THESE

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE

délivré par *l'Université de Toulouse III-Paul Sabatier*
Spécialité : *Mathématiques Fondamentales*

---

présentée et soutenue par

Véronique Cohen-Aptel

le 23 Mai 2012

Fonctions double Gamma liées aux systèmes de racines

JURY

M. *Jean-Pierre Ramis*	*Président*	*Université Paul Sabatier*
M. *Mikhail Kapranov*	*Examinateur*	*Yale University*
M. *Oleg Ogievetsky*	*Rapporteur*	*Université de Marseille*
M. *Vladimir Roubtsov*	*Rapporteur*	*Université d'Angers*
M. *Jacques Sauloy*	*Examinateur*	*Université Paul Sabatier*
M. *Vadim Schechtman*	*Directeur de thèse*	*Université Paul Sabatier*

École doctorale : *Mathématique Informatique Télécommunications de Toulouse (MITT)*
Unité de recherche : *Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)*

A mes parents :
A ma maman, pour sa merveilleuse dignité et sa présence affectueuse tout au long de ces années. Tu as toujours su, me donner le goût des études et de me dépasser encore et toujours.
A mon papa, disparu trop tôt et qui aurait été si fier !
A vous, Philippe et Elisabeth, mes merveilleux beaux-parents.
A toi, mon Frédéric qui a été si patient, qui a toujours cru en moi.
A mes deux beaux garçons Paul, Rémi, j'espère de tout coeur que vous aussi connaîtrez cette passion qui m'anime.
A mes soeurs chéries, à mon frère adoré.
A tous mes merveilleux amis.
A mes chers élèves ....

Il n'est pas possible d'être mathématicien sans avoir l'âme d'un poète.
Sofia Kovalevskaya

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mon directeur de thèse, Monsieur Vadim Schechtman.
Je le remercie de m'avoir prise comme doctorante, de m'avoir proposé ce sujet, de son engagement durant la préparation de cette thèse.
J'admire ses qualités scientifiques et son intuition qui m'ont évité de prendre de mauvaises directions dans ma recherche.
Il a su tout au long de ma thèse me faire profiter de sa grande expérience.
Son encadrement, sa gentillesse, sa patience, ses idées ainsi que sa passion des mathématiques (qu'il m'a généreusement fait partager), sont pour beaucoup dans l'accomplissement de ce travail.
Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Ogietvetsky et Monsieur Roubstov qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire de thèse.
Je remercie bien sûr, Monsieur Ramis, de me faire l'honneur d'avoir accepté de présider le jury, ainsi que Messieurs Kapranov et Sauloy pour leur participation.

Durant ces quatre années de thèse, j'ai continué à exercer, à plein temps, mon métier d'enseignante (au lycée Saint-Sernin) que j'adore. Cela n'a pas toujours été facile de concilier tout cela !
Mais quel bonheur que de chercher, que de faire des Mathématiques !
Ces travaux m'ont beaucoup apporté tant au plan mathématique qu'au plan pédagogique. J'ai énormément appris et espère, ainsi, en faire profiter mes chers élèves.
Je remercie également mon cher Philippe, ma chère Elisabeth qui ont lu et relu cette thèse avec beaucoup de patience !
Je remercie mon neveu Alexandre pour avoir toujours su répondre à mes questions « latexiques », d'avoir toujours répondu présent quand j'ai eu besoin de lui.
Enfin mes pensées vont vers toi : Frédéric, mon soutien fidèle et inébranlable...

Résumé

Cette thèse, composée de 11 chapitres, répartis en trois parties, aborde les fonctions double Gamma liées aux systèmes de racines. La première partie regroupe les théorèmes classiques sur la fonction Γ d'Euler ; y sont ajoutés des résultats spécifiquement développés pour ce travail, qui seront utilisés dans les deux autres parties. Sont également étudiées sur un modèle similaire (relation fonctionnelle, formules intégrales, valeurs limites) la fonction double Gamma et la fonction Gamma q-analogue. La deuxième partie expose les variantes de Double Gamma en physique : sont ainsi étudiées, la fonction Γ_b, double-sinus S_b, la fonction Υ des frères Zamolodchikov, la fonction de Lukyanov-Zamolodchikov et les fonctions de Fateev liées aux matrices de Cartan. Une partie de ces résultats, énoncés par les physiciens, est démontrée. La dernière partie s'intéresse aux formules de Fateev et donne une preuve par calcul, du théorème de Fateev pour les systèmes du type A,D,E et aussi B,C,F,G en n'utilisant que la formule classique du produit de Gamma. Le chapitre 9 donne un théorème de Fateev q-analogue pour A_l et D_l. Le chapitre 10 permet d'exprimer certains vecteurs propres de matrices de Cartan en termes de produits de valeurs de la fonction Γ. Les cas affines et finis sont démontrés.

Mots-clefs

Fonction Gamma, fonction double Gamma, systèmes de racines, vecteur de Perron-Frobenius, systèmes intégrables.

Abstract

This thesis, consisting of 11 chapters, is divided into three parts and addresses the double Gamma functions associated with root systems. The first part includes the classical theorems on the Euler Γ function ; added are results, specifically developed for this work, which will be used in the other two parts. According a similar pattern (functional equation, integral formulas, limiting values) the double Gamma function and the q-Gamma function are also studied. The second part describes the Double Gamma versions in physics : the Γ_b function, double sine S_b function, the Υ function of the brothers Zamolodchikov, the Lukyanov-Zamolodchikov and Fateev functions related to Cartan matrices, are studied. A part of these results, expressed by the physicists, is demonstrated. The last part deals with Fateev formulas and gives proof of the Fateev theorem by direct calculation, for systems of type A, D, E, B, C, F, G, using only the classical formula of the product of Gamma. Chapter 9 gives a q-analogue theorem of the Fateev formula for the systems of type A_l and D_l. Chapter 10 allows us to express some eigenvectors of the Cartan matrix in terms of products of values of the Γ function. Finite and affine cases are demonstrated.

Keywords

Gamma function, double Gamma function, root systems, Perron-Frobenius vector, integrable systems.

Table des matières

Introduction

0.1. Cette thèse est consacrée à l'étude de fonctions du type double Gamma, qui apparaissent dans les travaux de physiciens sur les modèles intégrables quantiques et la théorie conforme de champs.
La fonction double Gamma $G(z)$ de Barnes peut être caractérisée par les propriétés suivantes :
$(i)\, G(z)$ une fonction méromorphe,
$(ii)\, G(1) = 1$,

$$(iii)\, G(z+1) = \Gamma(z)G(z), \tag{0.1.1}$$

$(iv)\, d^3 \log G(x+1)/dx^3 \geq 0$, pour x réel, $x \geq 0$.
Ici $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma d'Euler.
La fonction $G(z)$ est le deuxième membre dans la hiérarchie des fonctions Gamma.

Dans ses travaux fondamentaux, [Bar99], [Bar00b], [Bar00a], [Bar01] et [Bar04], E.W.Barnes a étudié cette fonction et ses généralisations.

Dans cette thèse, on étudie certaines fonctions à une et à plusieurs variables qui satisfont aux équations fonctionnelles semblables à (0.1.1).

0.2. Du chapitre 1 au chapitre 6, on passe en revue des notions et des résultats connus : y sont surtout soulignées les représentations intégrales de nos fonctions (et les représentations intégrales de logarithmes de nos fonctions).

Après une étude de la fonction $\Gamma(z)$ dans le chapitre 1, la fonction $G(z)$ et sa généralisation $\Gamma_2(z|b_1, b_2)$ de Barnes sont discutées dans le chapitre 2.
Cette dernière fonction satisfait aux équations fonctionnelles :

$$\Gamma_2(z + b_1|b_1, b_2) = \frac{\sqrt{2\pi} b_2^{-1/2 - z/b_2}}{\Gamma(z/b_2)} \Gamma_2(z|b_1, b_2), \tag{0.2.1a}$$

$$\Gamma_2(z + b_2|b_1, b_2) = \frac{\sqrt{2\pi} b_1^{-1/2 - z/b_1}}{\Gamma(z/b_1)} \Gamma_2(z|b_1, b_2). \tag{0.2.1b}$$

Dans le chapitre 3, on examine une q-déformation de $\Gamma(z)$; est ainsi abordée, la fonction $\Gamma_q(z)$ qui satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma_q(z+1) = \frac{1 - q^z}{1 - q} \Gamma_q(z). \tag{0.2.2}$$

Dans les chapitres 4 à 7, on étudie les versions de la fonction double Gamma, utilisées par des physiciens, dans leur travail sur les modèles intégrables : le *modèle de Liouville* et sa généralisation, le *modèle de Toda* de la Théorie Conforme de Champs en dimension 2.

Dans le chapitre 4, on considère les fonctions $\Gamma_b(x)$ et le double sinus (appelé aussi le *dilogarithme quantique*) $S_b(x)$.
La première fonction est définie par :

$$\Gamma_b(x) = \frac{\Gamma_2(x|b, b^{-1})}{\Gamma_2(q/2|b, b^{-1})},$$

où $q = b + b^{-1}$.
Le double sinus est défini par :

$$S_b(x) = \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(q-x)}.$$

Dans le chapitre 5, on étudie la fonction importante $\Upsilon_b(x)$ des frères Zamolodchikov définie par :

$$\Upsilon_b(x) = \frac{1}{\Gamma_b(x)\Gamma_b(q-x)}.$$

0.3. Dans le chapitre 7, apparaît la fonction principale de cette thèse, que nous appelons *la fonction de Fateev* $F_b(x)$. Elle est associée à un système de racines de rang l et depend de l variables, $x = (x_1, \ldots, x_l)$.
(La fonction de Lukyanov-Zamolodchikov, discutée dans le chapitre 6, est un cas particulier correspondant au système de racines du type A_1)

Décrivons les équations fonctionnelles de $F_b(x)$.
Soient V, un espace vectoriel réel de dimension l et $R \subset V$, un système de racines fini réduit irréductible de rang l.
Dans cette introduction, on suppose pour simplifier, que R est *simplement lacé*, c'est à dire du type A, D, E.
Soit W, le groupe de Weyl de R. On choisit un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ W-invariant sur V, ce qui permet d'identifier V avec son dual V^*.
Fixons une base de racines simples $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset R$, d'où la notion d'une racine positive.
On désigne suivant l'usage :

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha.$$

Fixons un paramètre réel $b > 0$ et posons :

$$q = b + b^{-1}.$$

Pour $s \in W$, on définit l'opérateur affine translaté : $s_b : V \longrightarrow V$ par :

$$s_b(x) = q\rho + s(x - q\rho), \; x \in V.$$

On définit une fonction produit Gamma :

$$A_b :\ V \longrightarrow \mathbb{R},$$

par :

$$A_b(x) = \prod_{\alpha>0} \Gamma(1 - \langle x_b, \alpha\rangle b)\Gamma(1 - \langle x_b, \alpha\rangle/b), \tag{0.3.1}$$

où

$$x_b = x - b\rho.$$

Il est clair que A_b se prolonge en une fonction méromorphe :

$$A_b :\ V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

La fonction de Fateev est une fonction méromorphe à l variables :

$$F_b :\ V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C},$$

qui a été introduite dans [Fat02].
Elle satisfait aux $|W|$ équations fonctionnelles :

$$A_b(x)F_b(x) = A_b(s_b(x))F_b(s_b(x)),\ \ s \in W. \tag{0.3.2}$$

(Dans cette thèse on utilisera la notation $G_F(x, b)$ pour $F_b(x)$.)

Voici une valeur limite du gradient de $\log F_b(x)$:

$$\lim_{b\to 0} \partial_x \log F_b(x/b) = -\sum_{\alpha>0} \log(\gamma(\langle \rho - x, \alpha\rangle/h))\alpha + 2\log h \cdot x. \tag{0.3.3}$$

Ici, h est le nombre de Coxeter de R et

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

0.4. La troisième partie (chapitres 8 à 10) contient les nouveaux résultats de cette thèse.

Avec les notations de **0.3**, soit :

$$\theta = \sum_{i=1}^{l}\ n_i\alpha_i,$$

la plus longue racine de R. Ceci définit les nombres naturels n_i, $1 \le i \le l$. Posons $n_0 = 1$, donc le nombre de Coxeter :

$$h = \sum_{i=0}^{l}\ n_i.$$

Supposons, pour simplifier les énoncés, que R soit *simplement lacé*, c'est-à-dire, du type A, D ou E. On définit le nombre $k(R)$ par :

$$k(R) = \prod_{i=1}^{l}\ n_i^{n_i/2h}.$$

Voici le premier résultat principal de cette thèse.

Théorème A (cf.Théorème 8.2.2). *Pour tout i,* $1 \leq i \leq l$,

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{\langle\alpha,\rho\rangle}{h}\right)^{\langle\alpha_i,\alpha\rangle} = n_i^{-1} k(R)^2. \tag{0.4.1}$$

Cette formule remarquable a été découverte par le physicien V.Fateev, cf. [Fat02]. On remarque que le premier membre de (0.4.1) est égal à :

$$\langle \exp(\lim_{b\to 0} \partial_x \log F_b(x/b)|_{x=0}, \alpha_i\rangle,$$

d'après (0.3.3).

On a des formules analogues pour les systèmes non-simplement lacés, cf. Théorème 8.4.1.
Fateev a déduit cette formule des considérations physiques liées à *l'Ansatz de Bethe*. Ici, nous donnons une démonstration mathématique de cette formule.
C'est un calcul direct (assez élaboré) qui n'utilise que la formule de multiplication de la fonction Γ :

$$\Gamma(nx) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nx-1/2} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x + i/n).$$

Dans le chapitre 9, on donne une formule q-déformation de (0.4.1) pour les systèmes du type A_l, D_l (par ailleurs, pour A_l la formule est triviale).

0.5. Qu'obtient-on si l'on remplace dans l'expression (0.4.1) la fonction $\gamma(x)$ par $\Gamma(x)$?
Une réponse est donnée dans le chapitre 10.

Soit A la matrice de Cartan de R. La matrice $A' = 2I_l - A$ a ses éléments positifs et est indécomposable ; donc, par le théorème de Perron-Frobenius, elle possède un vecteur propre réel v_{PF} de valeur propre réelle maximale, qui est unique à proportionnalité près.
Evidemment, v_{PF} est aussi un vecteur propre de A, que l'on appellera *le vecteur de Perron-Frobenius de A*. Ses composantes sont des nombres réels strictement positifs ; ils sont connus et peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques.

Dans la physique, ces composantes ont une interprétation remarquable :
ces nombres sont les masses des particules dans les déformations intégrables de la théorie de Toda.
Le premier exemple, découvert par A. Zamolodchikov, a été $R = E_8$, où on retrouve 8 particules du modèle d'Ising critique dans un champ magnétique.

D'un autre côté, introduisons les nombres :

$$\Gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha>0} \Gamma(\langle\rho,\alpha\rangle/h)^{\langle\alpha,\alpha_i\rangle},$$

et le vecteur :

$$\Gamma(R) = (\Gamma(R, \alpha_1), \ldots, \Gamma(R, \alpha_l)) \in \mathbb{R}^l.$$

Le deuxième résultat principal de cette thèse est le suivant (cf.Théorème 10.2.1).

Théorème B. *Le vecteur* $\Gamma(R)$ *est un vecteur de Perron-Frobenius de A.*

Il se trouve aussi que le théorème A, est équivalent à une assertion similaire pour les matrices de Cartan affines (cf.Théorèmes 10.3.1, 10.3.2).

Comme on l'a déjà écrit, les calculs faits dans les preuves, sont assez pénibles ; une partie des calculs est donc déplacée dans les annexes. B, C et D.

Première partie

Double Gamma

Chapitre 1

La fonction Gamma d'Euler

1.1 Définition et propriétés immédiates

On définit généralement la fonction Γ par :

Définition 1.1.1.

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(z),$$

$\mathrm{Re}(z) > 0$.

Plus précisément, cette définition permet d'établir $\Gamma(z)$ comme une fonction holomorphe dans le demi-plan : $\mathrm{Re}(z) > 0$. Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, grâce à l'équation fonctionnelle suivante :

Proposition 1.1.2 (Equation fonctionnelle)**.**

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ et si n est un entier naturel,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(1) = 1.$$

$\Gamma(z)$ a en $z = -n$ un pôle simple avec le résidu :

Proposition 1.1.3 (Résidus de Gamma)**.** $Res_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

B(z,t) est la fonction Béta d'Euler, définie par :

Définition 1.1.4.

$$B(z,t) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{t-1} \, \mathrm{d}x,$$

avec $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\mathrm{Re}(t) > 0$.

On a alors :

Théorème 1.1.5.

$$B(z,t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(t)}{\Gamma(z+t)}.$$

Théorème 1.1.6 (Euler, Gauss)**.**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z B(n+1, z) = \lim_{n\to\infty} n^z \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)}.$$

Remarque 1.1.7. En effet, on a :

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n,$$

et

$$\int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t = n^z \int_0^1 \Big(1 - u\Big)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u, (u = t/n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on montre que pour tout $z \neq 0, -1, \ldots, -n$,

$$B(n+1, z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n^z \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

d'où par convergence monotone :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.1.8 (Weiertrass)**.**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\},$$

avec $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Théorème 1.1.9 (Bohr-Morellup)**.** *Il existe une unique fonction déterminée par les trois conditions suivantes :*

(i)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), z \in \mathbb{C}.$$

(ii)

$$\Gamma(1) = 1.$$

(iii)

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma(x+1) \geqslant 0, \textit{ pour } x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0.$$

On a :

Théorème 1.1.10 (Formule des compléments).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

avec Re $(z) > 0$.

si $z = 1/2$, on a :

Corollaire. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Théorème 1.1.11 (Formule de multiplication de Gauss, Legendre).

$$\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

Il suffit d'appliquer 1.1.11 dans le cas $n = 2$:

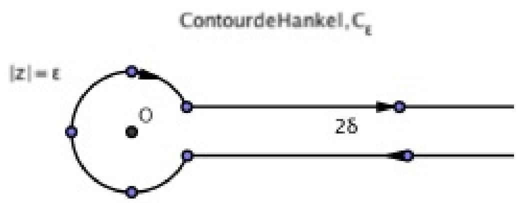
Corollaire 1.1.12 (Formule de duplication de Legendre).

