Toda field theories*. Durham PhD thesis (1990)
- [Dor2] P. Dorey, *Root systems and purely elastic S-matrices*. Nucl. Phys. B **358**, 654 – 676 (1991)
- [Fre1] M. D. Freeman, *On the mass spectrum of affine Toda field theory*. Phys. Let. B **261** (1991), 57 – 61
- [Fre2] M. D. Freeman, *Conserved charges and soliton solutions in affine Toda theory*. Nucl. Phys. **B433** (1995), 657 – 670
- [FLO] A. Fring, H. C. Liao, D. I. Olive, *The mass spectrum and coupling in affine Toda theories*. Phys. Let. B **266** (1991), 82 – 86
- [Gab] A. Gabriellov, *Intersection matrices for some singularities*. Funct. Anal. Appl. **7**(3), 182 – 193 (1973)
- [Giv] A. Givental, *Twisted Picard – Lefschetz formulas*. Funct. Anal. Appl. **22**(1), 10 – 18 (1988)
- [Goss] B. Goss Levi, *A complex symmetry arises at a spin chain’s quantum critical point*. Phys. Today **63**(3), 13 (2010). doi :10.1063/1.3366227
- [Hol] T. Hollowood, *Solitons in affine Toda field theories*. Nucl. Phys. **B384** (1992), 523 – 540
- [IR] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd edn. Springer, New York (1990)
- [Kn] A. Knapp, *Elliptic curves*. Princeton University Press, Princeton (1992)
- [Kos1] B. Kostant, *Experimental evidence for the occuring of  $E_8$  in nature and Gosset circles*. Selecta Math. **16**, 419 – 438 (2010)
- [Kos2] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*. Am. J. Math. **81**, 973 – 1032 (1959)
- [Lam] K. Lamotke, *Die Homologie isolierter Singularitäten*. Math. Z. **143**, 27 – 44 (1975)



- [Lef] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*. Gauthier - Villars, Paris (1950)
- [MOP] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Two-dimensional generalized Toda lattice*. Commun. Math. Phys. **79**, 473 – 488 (1981)
- [Mil] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (AM-61). Annals of Mathematics Studies 61. Princeton University Press (2016)
- [Pek] Ash PEKCAN, *The Hirota Direct Method*, Submitted to the department of mathematics and the institute of engineering and science of Bilkent University for the degree of Master of Science (2005)
- [Raj] R. Rajaraman, *Solitons and instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North - Holland Publishing Company. Elsevier, Amsterdam (1989)
- [ST] M. Sebastiani, R. Thom, *Un résultat sur la monodromie*. Inv. Math. **13**, 90 – 96 (1971)
- [Ser] J.-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris (1970)
- [Ste] R. Steinberg, *Finite subgroups of  $SU_2$ , Dynkin diagrams and affine Coxeter elements*. Pac. J. Math. **118**, 587 – 598 (1985)
- [Voi] Von E. Voigt, *Ausgezeichnete Basen von Milnorgittern einfacher Singularitäten*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **55**, 183 – 190 (1985)
- [Zam1] A. B. Zamolodchikov, *Integrable field theory from Conformal field theory*. In : Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Adv. Studies in Pure Math., vol. 19, pp. 641 – 674 (1989)
- [Zam2] A. B. Zamolodchikov, *Integrals of motion and  $S$ -matrix of the (scaled)  $T = T_c$  Ising model with magnetic field*. Int. J. Mod. Phys. A **4**, 4235 – 4248 (1989)