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z+1/2)\frac{2^{2z-1/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Après avoir présenté ces résultats bien connus sur la fonction Gamma, intéressons-nous par la suite à la représentation intégrale de Γ par une intégrale de Cauchy ; on considère pour cela l'intégrale suivante :

$$\int_{\rho}^{0+} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \rho > 0,$$

on intègre sur le contour de Hankel représenté sur la figure ci-dessous.



On a le théorème suivant :

Théorème 1.1.13 (Intégrale de Hankel).

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin(\pi z)}\int_{\infty}^{0+} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t,$$

si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Et en utilisant 1.1.10 la formule des compléments, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\infty}^{0+} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{0+} e^{t}t^{-z}\,\mathrm{d}t,$$

si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Voici maintenant les cinq principaux résultats de ce premier chapitre :
- en 1.2.1 : Intégrale de Frullani,
- en 1.2.2 : la dérivée logarithmique de Gamma,
- en 1.2.8 : une représentation intégrale de $\log \Gamma(x)$: théorème de Malmsten,[1]
- en 1.2.9 : une formule de Kummer,[2]
- en 1.2.22 : représentation asymptotique de Gamma.

1.2 Dérivée logarithmique de Gamma

Proposition 1.2.1 (Intégrale de Frullani)**.** [3]

$$\log a = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right\} \mathrm{d}t,$$

avec $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Théorème 1.2.2 (Gauss)**.**

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz}[\log \Gamma(z)] = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) \mathrm{d}t.$$

La preuve de ce théorème s'appuie sur les trois propositions suivantes sur la constante d'Euler :

Proposition 1.2.3.

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} \mathrm{d}t.$$

Proposition 1.2.4.

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} \mathrm{d}t.$$

Proposition 1.2.5.

$$\gamma = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Remarque 1.2.6. On peut utiliser 1.2.2, pour donner une autre démonstration de l'équation fonctionnelle de la fonction Γ.
En effet, on vérifie aisément à partir de 1.2.2, que :

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}$$

D'où l'équation fonctionnelle de Γ.

1. [WW27], chap 12, 12-32, exemple 1.
2. [WW27], chap 12, 12-31, exemple 3.
3. on prend la branche principale du logarithme $\log a \in \mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}_{>0}$. En effet, l'intégrale satisfait à l'équation différentielle $\phi'(a) = 1/a, \phi(1) = 0$.

Proposition 1.2.7 (Dirichlet)**.**

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\left\{\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right\}.$$

Théorème 1.2.8 (Malmsten)**.**

$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + e^{-t}(x-1)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

avec $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Corollaire.

$$\begin{aligned}\log\pi = 2\log\Gamma(1/2) &= 2\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{(1-e^{-t})} - \frac{e^{-t}}{2}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^\infty \left\{\frac{2}{(1+e^{t/2})} - e^{-t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-t/4}}{\cosh(t/4)} - e^{-t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.9 (Formule de Kummer)**.**

$$2\log\Gamma(x) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi x)) = \int_0^\infty \left(\frac{\sinh(\frac{1}{2}-x)t}{\sinh(\frac{t}{2})} - e^{-t}(1-2x)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

avec $0 < x < 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}2\log\Gamma(x) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi x)) &= 2\log\Gamma(x) + \log\frac{(\sin(\pi x))}{\pi}\\ &= 2\log\Gamma(x) - \log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\\ &= \log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x).\end{aligned}$$

Puis on utilise le théorème de Malmsten 1.2.8

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{1-e^{-t}} + e^{-t}(x-1)\right]\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_0^\infty \left[\frac{e^{-(1-x)t}-e^{-t}}{1-e^{-t}} - xe^{-t}\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}-e^{-(1-x)t}}{1-e^{-t}} + e^{-t}(2x-1)\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{t/2}(e^{-xt}-e^{-(1-x)t})}{e^{t/2}(1-e^{-t})} - (1-2x)e^{-t}\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\sinh(\frac{1}{2}-x)t}{\sinh(\frac{t}{2})} - e^{-t}(1-2x)\right]\frac{\mathrm{d}t}{t},\ \text{ avec } 0 < x < 1.\end{aligned}$$

♦

En utilisant la définition suivante :

Définition 1.2.10.
$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)},$$

on a le :

Corollaire. *Pour* $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned}\log\gamma(a) &= 2\log\Gamma(a) - \log(\pi) + \log(\sin(\pi a)) \\ &= \int_0^\infty \left\{\frac{\sinh((1/2-a)t)}{\sinh(t/2)} - (1-2a)e^{-t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

Ou le :

Corollaire.

$$\begin{aligned}\log\gamma(a+1/2) &= \int_0^\infty \left\{-\frac{\sinh(at)}{\sinh(t/2)} + 2ae^{-t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^\infty \left\{-\frac{\sinh(2at)}{\sinh(t)} + 2ae^{-2t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.11 (première formule de Binet)**.**

$$\log\Gamma(z) = \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\Big)\frac{e^{-zt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 1.2.12. En posant :

$$K = sup_{t\geqslant 0}\Big|(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1})\frac{1}{t}\Big|$$

et en remplaçant $z = x+iy$, dans la dernière intégrale, on obtient :

$$\Big|\int_0^\infty (\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1})\frac{e^{-zt}}{t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant K\int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{x}.$$

Il s'en suit :

Corollaire 1.2.13. [4]

$$\log\Gamma(z) = \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(1/z).$$

Théorème 1.2.14 (deuxième formule de Binet)**.** [5]

$$\log\Gamma(z) = \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,\mathrm{d}t.$$

4. [WW27], 12.31.
5. [WW27], 12.32.

On a :

Propriété 1.2.15.

$$\arctan(t/z) = \frac{t}{z} - \frac{1}{3}\frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5}\frac{t^5}{z^5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{t^{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{z^{n-1}}\int_0^t \frac{u^{2n}}{u^2+z^2}\,du.$$

Définition 1.2.16 (Nombres de Bernoulli)**.**

$$\frac{z}{2}\cot(\frac{z}{2}) = 1 - B_1\frac{z^2}{2!} - B_2\frac{z^4}{4!} - B_3\frac{z^6}{6!} - \dots$$

Donc

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, etc, \dots$$

Une autre définition :

Définition 1.2.17. [6]

$$B_n = 4n\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

On a alors un développement asymptotique de $\phi(z)$:

Proposition 1.2.18.

$$\phi(z) := 2\int_0^\infty \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt = \frac{B_1}{1.2.z} - \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6.z^5} - \dots$$

Remarque 1.2.19.
D'après Poincaré, on dit qu'une série,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},$$

est un développement asymptotique d'une fonction $f(z)$ à l'infini (dans un secteur $D = \{\alpha < argz < \beta\}$), si pour chaque N :

$$\lim_{z\to\infty, z\in D} \mid z^N(f(z) - \sum_{n=0^N}\frac{a_n}{z^n}) \mid = 0$$

ou encore :

$$f(z) = \sum_{n=0^N}\frac{a_n}{z^n} + o(z^{-N}).$$

Proposition 1.2.20 (Développement asymptotique de $\log\Gamma(z)$ ou série de Stierling)**.**

$$\log\Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{r=1^\infty}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}}\ (z\to\infty).$$

6. [WW27], 7.2 et [Ber13], p.97.

Remarque 1.2.21.
Puisque $0 < \phi(x) < \frac{B_1}{2x}(x > 0)$, on a $\phi(x) = \frac{\theta}{12x}$ avec $0 < \theta < 1$, d'où :

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} e^{\theta/12x}.$$

On obtient alors :

Proposition 1.2.22 (Développement asymptotique de $\Gamma(x)$)**.**

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x} - \frac{571}{2488320x^4} + O(1/x^5) \right\}, x \to \infty.$$

1.3 Fonction zéta de Riemann-Hurwitz

Définition 1.3.1 (cf.[WW27])**.**

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-s},$$

où $s = \sigma + it$, avec σ et t réel, $0 < a \leq 1, \arg(a + n) = 0$, et $\sigma \geq 1 + \delta$.

Proposition 1.3.2 (Expression de $\zeta(s, a)$ comme intégrale infinie)**.**

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \, \mathrm{d}x,$$

où $\sigma \geq 1 + \delta$ *et* $\arg x = 0$.

Démonstration.
D'après 1.1.1, en posant $t = (a + n)x$, on a :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} (a + n)^s x^{s-1} \, \mathrm{d}x.$$

D'où :

$$(a + n)^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x,$$

avec $\arg x = 0$, $\sigma > 0$ et à fortiori si $\sigma \geq 1 + \delta$, on a :

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^{\infty} e^{-(a+n)x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \lim_{N \to \infty} \Big(\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \, \mathrm{d}x - \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1 - e^{-x}} e^{-(N+1+a)x} \, \mathrm{d}x \Big).$$

Or quand $x \leq 0, e^x \leq 1 + x$,

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1 - e^{-x}} e^{-(N+1+a)x} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{\infty} x^{\sigma-2} e^{-(N+a)x} \, \mathrm{d}x = (N + a)^{1-\sigma} \Gamma(\sigma - 1),$$

et $(N+a)^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1)$ tend vers zéro quand $N \to \infty$, avec $\sigma \geq 1+\delta$.

D'où si $\sigma \geq 1+\delta$ et $\arg x = 0$:

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

♦

Nous allons avoir besoin des résultats suivants pour démontrer le résultat de Takuro Shintani [Shi80] au chapitre 2. Les preuves sont dans le livre de Whittaker et Whatson [WW27], chapitre 13.

Proposition 1.3.3 (Expression de $\zeta(s,a)$ sur le contour C de Hankel)**.**

$$\zeta(s,a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,\mathrm{d}z, \textit{ avec } |\arg(-z)| \leq \pi,$$

où C est représenté par le contour : 1.1

Propriété 1.3.4.

$$\zeta(0,a) = \frac{1}{2} - a, \tag{1}$$

$$\lim_{s\to 1}[\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1}] = -\psi(a), \tag{2}$$

avec

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Proposition 1.3.5 (Formule de Lerch (cf.[WW27] p.271))**.**

$$\left\{\frac{d}{ds}\zeta(s,z)\right\}_{s=0} = \log\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Chapitre 2

La fonction double Gamma

2.1 Fonction G de Barnes

L'exposé de Barnes ([Bar00b]) étant remarquable, contentons-nous d'indiquer brièvement les principales propriétés de G.

Définition 2.1.1 (Définition par leur produit de Weierstrass : (3 formes))**.**

$$\begin{aligned}
G(z+1) &= (2\pi)^{z/2} e^{-z/2-\frac{\gamma+1}{2}z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \Big[(1+\frac{z}{k})^k e^{-z+z^2/2k}\Big] \\
&= (2\pi)^{z/2} e^{-z/2-\frac{\gamma+1}{2}z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(z+k)} k e^{z\psi(k)+\frac{z^2}{2}\psi'(k)}\Big] \\
&= (2\pi)^{z/2} e^{(\gamma-\frac{1}{2})z-(\frac{\pi^2}{6}+1+\gamma)z^2/2}\Gamma(z)z \prod_{n\geqslant 0, m\geqslant 0, n+m\neq 0} \Big[(1+\frac{z}{n+m})e^{\frac{-z}{n+m}+\frac{z^2}{2(n+m)^2}}\Big],
\end{aligned}$$

chaque produit est convergent, γ est la constante d'Euler et $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$.

Théorème 2.1.2. *Pour $z \in \mathbb{C}, G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ et $G(1) = 1$.*

Proposition 2.1.3 (Formule de Stirling)**.**

$$\log G(x+a+1) = \frac{x+a}{2}\log 2\pi - \log A + \frac{1}{12} - \frac{3x^2}{4} - ax + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} + \frac{a^2}{2} + ax\Big)\log x + o\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

où x est réel et croît indéfiniment et a un nombre complexe, A est une constante définie par Kinkelin :

$$\log A = \lim_{n\to\infty} [\log(1^1.2^2\dots n^n) - \Big(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12}\Big)\log n + \frac{n^2}{4}],$$

dont la valeur numérique est $A = 1,28242713\dots$

Théorème 2.1.4.

$$\prod_{r=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1} G(z+\frac{r+s}{n}) = K(2\pi)^{n(n-1)z/2} n^{-n^2z^2/2+nz} G(nz),$$

où :

$$K = A^{1-n^2} e^{\frac{n^2-1}{12}} (2\pi)^{-(n-1)/2} n^{-5/12}.$$

Théorème 2.1.5 ([Vig79]). *G est l'unique fonction méromorphe déterminée par les trois conditions suivantes :*
(i)

$$G(z+1) = G(z)\Gamma(z), z \in \mathbb{C}.$$

(ii)

$$G(1) = 1.$$

(iii)

$$\frac{d^3}{dx^3} \log G(x+1) \geqslant 0, \ \textit{pour}\, x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0.$$

Proposition 2.1.6 (Formule des compléments).
On pose :

$$\phi(z) = \frac{G(1+z)}{G(1-z)},$$

alors :

$$\phi(z) = \frac{\pi}{\sin{(\pi s)}} \phi(z-1).$$

Proposition 2.1.7 (Relation de Kinkelin).

$$\log \phi(z) = z \log 2\pi - \int_0^z \pi z \cot{(\pi z)}\, \mathrm{d}z.$$

Proposition 2.1.8.

$$G(1/2) = A^{-3/2} \pi^{-1/4} e^{1/8} 2^{1/24}.$$

Proposition 2.1.9 (Formule intégrale).

$$\log G(z+1) = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t(1-e^{-t})^2} \Big[1 - zt - \frac{z^2 t^2}{2} - e^{-zt}\Big]\, \mathrm{d}t + \frac{z^2}{2}(1+\gamma) - \frac{3}{2} \log{(\frac{2\pi}{2})},$$

avec $\mathrm{Re}(z+1) > 0$.

Le résultat suivant est l'analogue de 1.1.6.

Théorème 2.1.10 (Formule d'Alexejewski [Ale94]).

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} n^{(z^2+z)/2} \Gamma(n)^z \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(j)}{\prod_{j=0}^n \Gamma(j+z)},$$

avec $z \in \mathbb{C}$.
Une forme équivalente :

$$G(z+1) = \lim_{n\to\infty} n^{(z^2+z)/2} \Gamma(n)^z \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+z)}.$$

Démonstration.
Cf.[CAS08]
L'équation fonctionnelle $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ et $G(1) = 1$ impliquent que :

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(j)}{\prod_{j=0}^{n} \Gamma(j+z)} = \frac{G(z)G(n+1)}{G(z+n+1)}.$$

On utilise ensuite la « formule de Stirling »pour G(z), cf.2.1.3 :

$$G(z+n+1) = A'(2\pi)^{(z+n)/2} e^{-3(z+n)^2/4} (z+n)^{(z+n)^2/2-1/12} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

quand $n \to \infty$, où A' est une constante (dont la valeur exacte ne nous intéresse pas ici).
Il s'en suit (en écrivant $f(n) \sim g(n)$ au lieu de $f(n) = g(n)(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}))$:

$$\frac{G(n+1)}{G(z+n+1)} \sim \frac{A'(2\pi)^{n/2} e^{-3n^2/4} n^{n^2/2-1/12}}{A'(2\pi)^{(z+n)/2} e^{-3(z+n)^2/4} (z+n)^{(z+n)^2/2-1/12}}$$

$$\sim (2\pi)^{-z/2} e^{3zn/2+3z^2/4} \times \frac{n^{n^2/2}}{(z+n)^{(z^2+2zn+n^2)/2}} (*)$$

Or,

$$\frac{n^{n^2/2}}{(z+n)^{n^2/2}} = \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-n^2/2} = e^{-zn/2} \times e^{zn/2} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-n^2/2}$$

$$= e^{-zn/2} \times \Big(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^{n^2/2} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-n^2/2}$$

$$\sim e^{-zn/2} \times \Big(1 + \frac{z^2}{2n^2}\Big)^{n^2/2}$$

$$\sim e^{-zn/2} \times e^{z^2/4}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{(z+n)^{nz}} = n^{-nz} \times \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-nz} \; n^{-nz} \times e^{-z^2}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{(z+n)^{z^2/2}} \sim n^{-z^2/2}.$$

En rassemblant tous ces résultats dans $(*)$, on obtient :

$$\frac{G(n+1)}{G(z+n+1)} \sim (2\pi)^{-z/2} e^{nz} n^{-nz-z^2/2} \sim n^{-(z^2+z)/2} \Gamma(n)^{-z}, (**)$$

et grâce à la formule de Stirling pour $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = (2\pi)^{1/2} e^{-n} z^{n-1/2} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

si $n \to \infty$ (cf.[WW27], 12.33). Il est clair que $(**)$ entraîne le théorème. ♦

On trouvera dans ([KS00], 84) un exemple d'utilisation de ce théorème :

Définition 2.1.11 (Fonction f_{CUE})**.**

$$f_{CUE}(z/2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(z/2)^2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+z)}{(\Gamma(j+z/2))^2}.$$

Proposition 2.1.12.

$$f_{CUE}(z/2) = \frac{(G(1+z/2))^2}{G(1+z)}.$$

Démonstration.
D'après la forme équivalente du théorème on a immédiatement :

$$\frac{(G(1+z/2))^2}{G(1+z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(z/2)^2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(j)\Gamma(j+z)}{(\Gamma(j+z/2))^2}.$$

♦

2.2 Fonction ζ_2 et $\Gamma_2(s|b_1, b_2)$

Définition 2.2.1.

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \sum_{n_1,n_2\geq 0} (s + n_1 b_1 + n_2 b_2)^{-z}.$$

(cf.[Nak04], A.52)

De la même manière qu'au 1.3.2, on a :

Proposition 2.2.2 (Représentation intégrale de ζ_2)**.**

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n_1,n_2\geq 0} \int_0^\infty e^{-(s+n_1b_1+n_2b_2)y} y^{z-1}\, \mathrm{d}y.$$

D'où le premier résultat suivant :

Proposition 2.2.3.

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{e^{-sy}}{(1-e^{-b_1 y})(1-e^{-b_2 y})} y^{z-1}\, \mathrm{d}y. \quad (1)$$

Puis en appliquant le même procédé qu'au 1.3.3, on obtient une expression de $\zeta_2(s, z|b_1, b_2)$ sur le contour de Hankel 1.1, d'où le deuxième résultat :

Proposition 2.2.4.

$$\zeta_2(s, z|b_1, b_2) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_C \frac{(-w)^{z-1} e^{-sw}}{(1-e^{-b_1 w})(1-e^{-b_2 w})}\, \mathrm{d}w, \textit{ avec } |\arg(-w)| \leq \pi. \quad (2)$$

Définition 2.2.5 (cf.[Nak04], A.53)**.**

$$\log\left[\Gamma_2(s|b_1,b_2)\right] = \left\{\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}(s,t|b_1,b_2)\right\}_{t=0}.$$

Remarque 2.2.6. Si $(b_1,b_2) = b = 1$, alors,

$$G(s) = \Gamma_2(s|b_1,b_2).$$

Proposition 2.2.7 (Formule de la différence)**.**

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{b_2^{\frac{s}{b_2}-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{s}{b_2})}.$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_2|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{b_1^{\frac{s}{b_1}-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{s}{b_1})}.$$

Démonstration. D'après 2.2.5, et 2.2.1, b_1 et b_2 ont un rôle symétrique. La deuxième formule se déduit donc immédiatement de la première.
Démontrons donc la première formule.

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left(\log\left[\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)\right] - \log\left[\Gamma_2(s|b_1,b_2)\right]\right)$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left(\left\{\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}(s+b_1,t|b_1,b_2)\right\}_{t=0} - \left\{\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}(s,t|b_1,b_2)\right\}_{t=0}\right)$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left(\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[-\sum_{n\geq 0}(s+nb_2)^{-t}\Big]\right\}_{t=0}\right)$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left(\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\Big[b_2^{-t}\zeta(t,\frac{s}{b_2})\Big]\right\}_{t=0}\right)$$

on utilise ensuite 1.3.4 et 1.3.5,

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left[\log(b_2)\zeta(0,\frac{s}{b_2}) - \zeta'(0,\frac{s}{b_2})\right]$$

$$\frac{\Gamma_2(s+b_1|b_1,b_2)}{\Gamma_2(s|b_1,b_2)} = \exp\left[(\frac{1}{2}-\frac{s}{b_2})\log(b_2) - \log\Gamma(\frac{s}{b_2}) + \frac{1}{2}\log(2\pi)\right].$$

♦

2.3 Formules intégrales

(cf. [Shi77])

Proposition 2.3.1. *Soit $b = (b_1, b_2)$ une paire de nombres positifs. Il existe une constante positive $\rho_2(b)$ indépendante de z telle que :*

$$\log\left[\Gamma_2(z|b)/\rho_2(b)\right] = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{-t}}{(1-e^{-b_1t})(1-e^{-b_2t})}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{(\gamma - i\pi)}{2b_1b_2}\{B_2(\frac{z}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z}{b_1})B_1b_1b_2 + B_2b_2^2\},$$

avec $\log t$ réel sur le contour C (habituel cf chapitre 1, 1.1), B_1, B_2 les polynômes de Bernoulli et Re(z)> 0.

Démonstration.
Il nous faut utiliser un lemme intermédiaire pour démontrer cette proposition.

Lemme 2.3.2.

$$\log\left[\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t + (\gamma - i\pi)(\frac{1}{2} - z).$$

Démonstration. (lemme 2.3.2)
Des propriétés 1.3.3 et 1.3.5, on a :

$$\log\left[\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma}{2i\pi}\int_C \frac{e^{-zt}}{(1-e^{-t})}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Puis de la propriété 1.3.4(1) et de $-\gamma = \left\{\frac{d}{ds}\Gamma(1-s)\right\}_{s=0}$, on a le lemme.

♦

Notons J(z,b) toute la partie après le signe « = » dans la proposition 2.3.1.
Alors :

$$\begin{aligned}
&J(z+b_1,b) - J(z) = \\
&\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{(-z-b_1)t}}{(1-e^{-b_1t})(1-e^{-b_2t})}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{(\gamma-i\pi)}{2b_1b_2}\left\{B_2(\frac{z+b_1}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z+b_1}{b_1})B_1b_1b_2 + B_2b_2^2\right\} \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{(-zt)}}{(1-e^{-b_1t})(1-e^{-b_2t})}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{(\gamma-i\pi)}{2b_1b_2}\left\{B_2(\frac{z}{b_1})b_1^2 + 2B_1(\frac{z}{b_1})B_1b_1b_2 + B_2b_2^2\right\} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{(-zt)}}{(e^{-b_2t}-1)}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{(\gamma-i\pi)}{2b_1b_2}\left\{b_1^2\left[B_2(\frac{z+b_1}{b_1}) - B_2(\frac{z}{b_1})\right] + 2B_1b_1b_2[B_1(\frac{z+b_1}{b_1})\right. \\
&\qquad\qquad \left.- B_1(\frac{z}{b_1})\right]\Big\} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{(-zt)}}{(e^{-b_2t}-1)}\frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{(\gamma-i\pi)}{2b_1b_2}(2zb_1 - b_1b_2).
\end{aligned}$$

(par définition des polynômes de Bernoulli 1.2.16 :

$$B_1(z) = z - \frac{1}{2}, B_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{6}.)$$

Donc on a d'après le lemme 2.3.2 :

$$J(z + b_1, b) - J(z) = -\log(\Gamma(z/b_2)) + \log(\sqrt{2\pi}) + \log b_2(\frac{1}{2} - \frac{z}{b_2}).$$

Donc on a :

$$J(z + b_1, b) - J(z) = \log \Gamma_2(z + b_1, b) - \log \Gamma_2(z, b).$$

Car d'après la propriété 2.2.7, on a :

$$\log(\Gamma_2(z + b_1|b)) = \log(\sqrt{2\pi}) + \log(\Gamma_2(z|b)) - \log(\Gamma(\frac{z}{b_2})) + \log b_2(\frac{1}{2} - \frac{z}{b_2}).$$

D'où :

$$J(z + b_1, b) - \log(\Gamma_2(z + b_1|b)) = J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))$$

et

$$J(z + b_2, b) - \log(\Gamma_2(z + b_2|b)) = J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b)),$$

car J et $\log(\Gamma_2)$ sont des fonctions symétriques en b_1 et b_2.

Montrons maintenant que pour tout b :

$$\frac{d}{dz}\Big(J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))\Big) = 0 \, (*).$$

Car alors :

$$J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))$$

est une constante indépendante de z, ne dépendant que de b, et donc :

$$\log(\Gamma_2(z|b) - J(z, b)) = \log(\rho_2(b)),$$

d'où la proposition 2.3.1. ♦

Démonstration. (*)

$$J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))$$

est une fonction holomorphe sur la partie droite du plan, on peut la prolonger analytiquement avec les périodes b_1 et b_2. Donc :

$$\frac{d}{dz}\Big(J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))\Big) = 0$$

pour b_1 et b_2, la partie gauche de cette égalité dépendant continûment de b_1 et b_2, on a

$$\frac{d}{dz}\Big(J(z, b) - \log(\Gamma_2(z|b))\Big) = 0,$$

pour tout b. ♦

Donnons maintenant, pour terminer ce chapitre, une représentation intégrale du $\log(\Gamma_2)$ sur $[0,+\infty[$. Ce résultat très important permettra d'expliquer toutes les représentations intégrales de $\log(\Gamma_b(x))$, de $\log(S_b(x))$, et $\log(\Upsilon_b(x))$ dans les chapitres 3 et 4.

Théorème 2.3.3 (Représentation intégrale de $\log \Gamma_2$)**.**

$$\log \Gamma_2(s|b,b^{-1}) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-sx}}{(1-e^{-bx})(1-e^{-x/b})} - \frac{(Q/2-s)^2}{2} e^{-x} - \frac{Q/2-s}{x} - \frac{e^{-x}}{12}(1-Q^2/2) - \frac{1}{x^2} \right] \frac{\mathrm{dx}}{x},$$

où $Q = b + b^{-1}$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(b) \neq 0$.

Démonstration.
De la représentation intégrale de $\zeta_2(s,t|b_1,b_2)$ sur le contour de Hankel, formule 2.2.4 :

$$\zeta_2(s,t|b_1,b_2) = -\frac{\Gamma(1-t)}{2\pi i} \int_C \frac{(-w)^{t-1} e^{-sw}}{(1-e^{-b_1 w})(1-e^{-b_2 w})} \,\mathrm{d}w, \text{avec } |\arg(-w)| \leq \pi$$

et par définition 2.2.5 de $\log \Gamma_2(s|b,b^{-1})$, en différenciant par rapport à t et faisant $t = 0$, et sachant que l'on a :

$$-\gamma = \left\{ \frac{d}{dt} \Gamma(1-t) \right\}_{t=0},$$

et

$$\left\{ \frac{d}{dt} (-z)^{(t-1)} \right\}_{t=0} = -\frac{\log(-z)}{z},$$

on a :

$$\log \Gamma_2(s|b,b^{-1}) = \int_C \frac{e^{-sz}}{(1-e^{-bz})(1-e^{-z/b})} (\gamma + \log(-z)) \frac{\mathrm{dz}}{2i\pi z}, \text{avec } |\arg(-z)| \leq \pi.$$

On intègre sur le contour de Hankel, on peut prendre pour $(\rho, 0+)$ un contour défini par :

$$D = \left\{ \rho \geqslant t \geqslant \delta \right\} \bigcup \left\{ t = -\delta e^{i\theta}, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \right\} \bigcup \left\{ \delta \leqslant t \leqslant \rho \right\} = D_- \bigcup D_\delta \bigcup D_+.$$

Ici, on a $0 < \delta < \rho$, δ est un nombre arbitraire, l'intégrale ne dépend pas de δ.
Sur D_+ : $\arg(-z) = -\pi$, donc on a :

$$\log(-z) = \log|z| + i \arg(-z) = \log|z| - i\pi.$$

Sur D_δ (le cercle) :

$$-z = \delta e^{i\theta}.$$

Donc :

$$\log\Gamma_2(s|b,b^{-1}) = \lim_{\rho\to\infty,\delta\to 0}\int_\rho^\delta \frac{e^{-sz}}{(1-e^{-bz})(1-e^{-z/b})}(\gamma+\log|z|-i\pi)\,\frac{\mathrm{dz}}{2i\pi z}$$

$$+\lim_{\rho\to\infty,\delta\to 0}\int_\delta^\rho \frac{e^{-sz}}{(1-e^{-bz})(1-e^{-z/b})}(\gamma+\log|z|+i\pi)\,\frac{\mathrm{dz}}{2i\pi z}$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})}(\gamma+\log\delta e^{i\theta})\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Soit :

$$\log\Gamma_2(s|b,b^{-1}) = \lim_{\rho\to\infty,\delta\to 0}\int_\delta^\rho \frac{e^{-sz}}{(1-e^{-bz})(1-e^{-z/b})}\,\frac{\mathrm{dz}}{z}$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})}(\gamma+\log\delta+i\theta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Appelons

$$I_1 = \int_\delta^\infty \frac{e^{-sx}}{(1-e^{-bx})(1-e^{-x/b})}\,\frac{\mathrm{dx}}{x}$$

et

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})}(\gamma+\log\delta+i\theta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})}(\gamma+\log\delta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})}(i\theta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Or au voisinage de 0 :

$$\frac{e^{s\delta e^{i\theta}}}{(1-e^{b\delta e^{i\theta}})(1-e^{\delta e^{i\theta}/b})} = \frac{1}{\delta^2 e^{2i\theta}}+\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)\frac{1}{\delta e^{i\theta}}+\Big[\frac{Q}{2}\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{6}\Big(Q^2-1/2\Big)\Big]+o(\delta).$$

D'où :

$$I_2 =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\gamma+\log\delta)\Big[\frac{1}{\delta^2e^{2i\theta}}+\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)\frac{1}{\delta e^{i\theta}}+\Big[\frac{Q}{2}\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{6}\Big(Q^2-1/2\Big)\Big]+o(\delta)\Big]\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\frac{1}{\delta^2e^{2i\theta}}+\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)\frac{1}{\delta e^{i\theta}}+\Big[\frac{Q}{2}\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{6}\Big(Q^2-1/2\Big)\Big]+o(\delta)\Big]i\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Donc :

$$I_2 = (\gamma+\log\delta)\Big[\frac{Q}{2}\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{6}\Big(Q^2-1/2\Big)\Big]+\frac{1}{2\delta^2}+\Big(\frac{Q}{2}-s\Big)\frac{1}{\delta}+o(\delta).$$

Or grâce au lemme suivant (pour la preuve cf. [Bar99] p. 98-99) :

Lemme 2.3.4.

$$(\gamma+\log\delta) = -\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + o(\delta).$$

On a également :

$$\frac{1}{2\delta^2} = \int_\delta^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

et

$$\frac{1}{2\delta} = \int_\delta^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Donc :

$$I_2 = -\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\left[\frac{Q}{2}\left(\frac{Q}{2}-s\right)+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{6}\left(Q^2-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x-\int_\delta^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3}-\int_\delta^\infty \left(\frac{Q}{2}-s\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+o(\delta).$$

Mais on a :

$$\frac{Q^2}{4}-\frac{Qs}{2}+\frac{s^2}{2}-\frac{Q^2}{6}+\frac{1}{12}=\frac{Q^2}{12}-\frac{Qs}{2}+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}(1-\frac{Q^2}{2})+\frac{(Q/2-s)^2}{2}.$$

Conclusion, on obtient le résultat voulu :

$$\log\Gamma_2(s|b,b^{-1}) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-sx}}{(1-e^{-bx})(1-e^{-x/b})}-\frac{(Q/2-s)^2}{2}e^{-x}-\frac{(Q/2-s)}{x}-\frac{e^{-x}}{12}(1-\frac{Q^2}{2})-\frac{1}{x^2}\right]\frac{\mathrm{dx}}{x},$$

où $Q = b + b^{-1}$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(b) \neq 0$.

NB : on enlève à

$$\frac{e^{-sx}}{(1-e^{-bx})(1-e^{-x/b})},$$

la quantité :

$$\frac{(Q/2-s)^2}{2}e^{-x}+\frac{(Q/2-s)}{x}+\frac{e^{-x}}{12}(1-\frac{Q^2}{2})+\frac{1}{x^2},$$

permettant ainsi à l'intégrale de converger.

♦

Chapitre 3

La fonction Gamma q-analogue

3.1 Définition

Définition 3.1.1.

$$\bullet [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

$$\bullet [n]_q! = \prod_{i=1}^{n} [i]_q.$$

Définition 3.1.2. On suppose que $0 < q < 1$:

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q\,;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z}.$$

Le produit $(a\,;q)_\infty$ est défini par :

$$\bullet (a\,;q)_\infty = \prod_{n=1}^{\infty}(1-aq^n),$$

$$\bullet (a\,;q)_n = \frac{(a\,;q)_\infty}{(aq^n\,;q)_\infty} = \prod_{i=1}^{n-1}(1-aq^i).$$

Si $q > 1$:

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q^{-1};q^{-1})_\infty}{(q^{-z};q^{-1})_\infty}(q-1)^{1-z}q^{\binom{z}{2}}.$$

$$\Gamma(z+1;q) = \Gamma_q(z+1) = (1-q)^{-z}\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1-q^{z+k}}{1-q^k}\Big)^{-1}.$$

Remarque 3.1.3.
Quand $z = n+1$ est un entier naturel, la définition devient :

$$\Gamma_q(n+1) = [n]_q!.$$

Ceci tend vers $n\,!$ quand $q \to 1^-$.

3.2 Propriétés

Théorème 3.2.1 (q-binomial, cf.[Bai35], 4 p. 66)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(a\,;q)_n}{(q\,;q)_n} = \frac{(az\,;q)_\infty}{(z\,;q)_\infty}.$$

Propriété 3.2.2.

$$\lim_{q\to 1^-} \Gamma_q(z) = \Gamma(z).$$

Démonstration.
Donnons une preuve toute simple due à [And86] (pour une preuve plus précise concernant le changement entre la limite et le produit, voir [Koo90]).

$$\Gamma_q(z+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n+1})^z}{(1-q^{n+z})(1-q^n)^z}.$$

$$\lim_{q\to 1^-} \Gamma_q(z+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+z}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^z = z\Big[z^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^z\Big] = z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

(d'après la formule d'Euler.) ♦

Propriété 3.2.3 (Equation fonctionnelle)**.**

$$\Gamma_q(z+1) = [z]_q \Gamma_q(z),$$

où :

$$[z]_q = \frac{1-q^z}{1-q}.$$

Askey(cf.[Ask78]) a montré que cette fonction q-analogue satisfaisait au théorème de Bohr-Morellup.

Théorème 3.2.4. *Il existe une unique fonction déterminée par les trois conditions suivantes :*
(i)

$$\Gamma_q(z+1) = [z]_q \Gamma_q(z).$$

(ii)

$$\Gamma_q(1) = 1, \Gamma_q(2) = 1.$$

(iii)

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma_q(z+1) \geqslant 0, \ pour\, z \geqslant 0.$$

De plus quand q tend vers $1^-, \Gamma_q(z)$ converge vers $\Gamma(z)$, uniformément en z.

Propriété 3.2.5 (Zéros de $1/\Gamma_q(z)$)**.**

$$\frac{1}{\Gamma_q(z)} = (1-q)^{z-1} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{n+z}}{1-q^{n+1}}.$$

Cette fonction a comme zéros :

$$z = -n \pm 2\pi i k / \log q,$$

où k et n sont des entiers naturels.

Proposition 3.2.6 (Formule de duplication de Legendre q-analogue)**.**

$$\Gamma_q(2z)\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2}) = (1+q)^{2z-1}\Gamma_{q^2}(z)\Gamma_{q^2}(z+\frac{1}{2}).$$

Démonstration.
En effet partant de :

$$\frac{\Gamma_{q^2}(z)\Gamma_{q^2}(z+\frac{1}{2})}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})}$$

et de

$$(a\,;q)_{2n} = (a, aq\,; q^2)_n,$$

on a :

$$\frac{\Gamma_{q^2}(z)\Gamma_{q^2}(z+\frac{1}{2})}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} = \frac{(q,q^2;q^2)_\infty}{(q^{2z},q^{2z+1};q^2)_\infty}(1-q^2)^{1-2z} = \frac{(q\,;q)_\infty}{(q^{2z};q)_\infty}(1-q^2)^{1-2z} = (1+q)^{1-2z}\Gamma_q(2z).$$

♦

On a de façon similaire :

Proposition 3.2.7 (Formule de multiplication de Gauss q-analogue)**.**

$$\Gamma_q(nz)\Gamma_{q^n}(\frac{1}{n})\Gamma_{q^n}(\frac{2}{n})...\Gamma_{q^n}(\frac{n-1}{n}) = [n]_q^{nz-1}\Gamma_{q^n}(z)\Gamma_{q^n}(z+\frac{1}{n})...\Gamma_{q^n}(z+\frac{n-1}{n}).$$

Définition 3.2.8 (Intégrale de Jackson)**.**

$$\int_0^1 f(t)d(q,t) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n.$$

Définition 3.2.9.

$$\int_0^\infty f(t)d(q,t) = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(q^n)q^n.$$

La fonction bêta q-analogue est définie par :

Définition 3.2.10.

$$B_q(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}\frac{(tq\,;q)_\infty}{(tq^b\,;q)_\infty}d(q,t) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{na}\frac{(q^{n+1}\,;q)_\infty}{(q^{n+b}\,;q)_\infty}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.11.

$$B_q(a,b) = \frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(b)}{\Gamma_q(a+b)}.$$

Démonstration.
On a par définition :

$$B_q(a,b) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{na}\frac{(q^{n+1}\,;q)_\infty}{(q^{n+b}\,;q)_\infty}.$$

Or, en utilisant les deux résultats suivants :

$$(q^b\,;q)_n = \frac{(q^b\,;q)_\infty}{(q^{b+n}\,;q)_\infty},$$

$$(q\,;q)_n = \frac{(q\,;q)_\infty}{(q^{n+1}\,;q)_\infty},$$

on a :

$$B_q(a,b) = (1-q)\frac{(q\,;q)_\infty}{(q^b\,;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^b\,;q)_n}{(q\,;q)_n}q^{na}.$$

Puis en utilisant le 3.2.1 :

$$\frac{(ab\,;q)_\infty}{(b\,;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\,;q)_n}{(q\,;q)_n}b^n,$$

on a :

$$B_q(a,b) = \frac{(1-q)(q\,;q)_\infty(q^{a+b}\,;q)_\infty}{(q^b\,;q)_\infty(q^a\,;q)_\infty}.$$

Puis on fait apparaître dans cette expression $\Gamma_q(a), \Gamma_q(b), \Gamma_q(a+b)$ (cf.3.1.2), d'où le théorème. ♦

Askey(cf. [Ask78]) donne une formule analogue à la formule des compléments :

Proposition 3.2.12 (Formule des compléments)**.**

$$\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(1-\alpha) = \frac{(-c\,;q)_\infty(-c^{-1}q\,;q)_\infty(1-q)}{(-cq^\alpha;q)_\infty(-c^{-1}q^{1-\alpha};q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\alpha n}}{1+cq^n}.$$

Démonstration.
Cette proposition est basée sur le résultat suivant (cf. [AA78] et cf.[Ism77]) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(a\,;q)_n}{(b\,;q)_n}x^n = \frac{(ax\,;q)_\infty(\frac{q}{ax}\,;q)_\infty(q\,;q)_\infty(\frac{b}{a}\,;q)_\infty}{(x;q)_\infty(\frac{b}{ax}\,;q)_\infty(b;q)_\infty(\frac{b}{a}\,;q)_\infty}.$$

Et sur :

$$(a\,;q)_n = \frac{(a\,;q)_\infty}{(aq^n\,;q)_\infty}.$$

On a alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(bq^n\,;q)_\infty}{(aq^n\,;q)_\infty}x^n = \frac{(ax\,;q)_\infty(\frac{q}{ax}\,;q)_\infty(q\,;q)_\infty(\frac{b}{a}\,;q)_\infty}{(a;q)_\infty(\frac{q}{a}\,;q)_\infty(xq;q)_\infty(\frac{b}{ax}\,;q)_\infty}.$$

Alors, en posant : $x = q^\alpha, a = -c, b = -cq^{\alpha+\beta}$ et en utilisant 3.2.1, on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha+\beta}\,;q)_k}{(q\,;q)_k}(-cq^n)^k \Big] q^{\alpha n} = \frac{(-cq^\alpha\,;q)_\infty(-c^{-1}q^{1-\alpha}\,;q)_\infty(q\,;q)_\infty(q^{\alpha+\beta}\,;q)_\infty}{(-c\,;q)_\infty(-c^{-1}q\,;q)_\infty(q^\alpha\,;q)_\infty(q^\beta\,;q)_\infty}.$$

De plus :

$$\frac{(-cq^\alpha\,;q)_\infty(-c^{-1}q^{1-\alpha}\,;q)_\infty(q\,;q)_\infty(q^{\alpha+\beta}\,;q)_\infty}{(-c\,;q)_\infty(-c^{-1}q\,;q)_\infty(q^\alpha\,;q)_\infty(q^\beta\,;q)_\infty} = \frac{(-cq^\alpha\,;q)_\infty(-c^{-1}q^{1-\alpha}\,;q)_\infty\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{(-c\,;q)_\infty(-c^{-1}q\,;q)_\infty(1-q)\Gamma_q(\alpha+\beta)}.$$

Puis en posant $\alpha + \beta = 1$, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha+\beta}\,;q)_k}{(q\,;q)_k}(-cq^n)^k \Big] q^{\alpha n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-cq^n)^k \Big] q^{\alpha n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{\alpha n}}{1+cq^n}.$$

D'où la formule des compléments q-analogue. ♦

Deuxième partie

Variantes de Double Gamma en physique

Chapitre 4

La fonction Γ_b et double sinus S_b

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à deux fonctions spéciales :
la fonction Γ_b et la fonction double sinus $S_b(x)$. Elles nous permettront de mieux comprendre la fonction Υ.

4.1 La fonction Γ_b

A partir de la fonction double Gamma, on peut définir la fonction Γ_b.

Définition 4.1.1 (cf.[Nak04], (A 55))**.**

$$\Gamma_b(x) = \frac{\Gamma_2(x|b, b^{-1})}{\Gamma_2(Q/2|b, b^{-1})},$$

avec $Q = b + b^{-1}$ et $\mathrm{Re}(x) > 0$, $\mathrm{Re}(b) \neq 0$.

D'après la définition de Γ_b, nous pouvons déduire la propriété suivante :

Propriété 4.1.2 (Symétrie)**.**

$$\Gamma_b(x) = \Gamma_{1/b}(x).$$

De la première formule vue au chapitre 2 : 2.2.7 formule de la différence :

$$\frac{\Gamma_2(x+s_1|s_1, s_2)}{\Gamma_2(x|s_1, s_2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{s_2^{\frac{x}{s_2}-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{x}{s_2})},$$

on en déduit immédiatement les deux formules suivantes :

Propriété 4.1.3 (Equations fonctionnelles)**.**

$$\Gamma_b(x+b) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{bx-1/2}}{\Gamma(bx)}\Gamma_b(x),$$

$$\Gamma_b(x+b^{-1}) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{-x/b+1/2}}{\Gamma(x/b)}\Gamma_b(x).$$

Analyticité :

De l'étude de la fonction double Gamma de Barnes, il est clair que la fonction Γ_b est une fonction méromorphe de pôles : $x = -nb - mb^{-1}$, avec n, m, entiers naturels.

Théorème 4.1.4 (Représentation intégrale de $\log \Gamma_b(x)$)**.**

$$\log \Gamma_b(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1-e^{-bt})(1-e^{-t/b})} - \frac{(Q/2-x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(Q/2-x)}{t} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t},$$

avec $\mathrm{Re}(x) > 0$, $\mathrm{Re}(b) \neq 0$.

Démonstration.
Cf. 2.3.3 (chapitre 2) on a vu que :

$$\log \Gamma_2(x, b, b^{-1}) = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{(1-e^{-bt})(1-e^{-t/b})} - \frac{(Q/2-x)^2}{2} e^{-t} - \frac{Q/2-x}{t} - \frac{e^{-t}}{12}(1-Q^2/2) - \frac{1}{t^2} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t}.$$

Donc, d'après la définition de Γ_b, il est clair que nous avons :

$$\log \Gamma_b(x) = \log \Gamma_2(x, b, b^{-1}) - \log \Gamma_2(Q/2, b, b^{-1}),$$

d'où le résultat cherché. ♦

Il existe une autre fonction spéciale reliée à la fonction Γ_b, c'est la fonction double sinus.

4.2 La fonction double sinus

La fonction double sinus est reliée à la fonction Γ_b par :

Définition 4.2.1 (cf.[Nak04], (A 65))**.**

$$S_b(x) = \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(Q-x)}.$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

Propriété 4.2.2 (Relation inverse)**.**

$$S_b(x)S_b(Q-x) = 1.$$

Propriété 4.2.3 (Équations fonctionnelles)**.**

$$\begin{aligned} S_b(x+b) &= 2\sin(\pi bx)S_b(x), & (4.1)\\ S_b(x+b^{-1}) &= 2\sin(\pi xb^{-1})S_b(x). & (4.2) \end{aligned}$$

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{S_b(x+b)}{S_b(x)} &= 2\pi \frac{\Gamma_b(x+b)}{\Gamma_b(b^{-1}-x)} \frac{\Gamma_b(b^{-1}+b-x)}{\Gamma_b(x)} \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma(bx)\Gamma(1-bx)} \\ &= 2\sin(\pi bx)(\text{ par la formule des compléments}). \end{aligned}$$

♦

Il est clair que la fonction double sinus est une fonction méromorphe.
Pôles : $x = -(nb + mb^{-1})$, n et m entiers naturels.
Zéros : $x = Q + (nb + mb^{-1})$, n et m entiers naturels.
Résidus : $res_{x=0}S_b(x) = \frac{1}{2\pi}$.

Propriété 4.2.4 (Asymptotique)**.**

$$S_b(x) = e^{\pm\frac{i\pi}{2}x(x-Q)}, \mathcal{I}m(x) \to \pm\infty$$

Donnons maintenant la représentation intégrale du $\log(S_b(x))$.

Théorème 4.2.5 (Représentation intégrale de $\log(S_b(x))$).

$$\log(S_b(x)) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{\sinh{(Q-2x)t}}{\sinh{(bt)}\sinh{(t/b)}} + \frac{(2x-Q)}{t}\right]\frac{\mathrm{dt}}{t},$$

avec $|\mathrm{Re}(x)\ | < \mathrm{Re}(Q)$.

Démonstration.
D'après la définition de la fonction S_b et de la représentation intégrale de la fonction $\log(\Gamma_b)$ 4.1.4, on a :

$$\begin{aligned}
\log(S_b(x)) &= \log(\Gamma_b(x)) - \log(\Gamma_b(Q-x)), \mid Re(x) \mid < Re(Q), \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt} - e^{-(Q-x)t}}{(1-e^{-bt})(1-e^{-t/b})} + \frac{(2x-Q)}{t}\right]\frac{\mathrm{dt}}{t} \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{\sinh{(Q-2x)t}}{\sinh{(bt)}\sinh{(t/b)}} + \frac{(2x-Q)}{t}\right]\frac{\mathrm{dt}}{t},
\end{aligned}$$

et $\mid \mathrm{Re}(x) \mid < \mathrm{Re}(Q)$. ♦

Chapitre 5

La fonction Upsilon

Nous allons voir dans ce chapitre la fonction upsilon et ses liens importants avec les deux fonctions précédemment étudiées.

5.1 Définition et propriétés immédiates

Définition 5.1.1 (cf.[Nak04], (A 58))**.**

$$\Upsilon_b(x) = \frac{1}{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)},$$

avec $Q = b + b^{-1}$.

Comme conséquence directe de la définition, et d'après la propriété de symétrie vue pour la fonction Γ_b (chapitre 4, 4.1.2) on a :

Proposition 5.1.2 (Symétries)**.**

$$\Upsilon_b(x) = \Upsilon_b^{-1}(x), \tag{5.1}$$
$$\Upsilon_b(x) = \Upsilon_b(Q-x), \tag{5.2}$$
$$\Upsilon_b(Q/2) = 1. \tag{5.3}$$

Proposition 5.1.3 (Equations fonctionnelles)**.**

$$\Upsilon_b(x+b) = \frac{\Gamma(bx)}{\Gamma(1-bx)} b^{1-2bx} \Upsilon_b(x), \tag{5.4}$$
$$\Upsilon_b(x+b^{-1}) = \frac{\Gamma(x/b)}{\Gamma(1-x/b)} b^{\frac{2x}{b}-1} \Upsilon_b(x). \tag{5.5}$$

Démonstration. (5-4)
Par définition et d'après 4.1.3, équations fonctionnelles de Γ_b, chapitre 4, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\Upsilon_b(x+b)}{\Upsilon_b(x)} &= \frac{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)}{\Gamma_b(x+b)\Gamma_b(Q-x-b)} \\
&= \frac{\Gamma_b(x)\Gamma_b(b+b^{-1}-x)}{\Gamma_b(x+b)\Gamma_b(b^{-1}-x)} \\
&= \frac{\Gamma(bx)b^{b(b^{-1}-x)-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1-bx)b^{bx-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma(bx)b^{1-2bx}}{\Gamma(1-bx)}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient la deuxième formule (5-5). ♦

Les zéros de la fonction Υ_b sont importants pour les applications et se trouvent par définition en les pôles de la fonction Γ_b. Nous avons vu, au chapitre 4, que les pôles de la fonction Γ_b sont $x = -nb - \frac{m}{b}$, quand n et m sont des entiers positifs. On a donc le résultat suivant :

Proposition 5.1.4 (Zéros de la fonction $\Upsilon_b(x)$)**.**

$$x = -nb - \frac{m}{b} \textit{ et pour } x = Q + nb + \frac{m}{b}.$$

Proposition 5.1.5 (Valeur limite de Υ, [FL05])**.**

$$\Upsilon(by) \longrightarrow \frac{\Upsilon_0 b^{1-y}}{\Gamma(y)}, \textit{pour } b \longrightarrow 0.$$

Plus précisément, on a :

Proposition 5.1.6 (Développement asymptotique, cf. [Tho02])**.**

$$\Upsilon(b\sigma) = b\Upsilon_0 \frac{b^{-b^2\sigma^2+(b^2-1)\sigma}}{\Gamma(\sigma)} \exp\left\{ b^2\gamma\phi_1(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} b^{2(2n+1)} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}\phi_{2n+1}(\sigma) \right\}.$$

$$\sigma = x/b \textit{ fixé},$$

$\phi_n(\sigma)$ des polynômes de degré n+1, s'annulant en 0 et vérifiant la relation suivante :

$$\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma) - 2\sigma^n, \phi_1(\sigma) = \sigma(1-\sigma).$$

Nous arrivons à la représentation intégrale de $\log(\Upsilon_b(x))$:

5.2 Représentation intégrale de $\log(\Upsilon_b(x))$

Théorème 5.2.1.

$$\log(\Upsilon_b(x)) = \int_0^\infty \left[(\frac{Q}{2} - x)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(Q/2 - x)\frac{t}{2}}{\sinh(bt/2)\sinh(t/2b)} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t},$$

avec $0 < \mathrm{Re}(x) < Q$.

Démonstration.
D'après le chapitre 4, 4.1.4, on a la représentation intégrale de la fonction $\log(\Gamma_b)$:
Si $0 < Re(x) < Q$,

$$\log(\Gamma_b(x)) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{Q/2 - x}{t} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t}.$$

Donc, en utilisant la définition 5.1.1 de la fonction Υ_b, on a :

$$\begin{aligned}
\log(\Upsilon_b(x)) &= -\log(\Gamma_b(x)) - \log(\Gamma_b(Q - x)) \\
&= -\int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(Q/2 - x)}{t} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t} \\
&\quad - \int_0^\infty \left[\frac{e^{-(Q-x)t} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{(-Q/2 + x)}{t} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\log(\Upsilon_b(x)) &= \int_0^\infty \left[\frac{-e^{-xt} - e^{-(Q-x)t} + 2e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} + (Q/2 - x)^2 e^{-t} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t} \\
&= \int_0^\infty \left[(\frac{Q}{2} - x)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2(Q/2 - x)\frac{t}{2}}{\sinh(bt/2)\sinh(t/2b)} \right] \frac{\mathrm{dt}}{t}.
\end{aligned}$$

♦

5.3 La fonction Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov (DOZZ)

Définition 5.3.1.

$$\begin{aligned}
C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= [\pi\mu\gamma(b^2) b^{2-2b^2}]^{(Q - \sum \alpha_i)/b} \\
&\times \frac{\Upsilon_0 \Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)},
\end{aligned}$$

avec :

$$\Upsilon_0 = \left.\frac{d\Upsilon(x)}{dx}\right|_{x=0}.$$

Remarque 5.3.2.

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = C(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}), \sigma \in \Sigma_3.$$

Définition 5.3.3.

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1}[\gamma(2\alpha_1 b + kb^2)\gamma(2\alpha_2 b + kb^2)\gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}.$$

On rappelle la définition 1.2.10

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Proposition 5.3.4.

$$\frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{\gamma(-b^2)}{\pi\mu} \times \frac{\gamma(b(2\alpha_1 + b)\gamma(2b\alpha_1)\gamma(b\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)}{\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q))\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3))\gamma(b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2))}.$$

Démonstration.
On va utiliser les propriétés de la fonction Upsilon, plus particulièrement l'équation fonctionnelle 5.1.3.
On a :

$$\frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{[\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum\alpha_i)/b-1}}{[\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum\alpha_i)/b}}$$

$$\times \frac{\Upsilon(2\alpha_1 + 2b)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}{\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q + b)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + b)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 + b)}.$$

Or :

$$\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q + b) = \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q))b^{1-2b(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-Q)}\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q).$$

$$\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + b) = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)b^{1-2b(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)}\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3).$$

$$\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b + b) = \gamma(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b)b^{1-2b(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1-b)}\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1).$$

$$\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 + b) = \gamma(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)b^{1-2b(\alpha_3+\alpha_1-\alpha_2)}\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2).$$

$$\gamma(b^2)^{-1} = -b^4\gamma(-b^2).$$

$$Q = b + \frac{1}{b}.$$

D'où la proposition. ♦

Définition 5.3.5.

$$I_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(\frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1}\gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1}[\gamma(2\alpha_1 b + kb^2)\gamma(2\alpha_2 b + kb^2)\gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}.$$

On considère que $C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ dépend analytiquement de s, en posant :

$$s = (Q - \sum \alpha_i)/b.$$

Alors :

Proposition 5.3.6 (Résidus)**.**

$$res_{\sum \alpha_i = Q - n/b} C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = I_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

Démonstration.
Posons :

$$P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\sum\alpha_i)/b}$$
$$\times \frac{\Upsilon_0\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\Upsilon(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\Upsilon(\alpha_3+\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Et :

$$Q(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \Upsilon(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-Q).$$

D'où :

$$C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{Q(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}.$$

On a alors :

$$res_{\sum \alpha_i = (Q-n)/b} C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{P(s=n)}{\frac{dQ(s)}{ds}\Big|_{s=n}}.$$

On a :

$$P(s=n) = [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^n$$
$$\times \frac{\Upsilon_0\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(Q-2\alpha_3-bn)\Upsilon(Q-2\alpha_2-bn)\Upsilon(Q-2\alpha_1-bn)}.$$

On a :

$$\Upsilon(Q-x) = \Upsilon(x).$$

Et pour tout $i = 1,2,3$:

$$\Upsilon(Q-2\alpha_i-bn) = \Upsilon(2\alpha_i+bn).$$

On utilise alors l'équation fonctionnelle de la fonction Υ, n fois :

$$\Upsilon(2\alpha_i+bn) = \prod_{k=0}^{n-1}[\gamma(2\alpha_i b + kb^2)]b^{n-4bn\alpha_i-nb^2(n-1)}\Upsilon(2\alpha_i),$$

pour tout $i = 1,2,3$.
De plus :

$$\Upsilon(-bn+b) = \gamma(-nb^2)b^{1-2b(-nb)}\Upsilon(-nb).$$

Ainsi par récurrence sur n et en faisant le produit membre à membre, on a :

$$\Upsilon(-b) = \prod_{j=2}^{n-1} \gamma(-jb^2) b^{n+2b^2(n-1)(n+2)/2} \Upsilon(-nb).$$

$$\Upsilon(-b+b) = \gamma(-b^2) b^{1+2b^2} \Upsilon(-b).$$

Donc :

$$\Upsilon(0) = \prod_{j=1}^{n} \gamma(-jb^2) b^{n+n(n+1)b^2} \Upsilon(-nb).$$

$$\Upsilon(s) = \prod_{j=1}^{n} \gamma(b(s-jb)) b^{n-2bsn+n(n+1)b^2} \Upsilon(s-nb).$$

On obtient ainsi :

$$res_{\sum \alpha_i=(Q-n)/b} C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(\frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)}\right)^n \times \frac{\Upsilon_0 b^{-n-nb^2-n^2b^2}}{\prod_{k=0}^{n-1}[\gamma(2\alpha_1 b+kb^2)\gamma(2\alpha_2 b+kb^2)\gamma(2\alpha_3 b+kb^2)]} \times \frac{1}{\frac{dQ(s)}{ds}\Big|_{s=n}}.$$

De plus on a :

$$\frac{\Upsilon_0}{\frac{dQ(s)}{ds}\Big|_{s=n}} = lim_{s\to 0}\left(\frac{\Upsilon(s)-\Upsilon(0)}{s} \times \frac{s}{\Upsilon(-bn+s)-\Upsilon(-bn)}\right).$$

D'après les résultats ci-dessus :

$$\Upsilon(-bn+s)-\Upsilon(-bn) = \left(\frac{\Upsilon(s) b^{-n+2bsn-n(n+1)b^2}}{\prod_{j=1}^{n}\gamma(b(s-jb))} - \frac{\Upsilon(0) b^{n+n(n+1)b^2}}{\prod_{j=1}^{n}\gamma(-jb^2)}\right).$$

Donc :

$$\frac{\Upsilon_0}{\frac{dQ(s)}{ds}\Big|_{s=n}} = b^{n+n(n+1)b^2} \prod_{j=1}^{n} \gamma(-jb^2).$$

Finalement :

$$res_{\sum \alpha_i=(Q-n)/b} C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(\frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1}\gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{n-1}[\gamma(2\alpha_1 b+kb^2)\gamma(2\alpha_2 b+kb^2)\gamma(2\alpha_3 b+kb^2)]}.$$

♦

Chapitre 6

Fonction de Lukyanov-Zamolodchikov

Le but de ce chapitre est d'étudier quelques propriétés remarquables de la fonction de Lukyanov-Zamolodchikov.

6.1 Fonction de Lukyanov-Zamolodchikov

Définition 6.1.1 (cf. [FLZZ97], (3),(8),(9), (12))**.**

$$\bullet \log G_L(a;b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{ -\frac{\sinh^2(2abt)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh((1+b^2)t)} + 2a^2e^{-2t}\right\}.$$

$$\bullet\, Q = b + b^{-1}.$$

$$\bullet R(Q/2+iP) := \frac{\Gamma(1+2iP/b)\Gamma(1+2iPb)}{\Gamma(1-2iP/b)\Gamma(1-2iPb)} \text{ « amplitude de réfléxion ».}$$

Remarque 6.1.2. $\log G_L(a;b)$ est bien définie au voisinage de l'infini pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, fixé.

Théorème 6.1.3. *La fonction $G_L(a;b)$ satisfait aux deux propriétés suivantes :*

$$(i)\ \textit{Symétrie} : G_L(a;b) = G_L(-a;b).$$

$$(ii)\ \textit{Réfléxion} : G_L(a;b) = R(a)G_L(Q-a;b).$$

Démonstration.
• Symétrie
La preuve est immédiate vu l'expression de G_L.
• Réfléxion
On a :

$$R(a) = (2a-Q)^2\gamma((2a-Q)/b)\gamma((2a-Q)b).$$

Calculons $\log(R(a))$:

$$\log(R(a)) = 2\log((2a-Q)) + \log(\gamma((2a-Q)/b)) + \log(\gamma((2a-Q)b)).$$

Puis calculons : $f_a := \log(G_L(a;b)) - \log(G_L(Q-a;b))$. (cf. en annexe les formules trigonométriques usuelles A.1.)

$$f_a = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\frac{\sinh^2(2abt) - \sinh^2(2(Q-a)bt)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh((1+b^2)t)} +$$

$$+2Q(2a-Q)^2 e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$f_a = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\frac{\sinh(2(2a-Q)bt)\sinh(2Qbt)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh(Qbt)} + 2Q(2a-Q)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$\hookrightarrow$ on utilise $\sinh(2Qbt) = 2\sinh(Qbt)\cosh(Qbt)$

$$f_a = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\frac{\sinh(2(2a-Q)bt)\sinh(Qbt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)} + 2Q(2a-Q)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$f_a = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\frac{\sinh(2(2a-Q)bt)[\sinh(b^2t)\cosh(t) + \sinh(t)\cosh(b^2t)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)} +$$

$$+2Q(2a-Q)e^{-2t}\Bigg\}.$$

(car $Qbt = (b^2+1)t$)

$$f_a = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\frac{\sinh(2(2a-Q)bt)\cosh(t)}{\sinh(t)} +$$

$$-\frac{\sinh(2(2a-Q)bt)\cosh(b^2t)}{\sinh(b^2t)} + 2Q(2a-Q)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$f_a = \frac{-1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{\frac{\sinh((1-2(Q-2a)b)t)}{\sinh(t)}+\right.$$

$$-\frac{\sinh((1-2(2a-Q)b)t)}{\sinh(t)}+\frac{\sinh((1-2(Q-2a)\frac{1}{b})b^2t)}{\sinh(b^2t)}+$$

$$\left.-\frac{\sinh((1-2(2a-Q)\frac{1}{b})b^2t)}{\sinh(b^2t)}-4Q(2a-Q)e^{-2t}\right\}.$$

$\hookrightarrow$ on échange $2t$ en t, $2b^2t$ en t :

$$f_a = \frac{-1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{\frac{\sinh((1/2-(Q-2a)b)t)}{\sinh(t/2)}+\right.$$

$$-\frac{\sinh((1/2-(2a-Q)b)t)}{\sinh(t/2)}+\frac{\sinh((1/2-(Q-2a)\frac{1}{b})t)}{\sinh(t/2)}+$$

$$\left.-\frac{\sinh((1/2-(2a-Q)\frac{1}{b})t)}{\sinh(t/2)}-4Q(2a-Q)e^{-t}\right\}.$$

On utilise : Kummer cf.1.2

$$\log(\gamma(a)) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{\frac{\sinh((1/2-a)t)}{\sinh(t/2)}-(1-2a)e^{-t}\right\}.$$

D'où :

$$f_a = 2\log((2a-Q)) + \log(\gamma(2a-Q/b)) + \log(\gamma((2a-Q)b)).$$

Donc, on trouve :

$$\log(G_L(a;b)) - \log(G_L(Q-a;b)) = 2\log((2a-Q)) + \log(\gamma((2a-Q)/b)) + \log(\gamma((2a-Q)b)).$$

$$\log(R(a)) = 2\log((2a-Q)) + \log(\gamma((2a-Q)/b)) + \log(\gamma((2a-Q)b)),$$

d'où l'assertion. ♦

Remarque 6.1.4. *Autre méthode utilisant la propriété de symétrie : (i).*
On est ramené à prouver que :

$$G_L(a;b) = G_L(-a;b) = R(-a)G_L(a+Q;b) = R(a)G_L(Q-a;b).$$

Calculons $\log G_L(a+Q;b) - \log G_L(a;b)$ à partir de sa définition.

Notons que :

$$(a+Q)^2 - a^2 = Q(2a+Q) = (2a+Q)b + (2a+Q)/b.$$

On a :

$$\begin{aligned}
-\frac{\sinh^2(2abt) - \sinh^2(2(Q+a)bt)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh((1+b^2)t)} &= -\frac{\sinh(2Qbt)\sinh^2(2(Q+a)bt)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh(Qbt)} \\
&= -\frac{\sinh(Qbt)\sinh^2(2(Q+a)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)} \\
&= -\frac{\sinh(2(2a+Q)bt)\cosh(t)}{\sinh(t)} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\cosh(b^2t)\sinh(2(2a+Q)bt)}{\sinh(b^2t)}.$$

D'où :

$$\log G_L(a+Q;b) - \log G_L(a;b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\sinh(2(2a+Q)bt)\cosh(t)}{\sinh(t)} + 2(2a+Q)be^{-2t}\right\} +$$

$$+\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\cosh(b^2t)\sinh(2(2a+Q)bt)}{\sinh(b^2t)} + 2(2a+Q)b^{-1}e^{-2t}\right\} = I_1(a,b) + I_2(a,b).$$

On a :

$$I_1(a,b) = \frac{-1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{\frac{\sinh((1/2+(Q+2a)b)t) + \sinh((-1/2+(Q+2a)b)t)}{\sinh(t/2)} + \right.$$

$$\left. + 2(2a+Q)be^{-2t}\right\}.$$

Donc :

$$I_1(a,b) = 1/2\log(\gamma((2a+Q)b+1)\gamma((2a+Q)b)).$$

D'un autre côté :

$$I_2(a,b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\cosh(t)\sinh(2(2a+Q)t/b)}{\sinh(t)} + 2(2a+Q)b^{-1}e^{-2t/b^2}\right\}.$$

$$I_2(a,b) = I_1(a,1/b) + \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{2(2a+Q)b^{-1}e^{-2t/b^2} - 2(2a+Q)b^{-1}e^{-2t}\right\}.$$

$$I_2(a,b) = I_1(a,1/b) - 2(2a+Q)b^{-1}\log(1/b^2) = I_1(a,1/b) + 4(2a+Q)b^{-1}\log(b).$$

Il en découle :

$$\log G_L(a+Q;b) - \log G_L(a;b) = \frac{1}{2}\log(\gamma((2a+Q)b+1)\gamma((2a+Q)b)\gamma((2a+Q)b^{-1}+1)\times$$
$$\times\gamma((2a+Q)b^{-1})b^{8(2a+Q)b^{-1}}).$$

Donc, on retrouve bien sûr, le même résultat :

$$f_a = 2\log((2a+Q)) + \log(\gamma((2a+Q)/b)) + \log(\gamma((2a+Q)b)).$$
$$\log(R(a)) = 2\log((2a+Q)) + \log(\gamma((2a+Q)/b)) + \log(\gamma((2a+Q)b)).$$

6.2 Valeur limite de la dérivée logarithmique

Proposition 6.2.1.

$$\lim_{b\to 0} b^2 \frac{\partial \log G_L(a/b;b)}{\partial a} = 2\log(\gamma(a+1/2)) + 4a\log(2).$$

Démonstration.
On a :

$$\log G_L(a/b;b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{ -\frac{\sinh^2(2at)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh((1+b^2)t)} + 2(a/b)^2 e^{-2t}\right\}.$$

D'où :

$$\frac{\partial \log G_L(a/b;b)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{ -\frac{4t\sinh(2at)\cosh(2at)}{2\sinh(b^2t)\sinh(t)\cosh((1+b^2)t)} + 4ab^{-2}e^{-2t}\right\}.$$

Donc :

$$\lim_{b\to 0} b^2 \frac{\partial \log G_L(a/b;b)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{ -2\frac{\sinh(4at)}{\sinh(2t)} + 4ae^{-2t}\right\}.$$

Or, en utilisant :

$$\log(\gamma(a+1/2)) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{\frac{\sinh(at)}{\sinh(t/2)} - 2ae^{-t}\right\}.$$

(cf. 1.2) et

$$\log(a) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}(e^t - e^{-at}).$$

(cf.1.2.1)

on obtient :

$$\lim_{b\to 0} b^2 \frac{\partial \log G_L(a/b;b)}{\partial a} = 2\log(\gamma(a+1/2)) + 4a\log(2).$$

♦

Chapitre 7

Fonctions de Fateev liées aux matrices de Cartan

Ce chapitre est une généralisation du chapitre 6 au cas des systèmes de racines finies ; le chapitre 6, quand à lui, correspondait à A_1.

7.1 Notations standards

Fixons les notations standards sur les systèmes de racines, [Bou81].
Soit V un espace vectoriel réel. On appelle système de racines réduit dans V un sous-ensemble R de V qui possède les propriétés suivantes :
(i) R est fini, et engendre V.
(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha^\vee \in V^*$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, et que l'application :

$$s_\alpha : x \to x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

de V dans V transforme R en R.
(iii) Pour tout $\alpha \in R$, on a $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$.
(iv)Si $\alpha \in R$, on a $2\alpha \notin R$.
Les éléments de R s'appellent les racines. La dimension de V s'appelle le rang du système de racines.
On dit que R est irréductible si $R \neq \emptyset$ et si R n'est pas somme directe de deux systèmes de racines non vides.
Les systèmes de racines irréductibles sont précisés par une famille (indiquée par une lettre de A à G) et le rang (indiqué par un indice).
Il existe quatre familles infinies (appelées les systèmes de racines classiques) et cinq cas exceptionnels (les systèmes de racines exceptionnelles) :

$$*A_l(l \geq 1) * B_l(l \geq 2) * C_l(l \geq 3) * D_l(l \geq 4) * E6 * E7 * E8 * F4 * G2*$$

Dans ce chapitre et dans ceux qui suivent, on considérera un système de racines fini irréductible $R \subset V$.

Munissons V d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ W-invariant, W étant le groupe de Weyl de R ; à l'aide de ce produit, V sera identifié à son dual V^* ; en particulier, on peut considérer les racines duales comme les éléments de V :
$\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle,\ \alpha \in R.$
Choisissons une base $\{\alpha_i,\ 1 \leq i \leq l\}$ de racines simples de R.
Soit $A = (\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle)$ la matrice de Cartan de R ; suivant l'usage, on dira que R est simplement lacé si A est symétrique.
Soit ρ la demi-somme des racines positives, on pose :

$$\rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha^\vee.$$

Soit θ la plus longue racine :

$$\theta = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i.$$

On pose $n_0 = 1$.
Soit $h = \sum_{i=0}^{l} n_i$ le nombre de Coxeter de R.

7.2 Définitions

Considérons l'intégrale suivante : pour $a \in V, b \in \mathbb{R}, b > 0$,

$$\bullet \log G_F(a; b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{ a^2 e^{-2t} + F(a, b; t) \right\}. \qquad (7.2.1)$$

où :

$$\bullet F(a, b; t) := \left\{ -\sinh((1+b^2)t) \sum_{\alpha > 0} \frac{\sinh(b\langle a, \alpha \rangle t) \sinh((b\langle a - 2Q, \alpha \rangle + h(1 + b^2))t)}{\sinh(b^2 t) \sinh(t) \sinh((1 + b^2)ht)} \right\},$$

$$\bullet Q = (b + b^{-1})\rho = q\rho,$$

et

$$\bullet a^2 = \langle a, a \rangle.$$

Théorème 7.2.1. *L'intégrale (7.2.1) converge en $t = 0$.*

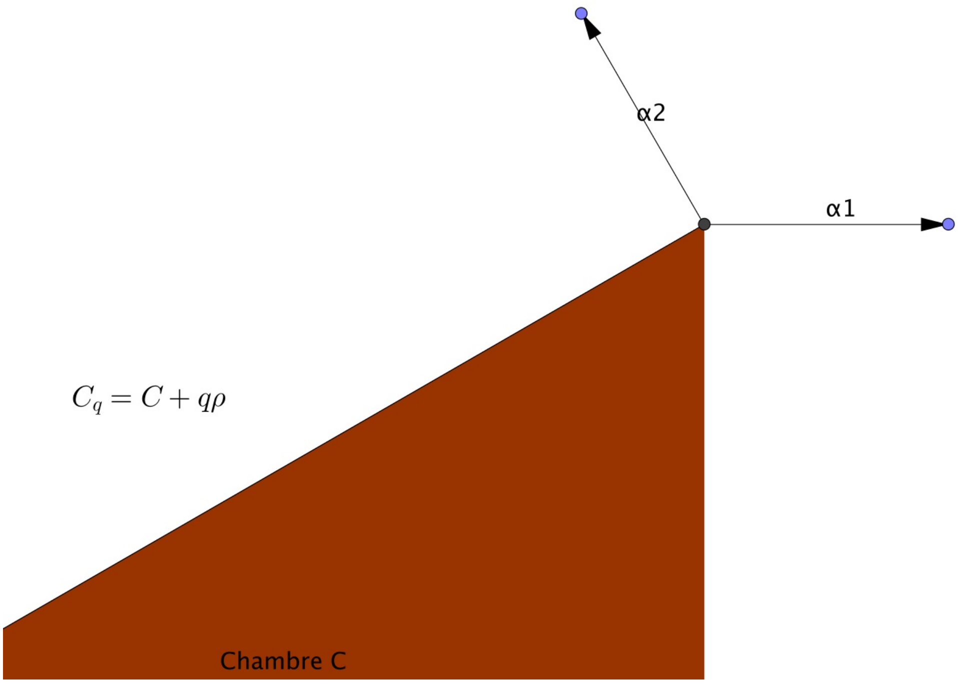
Pour la preuve cf. 7.3. □

Remarque 7.2.2. L'intégrale (7.2.1) converge en $t = \infty$ si a vérifie :

$$\langle a - Q, \alpha_i \rangle < 0,\ i = 1, \dots l,$$

autrement dit, si a appartient à C_q, la chambre C de Weyl translatée (voir ci-après).

$$C = \{a \in V : \langle a, \alpha_i \rangle < 0,\ i = 1, \dots l\} \subset V.$$



Donc la formule (7.2.1) définit la fonction $G_F(a;b)$ pour $b \in C_q$.

Définition 7.2.3. Pour $\hat{s} \in W, a \in V$, posons :

$$\bullet s(a) = Q + \hat{s}(a - Q).$$

$$\bullet \bar{a} = a - Q.$$

Définition 7.2.4.

$$\bullet A(a) = \prod_{\alpha \geq 0} \Gamma(1 - \langle \bar{a}, \alpha \rangle / b)\Gamma(1 - \langle \bar{a}, \alpha \rangle b).$$

$$\bullet R_s(a) = \frac{A(s(a))}{A(a)}.$$

Définition 7.2.5. Pour tout $s \in W$, définissons $G_F(a;b)$ pour $b \in s(C_q)$ par :

$$G_F(s(a);b) = \frac{A(a)}{A(s(a))} G_F(a;b).$$

Ceci définit $G_F(a;b)$ pour $a \in V$, tels que $\langle a - Q, \alpha_i \rangle \neq 0, i = 1, \ldots, l$.

Remarque 7.2.6. La justification heuristique de cette définition est donnée dans 7.4, ci-dessous.
Nous montrons là que si l'on définit $G_F(a;b)$ par la formule (7.2.1), *où l'on oublie la convergence des intégrales*, alors :

$$\frac{G_F(s(a);b)}{G_F(a;b)} = \frac{A(a)}{A(s(a))}. \tag{7.2.6}$$

De plus :

$$\frac{A(a)}{A(s(a))},$$

est une fonction méromorphe en $a \in V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
En effet, la fonction $G_F(a;b)$ doit pouvoir s'exprimer comme un produit des fonctions double Gamma de Barnes, ce qui démontrera qu'elle est méromorphe. Cette question importante ne sera pas discutée dans cette thèse.

7.3 Condition de convergence de (7.2.1) pour $t = 0$

Cette condition s'écrit :

Proposition 7.3.1.

$$\sum_{\alpha>0} \langle a, \alpha\rangle(\langle a - 2q\rho, \alpha\rangle + hq) = h\langle a, a\rangle, a \in V.$$

Remarque 7.3.2.
Notons que les deux côtés de l'égalité sont des fonctions polynomiales de degré 2, sur V. On va donc utiliser le lemme suivant :

Lemme 7.3.3. *Soit $f(a)$ une fonction polynomiale sur V.*
Alors $f \equiv 0$ ssi

$$f(0) = 0$$

et pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant l, a \in V$:

$$\Delta_i f(a) := f(a + \alpha_i) - f(a) = 0.$$

Remarque 7.3.4. Ce lemme est l'analogue « discret » de :

$$\text{si } f(0, \dots, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_l) = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, l, \text{ alors } f \equiv 0. \square$$

Démonstration.
Donc, pour démontrer notre condition 7.3.1, il suffit de prouver que :

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha_i, \alpha\rangle(\langle 2a - 2q\rho, \alpha\rangle + hq) = 2h\langle \alpha_i, a\rangle, a \in V.$$

Or, ceci revient à montrer que :

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha_i, \alpha\rangle(\langle -2\rho, \alpha\rangle + h) = 0. \tag{1}$$

et

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha_i, \alpha\rangle\langle \alpha_j, \alpha\rangle = h\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle. \tag{2}$$

D'après [CAS10], 4.4, on a pour tout i :

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha_i, \alpha\rangle\langle \rho, \alpha\rangle = h$$

Et, d'après [Bou81], Ch. VI, 1.11, Proposition 29, on a :

$$\langle \rho, \alpha_i \rangle = 1.$$

Cela entraîne donc l'identité (1). La deuxième identité (2) se vérifie directement. De plus, cette deuxième égalité entraîne pour $x \in V, y \in V$:

$$\sum_{\alpha>0} \langle x, \alpha \rangle \langle y, \alpha \rangle = h \langle x, y \rangle. \tag{3}$$

Ce qui implique immédiatement la condition que l'on voulait prouver :

$$\sum_{\alpha>0} \langle a, \alpha \rangle (\langle a - 2q\rho, \alpha \rangle + hq) = h \langle a, a \rangle, a \in V.$$

♦

Remarque 7.3.5.

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha_i, \alpha \rangle \langle \rho, \alpha \rangle = h$$

en est un cas particulier (cf.[Bou81], Ch. VI, 1.12.)
De plus en dérivant deux fois de suite (3), on obtient :

$$\sum_{\alpha>0} \langle x, \alpha \rangle \alpha = hx,$$

puis :

$$\sum_{\alpha>0} \langle \alpha, \alpha \rangle = hn, \text{où}\, n = dimV.$$

7.4 Vérification formelle de 7.2.6, cas A_l

Intéressons-nous tout d'abord au cas de A_2.

7.4.1 Le cas A_2 :

(cf. Notations 7.1)

$$h = 3,\ n = 6,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1.$$

Base :

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3.$$

Racines positives :

$$\epsilon_1 - \epsilon_2,\ \epsilon_1 - \epsilon_3,\ \epsilon_2 - \epsilon_3.$$

La plus grande racine :

$$\theta = \epsilon_1 - \epsilon_3 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

La demi-somme des racines positives :

$$2\rho = 2\epsilon_1 - 2\epsilon_3.$$

$$Q = (b + \frac{1}{b})\rho = q\rho.$$

$$bq = b^2 + 1.$$

Base duale :

$$\alpha_1^\vee = \alpha_1,\ \alpha_2^\vee = \alpha_2.$$

$$2\rho^\vee = \epsilon_1 - \epsilon_3.$$

Symétries :

$$s(a) = 2Q - a.$$

$$\hat{s}(a - Q) = Q - a.$$

$$\overline{s(a)} = s(a) - Q.$$

$$s_1(\alpha_1) = (q - 1)\alpha_1.$$

$$s_1(\alpha_2) = (1 + q)\alpha_1 + \alpha_2.$$

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + (1 + q)\alpha_2.$$

$$s_2(\alpha_2) = (q - 1)\alpha_2.$$

Pour le détail des calculs : voir en annexe A.2.

Démonstration.
$\bullet s_1(\alpha_1)$:
Calculons tout d'abord :

$$A_{1-1} := \log A(\alpha_1) - \log(A(s_1(\alpha_1)).$$

Tenant compte des tables de calculs A.2, on obtient :

$$A_{1-1} = \log\left(\frac{\Gamma(1 + (q-2)/b)\Gamma(1 + (q-2)b)}{\Gamma(1 - (q-2)/b)\Gamma(1 - (q-2)b)}\right).$$

Ainsi :

$$\log A(\alpha_1) - \log(A(s_1(\alpha_1)) = 2\log(q-2) + \log(\gamma(\frac{q-2}{b})) + \log(\gamma((q-2)b)).$$

Puis calculons :

$$G_{1-1} := \log(G_F(s_1(\alpha_1); b)) - \log(G_F(\alpha_1; b)).$$

$$G_{1-1} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh(2(q-1)bt)\sinh((3q-2)bt) - \sinh(2bt)\sinh((q+2)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}]+\right.$$

$$\left.+2q(q-2)e^{-2t}\right\}.$$

$\bullet s_1(\alpha_2)$:

$$A_{1-2} := \log A(\alpha_2) - \log(A(s_1(\alpha_2)).$$

On obtient :

$$A_{1-2} = \log \left(\frac{\Gamma(1+(q+1)/b)\Gamma(1+(q+1)b)}{\Gamma(1-(q+1)/b)\Gamma(1-(q+1)b)} \right).$$

Soit :

$$\log A(\alpha_2) - \log(A(s_1(\alpha_2)) = 2\log(q+1) + \log(\gamma(\frac{q+1}{b})) + \log(\gamma((q+1)b)).$$

Puis calculons :

$$G_{1-2} := \log(G_F(s_1(\alpha_2); b)) - \log(G_F(\alpha_2; b)).$$

$$G_{1-2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{ -\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh((2q+1)bt)\sinh((3q+1)bt) - \sinh(bt)\sinh((1-q)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}] + \right.$$
$$\left. +2q(q+1)e^{-2t} \right\}.$$

$\bullet s_2(\alpha_1)$:

$$A_{2-1} := \log A(\alpha_1) - \log(A(s_2(\alpha_1)).$$

on obtient :

$$A_{2-1} = \log \left(\frac{\Gamma(1+(q+1)/b)\Gamma(1+(q+1)b)}{\Gamma(1-(q+1)/b)\Gamma(1-(q+1)b)} \right).$$

$$\log A(\alpha_1) - \log(A(s_2(\alpha_1)) = 2\log(q+1) + \log(\gamma(\frac{q+1}{b})) + \log(\gamma((q+1)b)).$$

Puis calculons :

$$G_{2-1} := \log(G_F(s_2(\alpha_1); b)) - \log(G_F(\alpha_1; b)).$$

$$G_{2-1} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\{ -\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh((2q+1)bt)\sinh((3q+1)bt) - \sinh(bt)\sinh((1-q)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}] + \right.$$
$$\left. +2q(q+1)e^{-2t} \right\}.$$

$\bullet s_2(\alpha_2)$:

$$A_{2-2} := \log A(\alpha_2) - \log(A(s_2(\alpha_2)).$$

On obtient :

$$A_{2-2} = \log \left(\frac{\Gamma(1+(q-2)/b)\Gamma(1+(q-2)b)}{\Gamma(1-(q-2)/b)\Gamma(1-(q-2)b)} \right).$$

$$\log A(\alpha_2) - \log(A(s_2(\alpha_2)) = 2\log(q-2) + \log(\gamma(\frac{q-2}{b})) + \log(\gamma((q-2)b)).$$

Puis calculons :

$$G_{2-2} := \log(G_F(s_2(\alpha_2); b)) - \log(G_F(\alpha_2; b)).$$

$$G_{2-2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh(2(q-1)bt)\sinh((3q-2)bt) - \sinh(2bt)\sinh((q+2)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}]+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

Remarque 7.4.1.

$$A_{1-1} = A_{2-2} \text{ et } G_{1-1} = G_{2-2}.$$

Puis :

$$A_{1-2} = A_{2-1} \text{ et } G_{1-2} = G_{2-1}.$$

Reprenons le calcul de :

$$G_{1-1} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh(2(q-1)bt)\sinh((3q-2)bt) - \sinh(2bt)\sinh((q+2)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}]+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

Calculons :

$$S = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)[\frac{\sinh(2(q-1)bt)\sinh((3q-2)bt) - \sinh(2bt)\sinh((q+2)bt)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}]+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

En utilisant les formules de trigonométrie habituelles : A.1

$$S = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh^2((5q-4)bt/2) - \sinh^2((q+4)bt/2)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh((2(q-2))bt)\sinh(3qbt)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)}+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((2(q-2))bt)\frac{[\sinh(t)\cosh(b^2t) + \cosh(t)\sinh(b^2t)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)}+$$

$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S=\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{[\sinh(2(q-2)bt)\cosh(b^2t)]}{\sinh(b^2t)}-\frac{[\sinh(2(q-2)bt)\cosh(t)]}{\sinh(t)}$$
$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S=\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{[\sinh(t+2(q-2)bt)+\sinh(2(q-2)bt-t)]}{2\sinh(t)}-$$
$$-\frac{[\sinh(b^2t+2(q-2)bt)+\sinh(2(q-2)bt-b^2t)]}{2\sinh(b^2t)}$$
$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S=\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{[\sinh((1+2(q-2)b)t)+\sinh((2(q-2)b-1)t)]}{2\sinh(t)}-$$
$$-\frac{[\sinh((1+2(q-2)/b)t)+\sinh((2(q-2)/b-1)t)]}{2\sinh(t)}$$
$$+2q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

On sépare en cinq intégrales.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{\sinh((1+2(q-2)b)t)}{\sinh(t)}+(1-2(q-2)b)e^{-2t}\Bigg\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{\sinh((2(q-2)b-1)t))}{\sinh(t)}+(2(q-2)b-1)e^{-2t}\Bigg\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{\sinh((1+2(q-2)/b)t)}{\sinh(t)}+(1-2(q-2)/b)e^{-2t}\Bigg\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{\sinh((2(q-2)/b-1)t))}{\sinh(t)}+(2(q-2)/b-1)e^{-2t}\Bigg\}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{(1+2(q-2)b)e^{-2t}+(2(q-2)b-1)e^{-2t}+$$
$$+(1+2(q-2)/b)e^{-2t}+(2(q-2)/b-1)e^{-2t}-4q(q-2)e^{-2t}\Bigg\}.$$

La dernière intégrale se simplifie et vaut 0 car $q=b+1/b$.
Maintenant on utilise Kummer 1.2, pour les quatre premières intégrales ; on a alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{-\frac{\sinh((1+2(q-2)b)t)}{\sinh(t)}+(1-2(q-2)b)e^{-2t}\Bigg\}=\frac{1}{2}\log(\gamma(1+(q-2)b)),$$

$$\text{avec } -1 < (q-2)b < 0.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\sinh((2(q-2)b-1)t))}{\sinh(t)} + (2(q-2)b-1)e^{-2t}\right\} = \frac{1}{2}\log(\gamma((q-2)b)),$$

$$\text{avec } 0 < (q-2)b < 1.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\sinh((1+2(q-2)/b)t)}{\sinh(t)} + (1-2(q-2)/b)e^{-2t}\right\} = \frac{1}{2}\log(\gamma(1+(q-2)/b)),$$

$$\text{avec } -1 < (q-2)/b < 0.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\frac{\sinh((2(q-2)/b-1)t))}{\sinh(t)} + (2(q-2)/b-1)e^{-2t}\right\} = \frac{1}{2}\log(\gamma((q-2)/b)),$$

$$\text{avec } 0 < (q-2)/b < 1.$$

Alors, sachant que :

$$\gamma(1+(q-2)b) = \frac{\Gamma(1+(q-2)b)}{\Gamma(-(q-2)b)} = -(q-2)^2b^2\frac{\Gamma((q-2)b)}{\Gamma(1-(q-2)b)} = -(q-2)^2b^2\gamma((q-2)b),$$

et

$$\gamma(1+(q-2)/b) = -(q-2)^2b^{-2}\frac{\Gamma((q-2)/b)}{\Gamma(1-(q-2)/b)} = -(q-2)^2b^{-2}\gamma((q-2)/b),$$

On obtient :

$$G_{1-1} = \log(\gamma((q-2)b)) + \log(\gamma((q-2)/b)) + 2\log(q-2).$$

On retrouve donc :

$$\log A(\alpha_1) - \log(A(s_1(\alpha_1)) = 2\log(q-2) + \log(\gamma(\frac{q-2}{b})) + \log(\gamma((q-2)b)) = G_{1-1}.$$

En utilisant les mêmes méthodes, on a :

$$G_{1-2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh((2q+1)bt)\sinh((3q+1)bt) - \sinh(bt)\sinh((1-q)bt)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)} + \right.$$
$$\left. +2q(q+1)e^{-2t}\right\}.$$

$$S' = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh((2q+1)bt)\sinh((3q+1)bt) - \sinh(bt)\sinh((1-q)bt)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)} + \right.$$
$$\left. +2q(q+1)e^{-2t}\right\}.$$

alors :

$$S' = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh^2((5q+2)bt/2) - \sinh^2((2-q)bt/2)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)} +$$

$$+2q(q+1)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S' = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh((1+b^2)t)\frac{[\sinh(3qbt)\sinh((2q+2)bt)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh(3bqt)} +$$

$$+2q(q+1)e^{-2t}\Bigg\}.$$

$$S' = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\Bigg\{ -\sinh(2(q+1)bt)\frac{[\sinh(t)\cosh(b^2t) + \sinh(b^2t\cosh(t)]}{\sinh(b^2t)\sinh(t)} +$$

$$+2q(q+1)e^{-2t}\Bigg\}.$$

Il suffit d'échanger dans les résultats ci-avant $(q-2)$ par $(q+1)$, on a alors :

$$G_{1-2} = \log(\gamma((q+1)b)) + \log(\gamma((q+1)/b)) + 2\log(q+1) = A_{1-2}.$$

♦

7.4.2 Le cas A_l

$h = l+1$, $n = l(l+1)$, $n_i = 1$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant l$.
Base :

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2,\ \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_l = \epsilon_l - \epsilon_{l+1}.$$

Racines positives :

$$\epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l+1.$$

La plus grande racine :

$$\theta = \epsilon_1 - \epsilon_{l+1} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l.$$

La demi-somme des racines positives :

$$2\rho = l\epsilon_1 + (l-2)\epsilon_2 + \ldots + (2-2i+l)\epsilon_i + \ldots - (l-2)\epsilon_l - l\epsilon_{l+1}.$$

$$Q = (b+\frac{1}{b})\rho = q\rho.$$

$$bq = b^2+1.$$

Symétries :

$$\bar{\alpha_i} = \alpha_i - Q.$$

$$\overline{s_j(\alpha_i)} = \alpha_i - Q + (q - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)\alpha_j,\ 1 \leqslant i \leqslant\ l,\ 1 \leqslant j \leqslant l.$$

$$s_j(\alpha_i) = \alpha_i + (q - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)\alpha_j.$$

$$\langle \rho, \alpha_j \rangle = 1.$$

Démonstration.
On rappelle que :

$$A_{i-j} := \log A(\alpha_i) - \log(A(s_j(\alpha_i)).$$

En remarquant que l'on a :

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 2 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Et :

$$q - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} q & \text{si } i < j \\ q+1 & \text{si } j = i+1 \\ q-2 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On obtient :

- pour $i < j$:

$$A_{i-j} = 2\log(q) + \log(\gamma(\frac{q}{b})) + \log(\gamma((q)b)).$$

- Pour $j = i + 1$:

$$A_{i-i+1} = 2\log(q+1) + \log(\gamma(\frac{q+1}{b})) + \log(\gamma((q+1)b)).$$

- Pour $j = i$:

$$A_{i-i} = 2\log(q-2) + \log(\gamma(\frac{q-2}{b})) + \log(\gamma((q-2)b)).$$

On a d'autre part :

$$G_{i-j} := \log(G_F(s_j(\alpha_i); b)) - \log(G_F(\alpha_i; b)).$$

Et :

$$G_{i-j} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{ -\sinh((1+b^2)t)S + (\langle s_j(\alpha_i), s_j(\alpha_i)\rangle - \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle)e^{-2t}\right\}.$$

Avec :

$$S = \sum_{\alpha>0}\left[\frac{\sinh(b\langle s_j(\alpha_i),\alpha\rangle t)\sinh((b\langle s_j(\alpha_i)-2Q,\alpha\rangle + h(1+b^2))t)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)}\right.$$
$$\left.-\frac{\sinh(b\langle\alpha_i,\alpha\rangle t)\sinh((b\langle\alpha_i-2Q,\alpha\rangle + h(1+b^2))t)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)}\right].$$

D'après les calculs précédents on est ramené à :

• pour $i<j$:

$$G_{i-j} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)S + 2q^2e^{-2t}\right\}.$$

• Pour $j=i+1$:

$$G_{i-i+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)S + 2q(q+1)e^{-2t}\right\}.$$

• Pour $j=i$:

$$G_{i-i} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-\sinh((1+b^2)t)S + 2q(q-2)e^{-2t}\right\}.$$

Reste donc à calculer S.

• $i<j$:

$$\langle s_j(\alpha_i),\alpha\rangle = \langle\alpha_i,\alpha\rangle + q\langle\alpha_j,\alpha\rangle.$$
$$\langle s_j(\alpha_i)-2Q,\alpha\rangle = \langle s_j(\alpha_i),\alpha\rangle - q\langle 2\rho,\alpha\rangle = \langle\alpha_i,\alpha\rangle + q\langle\alpha_j,\alpha\rangle - q\langle 2\rho,\alpha\rangle.$$
$$\langle\alpha_i-2Q,\alpha\rangle = \langle\alpha_i,\alpha\rangle - q\langle 2\rho,\alpha\rangle.$$

Il nous faut donc trouver : $\langle\alpha_i,\alpha\rangle$ et $q\langle 2\rho,\alpha\rangle$.

$$\langle\alpha_i,\alpha\rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } n=i, m=i+1 \\ 1 & \text{si } n=i, m>n, m\neq i+1 \text{ ou } m=i+1, n<m, n\neq i \\ -1 & \text{si } n=i+1, n<m \text{ ou } m=i, n<m \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$q\langle 2\rho,\alpha\rangle = 2q(m-n), n<m.$$

• pour $i<j$:

$$S = \sum_{\alpha>0}\left[\frac{\sinh(qb(\langle\alpha_j,\alpha\rangle)t)\sinh(2b(\langle\alpha_i,\alpha\rangle)t - 2q(m-n)bt + hbqt + bq(\langle\alpha_j,\alpha\rangle)t)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)}\right]$$

$$S = \left[\frac{\sinh(2bqt)\sinh(hbqt)}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)} \right].$$

$$G_{i-j} = 2\log(q) + \log(\gamma(\frac{q}{b})) + \log(\gamma((q)b)).$$

• pour $j = i+1$:

$$\langle s_{i+1}(\alpha_i), \alpha \rangle = \langle \alpha_i, \alpha \rangle + (1+q)\langle \alpha_{i+1}, \alpha \rangle.$$

$$\langle s_{i+1}(\alpha_i) - 2Q, \alpha \rangle = \langle \alpha_i, \alpha \rangle + (1+q)\langle \alpha_{i+1}, \alpha \rangle - q\langle 2\rho, \alpha \rangle.$$

Donc :

$$S = \sum_{\alpha>0} \left[\frac{\sinh(b(1+q)(\langle \alpha_{i+1}, \alpha \rangle)t)\sinh(2b(\langle \alpha_i, \alpha \rangle)t}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2q(m-n)bt + hbqt + b(1+q)(\langle \alpha_{i+1}, \alpha \rangle)t)}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)} \right]$$

$$S = \left[\frac{\sinh(2b(1+q)t)\sinh(hbqt)}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)} \right].$$

On est alors ramené à :

$$G_{1-2} = \log(\gamma((q+1)b)) + \log(\gamma((q+1)/b)) + 2\log(q+1).$$

• pour $j = i$:

$$\langle s_i(\alpha_i), \alpha \rangle = (q-1)\langle \alpha_i, \alpha \rangle$$

$$(1+q)\langle \alpha_i, \alpha \rangle.$$

$$\langle s_i(\alpha_i) - 2Q, \alpha \rangle = (q-1)\langle \alpha_i, \alpha \rangle - q\langle 2\rho, \alpha \rangle.$$

Alors :

$$S = \sum_{\alpha>0} \left[\frac{\sinh(b(\langle \alpha_i, \alpha \rangle)t - 2q(m-n)bt + hbqt)\sinh(b(q-2)(\langle \alpha_i, \alpha \rangle)t)}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh(qbht)} \right].$$

$$S = \frac{\sinh(hbqt)\sinh(2b(q-2)t)}{\sinh(b^2 t)\sinh(t)\sinh(qbht)}.$$

Donc, on est ramené alors au cas :

$$G_{1-1} = \log(\gamma((q-2)b)) + \log(\gamma((q-2)/b)) + 2\log(q-2).$$

Ainsi, la propriété est vérifiée. ♦

7.5 Valeur limite de la dérivée logarithmique

Théorème 7.5.1.

$$\lim_{b\to 0} b^2\partial_a \log G_F(a/b;b) = -\sum_{\alpha>0}\alpha\log(\gamma(\langle\rho-a,\alpha\rangle/h)) - 2a\log(1/h)\in V.$$

Démonstration.
On a :

$$F(a,b,t) = -\sinh((1+b^2)t)\sum_{\alpha>0}\frac{\sinh(b\langle a,\alpha\rangle t)\sinh((b\langle a-2Q,\alpha\rangle+h(1+b^2))t)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)}.$$

$$F(a/b,b,t) = -\sinh((1+b^2)t)\sum_{\alpha>0}\frac{\sinh(\langle a,\alpha\rangle t)\sinh((\langle a-2(1+b^2)\rho,\alpha\rangle+h(1+b^2))t)}{\sinh(b^2t)\sinh(t)\sinh((1+b^2)ht)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_0(a,t) := \lim_{b\to 0} b^2F(a/b,b,t) &= -\sum_{\alpha>0}\frac{\sinh(\langle a,\alpha\rangle t)\sinh((\langle a-2\rho,\alpha\rangle+h)t)}{t\sinh(t)} \\ &= -\sum_{\alpha>0}\frac{\sinh(\langle a-\rho,\alpha\rangle+h/2)t)^2-\sinh((\langle\rho,\alpha\rangle-h/2)t)^2}{t\sinh(t)}. \end{aligned}$$

On dérive :

$$\begin{aligned} \partial_a F_0(a,t) &= -\sum_{\alpha>0}\frac{2\alpha\sinh(\langle a-\rho,\alpha\rangle+h/2)t)\cosh((\langle a-\rho,\alpha\rangle+h/2)t)}{\sin(ht)} \\ &= -\sum_{\alpha>0}\frac{\alpha\sinh(2(\langle a-\rho,\alpha\rangle-h)t)}{\sin(ht)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{b\to 0} b^2\partial_a\log G_F(a/b;b) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{2ae^{-2t} - \sum_{\alpha>0}\frac{\alpha\sinh(2(\langle a-\rho,\alpha\rangle-h)t)}{\sin(ht)})\right\}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} b^2\partial_a\log G_F(a/b;b) &= -\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left\{-2ae^{-2t/h} - \sum_{\alpha>0}\frac{\alpha\sinh(2(\langle\rho-a,\alpha\rangle/h-1)t)}{\sin(t)})\right\} \\ &= -\sum_{\alpha>0}\alpha\log(\gamma(\langle\rho-a,\alpha\rangle/h)) - 2a\log(1/h). \end{aligned}$$

(en utilisant Kummer 1.2 et Frullani 1.2.1) ♦

Troisième partie

Formules de Fateev

Chapitre 8

Formule de Fateev

8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est double :
- d'une part de fournir une preuve du théorème 8.2.2(V.Fateev [Fat02], (66)) pour les systèmes simplement lacés, ie du type A, D, E,
- d'autre part de fournir également une preuve du théorème 8.4.1 pour les systèmes non simplement lacés, ie du type B, C, F, G, cf.[ABF$^+$00].

Fateev (cf.[Fat02]) ne donne pas de démonstration mathématique de son résultat, son argument repose sur des considérations physiques.

Remarque 8.1.1.
Il semble intéressant de noter que cette démonstration n'utilise que l'identité classique satisfaite par la fonction Gamma 1.1.11 à savoir :

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x+in) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nx+1/2} \Gamma(nx).$$

Notation 8.1.2. Les notations utilisées sont celles du chapitre 7, cf.7.1. On pose également :

$$k(R) := k := \prod_{i=1}^{l} n_i^{n_i/2h}.$$

On utilise les notations et les formules du livre de « Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie », cf.[Bou81] Chap. 4 à 6, ainsi que la liste des graphes cf. 10.1.

8.2 Formule de Fateev pour les systèmes du type A, D, E

Remarque 8.2.1. Considérons le 7.5.1, et plus particulièrement l'expression suivante :

$$-\sum_{\alpha>0} \alpha \log(\gamma(\langle \rho - a, \alpha \rangle / h)) - 2a \log(1/h),$$

en faisant $(\alpha_i|\alpha), a = 0$ et en prenant l'exponentielle, on obtient :

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{h}\right)^{\langle \alpha_i, \alpha \rangle},$$

qui est le premier membre de la formule de Fateev 8.2.2.

Théorème 8.2.2 (Formule de Fateev)**.** *Supposons que R est du type A, D, E. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant l$, on a :*

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{h}\right)^{\langle \alpha_i, \alpha \rangle} = n_i^{-1} k(R)^2.$$

On va vérifier la formule de Fateev cas par cas.

8.3 Démonstrations

8.3.1 Système du type $A_l, l \geqslant 1$:

Notation 8.3.1. On posera pour toute la suite :

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{h}\right)^{\langle \alpha_i, \alpha \rangle}.$$

$$R = A_l; h = l + 1; \theta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l, \text{donc } \ k = 1.$$

Base : $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \alpha_l = \epsilon_l - \epsilon_{l+1}$.
Nombre de racines : $n = l(l + 1)$.
Racines positives :

$$\epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k, (1 \leqslant i < j \leqslant l + 1).$$

Somme des racines positives :

$$2\rho = l\alpha_1 + 2(l - 1)\alpha_2 + \ldots + i(l - i + 1)\alpha_i + \ldots + l\alpha_l.$$

Notation 8.3.2.

$$\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j.$$

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}.$$

Démonstration.
•Voir en annexe B.1.1, on trouve :

$$\gamma(A_l,\alpha_1)=\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^2\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)...\gamma\left(\frac{l}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^{-1}\dots\gamma\left(\frac{l-1}{l+1}\right)^{-1}.$$

En utilisant

$$\gamma(\frac{l}{l+1})=\gamma(\frac{1}{l+1})^{-1},$$

puis de proche en proche

$$\gamma(\frac{2}{l+1})=\gamma(\frac{l-1}{l+1})^{-1},$$

on obtient :

$$\gamma(A_l,\alpha_1)=1=k^2.$$

•Voir en annexe B.1.2, on trouve :

$$\gamma(A_l,\alpha_2)=\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^2\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)\dots\times$$

$$\times\gamma\left(\frac{i-2}{l+1}\right)\dots\gamma\left(\frac{l-1}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)^{-1}\dots\gamma\left(\frac{i-3}{l+1}\right)^{-1}...\gamma\left(\frac{l-2}{l+1}\right)^{-1}.$$

En utilisant :

$$\gamma(\frac{l}{l+1})=\gamma(\frac{1}{l+1})^{-1},$$

puis de proche en proche

$$\gamma(\frac{2}{l+1})=\gamma(\frac{l-1}{l+1})^{-1},$$

on obtient :

$$\gamma(A_l,\alpha_2)=1=k^2.$$

•Voir en annexe B.1.3 le cas général : $1\leqslant i\leqslant l+1$.

On obtient :

$$\gamma(A_l,\alpha_i)=\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^2\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{3}{l+1}\right)\dots\gamma\left(\frac{l-i}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{l+1-i}{l+1}\right)\times$$

$$\times\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)^{-1}\dots\gamma\left(\frac{j-i-1}{l+1}\right)^{-1}\dots\gamma\left(\frac{l-i-1}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{l-i}{l+1}\right)^{-1}\times$$

$$\times\gamma\left(\frac{i-1}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{i-2}{l+1}\right)^{-1}\dots\gamma\left(\frac{i-j}{l+1}\right)^{-1}\dots.\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right)^{-1}\gamma\left(\frac{1}{l+1}\right)^{-1}\times$$

$$\times\gamma\left(\frac{i}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{i-1}{l+1}\right)\dots\gamma\left(\frac{i+1-j}{l+1}\right)\dots\gamma\left(\frac{3}{l+1}\right)\gamma\left(\frac{2}{l+1}\right).$$

En utilisant

$$\gamma(\frac{l+1-i}{l+1}) = \gamma(\frac{i}{l+1})^{-1},$$

puis de proche en proche on obtient :

$$\gamma(A_l, \alpha_i) = 1 = k^2.$$

D'où la formule 8.2.2 est vérifiée pour A_l. ♦

8.3.2 Système du type $D_l, l \geqslant 3$:

$$R = D_l; h = 2l-2; \theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l, \text{ donc } k = 2^{\frac{l-3}{2l-2}}.$$

Base : $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon_l, \alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l$.
Nombre de racines : $n = 2l(l-1)$.
Racines positives :

$$\epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k, \ (1 \leqslant i < j \leqslant l),$$

$$\epsilon_i + \epsilon_l = \sum_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_l, \ (1 \leqslant i < l),$$

$$\epsilon_i + \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leqslant k < l-1} \alpha_k + \alpha_{l-1} + \alpha_l \ (1 \leqslant i < j < l).$$

Somme des racines positives :

$$2\rho = 2(l-1)\alpha_1 + 2(2l-3)\alpha_2 + \ldots + 2\left(il - \frac{i(i+1)}{2}\right)\alpha_i + \ldots + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).$$

Notation 8.3.3.

$$\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j, \ \beta_{ij} = \epsilon_i + \epsilon_j.$$

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}.$$

Démonstration.
•Voir en annexe B.2.1, les racines positives α telles que $(\alpha_j|\alpha_i) \neq 0 : 1 \leqslant i < l$.

De là, pour $i \leqslant l-2$,

$$\gamma(D_l, \alpha_i) = \prod_{j=1}^{i-1} \gamma(\frac{i-j}{2l-2})^{-1} \prod_{j=1}^{i-1} \gamma(\frac{i-j+1}{2l-2}) \prod_{j=i+2}^{l} \gamma(\frac{j-i}{2l-2}) \prod_{j=i+2}^{l} \gamma(\frac{j-i-1}{2l-2})^{-1} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{i-1} \gamma(\frac{2l-i-j}{2l-2}) \prod_{j=1}^{i-1} \gamma(\frac{2l-i-j-1}{2l-2})^{-1} \prod_{j=i+2}^{l} \gamma(\frac{2l-i-j}{2l-2}) \times$$

$$\times \prod_{j=i+2}^{l} \gamma(\frac{2l-i-j-1}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{1}{2l-2})^2.$$

Soit :

Formule 8.3.4.

$$\gamma(D_l,\alpha_i) = \gamma(\frac{2l-2i-2}{2l-2})\gamma(\frac{l-i-1}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{2l-i-1}{2l-2})\times$$
$$\times\gamma(\frac{2l-2i}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{l-i}{2l-2})\gamma(\frac{i}{2l-2}).$$

- Voir en annexe B.2.2 , pour calculer $\gamma(D_l,\alpha_{l-1})$ et $\gamma(D_l,\alpha_l)$.

$$\gamma(D_l,\alpha_{l-1}) = \gamma(\frac{1}{2l-2})\gamma(\frac{2}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{l}{2l-2})\gamma(\frac{l-1}{2l-2}) = 1.$$
$$\gamma(D_l,\alpha_l) = \gamma(\frac{1}{2l-2})\gamma(\frac{2}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{1}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{l}{2l-2})\gamma(\frac{l-1}{2l-2}) = 1.$$

De plus :

$$n_i^{-1}k^2 = \begin{cases} 2^{\frac{l-3}{l-1}} & \text{si } i=1 \text{ ou } l-1 \text{ ou } l,\\ \frac{1}{2}\times 2^{\frac{l-3}{l-1}} = 2^{-\frac{2}{l-1}} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Reprenons la formule 8.3.4 ci-dessus, pour tout i $\leqslant l-2$, alors :

$$\gamma(D_l,\alpha_i) = \frac{\Gamma(\frac{2l-2i-2}{2l-2})}{\Gamma(\frac{2i}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{2l-i-1}{2l-2})}{\Gamma(\frac{i-1}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{l-i}{2l-2})}{\Gamma(\frac{l-2+i}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{i}{2l-2})}{\Gamma(\frac{2l-2-i}{2l-2})}.$$

D'après les formules de duplication pour la fonction Γ 1.1.12, on a alors :

$$\gamma(D_l,\alpha_i) = \frac{\Gamma(\frac{l-i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{2l-i-2}{2l-2})2^{-2i/(2l-2)}}{\Gamma(\frac{i}{2l-2})\Gamma(\frac{i+l-1}{2l-2})2^{-2(l-i-1)/(2l-2)}}\frac{\Gamma(\frac{i}{2l-2})}{\Gamma(\frac{2l-2-i}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{l+i-1}{2l-2})}{\Gamma(\frac{l-i-1}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{2i-2}{2l-2})}{\Gamma(\frac{2l-2-i}{2l-2})}.$$

$$\gamma(D_l,\alpha_i) = \frac{\Gamma(\frac{l-i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{2l-i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{l-i}{2l-2})2^{(2l-2-4i)/(2l-2)}}{\Gamma(\frac{l+i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{l-2+i}{2l-2})}\frac{\Gamma(\frac{i-1}{2l-2})\Gamma(\frac{l+i-2}{2l-2})2^{(-2l+2i)/(2l-2)}}{\Gamma(\frac{l-i}{2l-2})\Gamma(\frac{2l-i-1}{2l-2})2^{(-2i+2)/(2l-2)}}.$$

D'où :

$$\gamma(D_l,\alpha_i) = 2^{\frac{-4}{2l-2}} = 2^{\frac{-2}{l-1}}.$$

- Cas α_l,α_{l-1} :

$$\gamma(D_l,\alpha_l) = \gamma(D_l,\alpha_{l-1}) = \gamma(\frac{1}{2l-2})\gamma(\frac{l}{2l-2})\gamma(\frac{2}{2l-2})^{-1}\gamma(\frac{l-1}{2l-2}).$$

Or :

$$\gamma(\frac{l-1}{2l-2}) = 1.$$

Et en utilisant là encore, les formules de duplication pour la fonction Γ 1.1.12 :

$$\gamma(D_l, \alpha_{l-1}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2l-2})\Gamma(\frac{l}{2l-2})\Gamma(\frac{2l-4}{2l-2})}{\Gamma(\frac{2l-3}{2l-2})\Gamma(\frac{l-2}{2l-2})\Gamma(\frac{2}{2l-2})}.$$

$$\gamma(D_l, \alpha_{l-1}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2l-2})\Gamma(\frac{l}{2l-2})\Gamma(\frac{l-2}{2l-2})\Gamma(\frac{l-2}{2l-2}+\frac{1}{2})2^{-2/(2l-2)}}{\Gamma(\frac{2l-3}{2l-2})\Gamma(\frac{l-2}{2l-2})\Gamma(\frac{1}{2l-2})\Gamma(\frac{1}{2l-2}+\frac{1}{2})2^{(-2l+4)/(2l-2)}}.$$

$$\gamma(D_l, \alpha_{l-1}) = 2^{\frac{2l-6}{2l-2}} = 2^{\frac{l-3}{l-1}}.$$

D'où là encore, 8.2.2 est vérifiée. ♦

Exemple 8.3.5. le cas de D_3 (cf. annexe B.2.3).
On obtient le tableau récapitulatif suivant :

$\gamma(D_3, \alpha_1) =$	$\gamma(1/2)$	$= 1$
$\gamma(D_3, \alpha_2) =$	$\gamma(3/4)\gamma(1/4)$	$= 1$
$\gamma(D_3, \alpha_3) =$	$\gamma(3/4)\gamma(1/4)$	$= 1$

Exemple 8.3.6. le cas de D_4 (cf. annexe B.2.5).
On obtient le tableau récapitulatif suivant :

$\gamma(D_4, \alpha_1) =$	$\gamma(2/3)\gamma(1/6)\gamma(1/3)^{-1}$	$= 2^{1/3}$
$\gamma(D_4, \alpha_2) =$	$\gamma(1/3)^4\gamma(1/6)^{-2}$	$= 2^{-2/3}$
$\gamma(D_4, \alpha_3) =$	$\gamma(1/3)^{-1}2^{1/3}\gamma(1/3)^2\gamma(2/3)$	$= 2^{1/3}$
$\gamma(D_4, \alpha_4) =$	$\gamma(1/3)^2 2^{1/3}\gamma(1/3)^{-2}$	$= 2^{1/3}$

Exemple 8.3.7. le cas de D_5 (cf. annexe B.2.6).
On obtient le tableau récapitulatif suivant :

$\gamma(D_5, \alpha_1) =$	$\gamma(3/4)\gamma(1/8)\gamma(3/8)^{-1}$	$= 2^{1/2}$
$\gamma(D_5, \alpha_2) =$	$\gamma(7/8)\gamma(3/8)\gamma(3/4)^{-1}$	$= 2^{-1/2}$
$\gamma(D_5, \alpha_3) =$	$\gamma(1/8)^{-1}\gamma(3/8)\gamma(3/4)^{-1}$	$= 2^{-1/2}$
$\gamma(D_5, \alpha_4) =$	$\gamma(1/8)\gamma(5/8)\gamma(1/4)^{-1}$	$= 2^{1/2}$
$\gamma(D_5, \alpha_5) =$	$\gamma(1/8)\gamma(5/8)\gamma(1/4)^{-1}$	$= 2^{1/2}$

8.3.3 Système du type E_6 :

$$R = E_6\,; h = 12\,; \theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6.$$

Donc :

$$k = 2^{1/4}3^{1/8}, k^2 = 2^{1/2}3^{1/4}.$$

Base :

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_1+\epsilon_8}{2} - \sum_{i=2}^{7}\frac{\epsilon_i}{2}, \alpha_2 = \epsilon_1+\epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_2-\epsilon_1, \alpha_4 = \epsilon_3-\epsilon_2, \alpha_5 = \epsilon_4-\epsilon_3, \alpha_6 = \epsilon_5+\epsilon_4.$$

Nombre de racines : $n = 72$,

i	$n_i^{-1}k^2$
$i=1$	$2^{1/2}3^{1/4}$
$i=2$	$2^{-1/2}3^{1/4}$
$i=3$	$2^{-1/2}3^{1/4}$
$i=4$	$2^{1/2}3^{-1/4}$
$i=5$	$2^{-1/2}3^{1/4}$
$i=6$	$2^{1/2}3^{1/4}$

Racines positives :

$$\pm\epsilon_i + \epsilon_j, (1 \leqslant i < j \leqslant 5),$$

$$\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i, (\text{avec} \sum_{i=1}^{5}\nu(i)\text{pair}).$$

Somme des racines positives :

$$\rho = \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 3\epsilon_4 + 4\epsilon_5 + 4\epsilon_8 - 4\epsilon_7 - 4\epsilon_6.$$

Notation 8.3.8.

$$\beta = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6).$$

$$(\beta|\rho) = 6\,; (\beta|\alpha_1) = 3/4.$$

Démonstration.

• Cas $i = 1$ (cf. annexe B.3.1). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \gamma(\frac{1}{12})\gamma(\frac{8}{12})\gamma(\frac{3}{12})^{-1} = \gamma(\frac{1}{12})\gamma(\frac{2}{3})\gamma(\frac{1}{4})^{-1}.$$

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})}{\Gamma(\frac{11}{12})}\frac{\Gamma(\frac{8}{12})}{\Gamma(\frac{4}{12})}\frac{\Gamma(\frac{9}{12})}{\Gamma(\frac{3}{12})}.$$

Or d'après la formule 1.1.11 du produit sur la fonction Γ avec $n = 3$:

$$2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{3}{12}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{9}{12}).$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \frac{2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{8}{12})}{\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(\frac{4}{12})}.$$

Et d'après la formule 1.1.12 de duplication :

$$2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{5}{6}) = \Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12}).$$

Et

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{2}{3}) = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6}).$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \frac{2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{2}{3})}{2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{1}{3})} = 2^{1/2}3^{1/4}.$$

- Cas $i = 2$ (cf. annexe B.3.2). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_2) = \gamma(\frac{5}{12})\gamma(\frac{1}{3})\gamma(\frac{1}{4})^{-1}.$$

Or :

$$2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{3}{12}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{9}{12}).$$

$$2^{5/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1}{6}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{7}{12}).$$

$$\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6}) = 2\pi.$$

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{2}{3}) = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6}).$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_2) = \frac{2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{7}{12})\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{5/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{5/6}\pi^{1/2}2\pi\Gamma(\frac{2}{3})} = 2^{-1/2}3^{1/4}.$$

- Cas $i = 3$ (cf. annexe B.3.3). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_3) = \gamma(\frac{5}{12})\gamma(\frac{1}{3})\gamma(\frac{1}{4})^{-1} = \gamma(E_6, \alpha_1) = 2^{-1/2}3^{1/4}.$$

- Cas $i = 4$ (cf. annexe B.3.4). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_4) = \gamma(\frac{1}{4})^3\gamma(\frac{1}{3})^{-1}\gamma(\frac{1}{12})^{-1}\gamma(\frac{5}{12})^{-2}.$$

Or :

$$2\pi 3^{-1/4}\Gamma(\frac{3}{4}) = \Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{7}{12})\Gamma(\frac{11}{12}).$$

$$2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{10}{12}) = \Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12}).$$

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{2}{3}) = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{6}).$$

Donc :

$$\gamma(E_6, \alpha_4) = 2^{1/2}3^{-3/4}.$$

- Cas $i = 5$ (cf. annexe B.3.5). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_5) = \gamma(\frac{5}{12})\gamma(\frac{1}{3})\gamma(\frac{1}{4})^{-1} = \gamma(E_6, \alpha_2) = 2^{-1/2}3^{1/4}.$$

- Cas $i = 6$ (cf. annexe B.3.6). On obtient :

$$\gamma(E_6, \alpha_6) = \gamma(\frac{1}{12})\gamma(\frac{2}{3})\gamma(\frac{1}{4})^{-1} = \gamma(E_6, \alpha_1) = 2^{1/2}3^{1/4}.$$

d'où la formule 8.2.2 vérifiée pour E_6. ♦

8.3.4 Système du type E_7

$$R = E_7\,;h = 18\,;\theta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7.$$

Donc :

$$k = 2^{1/6}3^{1/6}4^{1/9}, k^2 = 2^{1/3}3^{1/3}4^{2/9} = 2^{7/9}3^{1/3}.$$

Base :

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_8}{2} - \sum_{i=2}^{7} \frac{\epsilon_i}{2}, \alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5.$$

Nombre de racines : $n = 126$,

i	$n_i^{-1}k^2$
$i=1$	$2^{-2/9}3^{1/3}$
$i=2$	$2^{-2/9}3^{1/3}$
$i=3$	$2^{7/9}3^{-2/3}$
$i=4$	$2^{-11/18}3^{1/3}$
$i=5$	$2^{7/9}3^{-2/3}$
$i=6$	$2^{-2/9}3^{1/3}$
$i=7$	$2^{7/9}3^{1/3}$

Racines positives :

$$\pm\epsilon_i + \epsilon_j, (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \epsilon_8 - \epsilon_7,$$

$$\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i), (\text{avec} \sum_{i=1}^{6}\nu(i) \text{impair}).$$

Somme des racines positives :

$$\rho = \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 3\epsilon_4 + 4\epsilon_5 + 5\epsilon_6 - 17/2\epsilon_7 + 17/2\epsilon_8.$$

Notation 8.3.9.

$$\beta = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7).$$

$$(\beta|\rho) = 17/2\,;(\beta|\alpha_1) = 1/2.$$

Démonstration.
• Cas $i = 1$ (cf.annexe B.4.1). On obtient :

$$\gamma(E_7, \alpha_1) = \gamma(\frac{6}{18})\gamma(\frac{8}{18})\gamma(\frac{10}{18})\gamma(\frac{16}{18})^{-1}\gamma(\frac{17}{18})\gamma(\frac{3}{18})^{-1}\gamma(\frac{5}{18})^{-1}\gamma(\frac{1}{18}).$$

$$\gamma(E_7, \alpha_1) = \gamma(\frac{2}{18})\gamma(\frac{3}{18})^{-1}\gamma(\frac{5}{18})^{-1}\gamma(\frac{6}{18}).$$

$$\gamma(E_7, \alpha_1) = \gamma(\frac{1}{9})\gamma(\frac{1}{6})^{-1}\gamma(\frac{5}{18})^{-1}\gamma(\frac{1}{3}).$$

Or, utilisant 1.1.11, on a :

Résultat 8.3.10.

$$\Gamma(\frac{6}{18}) = (2\pi)^{-1}3^{-1/6}\Gamma(\frac{2}{18})\Gamma(\frac{8}{18})\Gamma(\frac{14}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{12}{18}) = (2\pi)^{-1}3^{1/6}\Gamma(\frac{4}{18})\Gamma(\frac{10}{18})\Gamma(\frac{16}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{3}{18}) = (2\pi)^{-1}3^{-1/3}\Gamma(\frac{1}{18})\Gamma(\frac{7}{18})\Gamma(\frac{13}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{15}{18}) = (2\pi)^{-1}3^{1/3}\Gamma(\frac{5}{18})\Gamma(\frac{11}{18})\Gamma(\frac{17}{18}).$$

Et : 1.1.12

Résultat 8.3.11.

$$\Gamma(\frac{2}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-8/9}\Gamma(\frac{1}{18})\Gamma(\frac{10}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{16}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-1/9}\Gamma(\frac{8}{18})\Gamma(\frac{17}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{4}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-7/9}\Gamma(\frac{2}{18})\Gamma(\frac{11}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{14}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-2/9}\Gamma(\frac{7}{18})\Gamma(\frac{16}{18}).$$

Ainsi :

$$\gamma(E_7, \alpha_1) = 3^{1/3}2^{-2/9}.$$

- Cas $i = 2$ (cf.annexe B.4.2). On obtient :

$$\gamma(E_7, \alpha_2) = \gamma(\frac{1}{18})\gamma(\frac{10}{18})^{-1}\gamma(\frac{2}{18})^{-1}\gamma(\frac{3}{18})^{-1}\gamma(\frac{7}{18})\gamma(\frac{14}{18})\gamma(\frac{6}{18})\gamma(\frac{5}{18}).$$

On utilise 8.3.10 et, avec 1.1.12, on a :

Résultat 8.3.12.

$$\Gamma(\frac{2}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-8/9}\Gamma(\frac{1}{18})\Gamma(\frac{10}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{16}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-1/9}\Gamma(\frac{8}{18})\Gamma(\frac{17}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{4}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-7/9}\Gamma(\frac{2}{18})\Gamma(\frac{11}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{14}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-2/9}\Gamma(\frac{7}{18})\Gamma(\frac{16}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{8}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-5/9}\Gamma(\frac{4}{18})\Gamma(\frac{13}{18}).$$

$$\Gamma(\frac{10}{18}) = \pi^{-1/2}2^{-4/9}\Gamma(\frac{5}{18})\Gamma(\frac{14}{18}).$$

Ainsi :

$$\gamma(E_7,\alpha_2)=2^{-2/9}3^{1/3}=\gamma(E_7,\alpha_1).$$

• Cas $i=3$ (cf.annexe B.4.3). On obtient :

$$\gamma(E_7,\alpha_3)=\gamma(\frac{5}{18})\gamma(\frac{11}{18})\gamma(\frac{16}{18})\gamma(\frac{15}{18})^{-1}\gamma(\frac{8}{18})^{-1}.$$

Or, d'après les calculs précédents 8.3.10 et 8.3.12 :

$$2\pi 3^{-1/3}\Gamma(\frac{15}{18})=\Gamma(\frac{5}{18})\Gamma(\frac{11}{18})\Gamma(\frac{17}{18}).$$

$$2\pi 3^{1/3}\Gamma(\frac{3}{18})=\Gamma(\frac{1}{18})\Gamma(\frac{7}{18})\Gamma(\frac{13}{18}).$$

$$2^{8/9}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1}{9})=\Gamma(\frac{1}{18})\Gamma(\frac{5}{9}).$$

$$2^{1/9}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{8}{9})=\Gamma(\frac{4}{9})\Gamma(\frac{17}{18}).$$

Ainsi :

$$\gamma(E_7,\alpha_3)=2^{7/9}3^{-2/3}.$$

• Cas $i=4$ (cf.annexe B.4.4). On obtient :

$$\gamma(E_7,\alpha_4)=\gamma(\frac{8}{18})\gamma(\frac{12}{18})\gamma(\frac{15}{18})\gamma(\frac{14}{18})^{-1}\gamma(\frac{1}{18})^{-1}\gamma(\frac{7}{18})\gamma(\frac{3}{18})\gamma(\frac{2}{18})\gamma(\frac{5}{18})^{-1}.$$

$$\gamma(E_7,\alpha_4)=\gamma(\frac{8}{18})\gamma(\frac{12}{18})\gamma(\frac{14}{18})^{-1}\gamma(\frac{1}{18})^{-1}\gamma(\frac{7}{18})\gamma(\frac{2}{18})\gamma(\frac{5}{18})^{-1}.$$

Or, utilisant 8.3.10, les deux premiers résultats et 8.3.12, on a :

$$\gamma(E_7,\alpha_4)=2^{-11/9}3^{1/3}.$$

• Cas $i=5$ (cf. annexe B.4.5). On obtient :

$$\gamma(E_7,\alpha_5)=\gamma(\frac{5}{18})\gamma(\frac{10}{18})\gamma(\frac{3}{18})\gamma(\frac{7}{18})^{-1}\gamma(\frac{2}{18})^{-1}=\gamma(E_7,\alpha_3)=2^{7/9}3^{-2/3}.$$

• Cas $i=6$ (cf. annexe B.4.6). On obtient :

$$\gamma(E_7,\alpha_6)=\gamma(\frac{13}{18})\gamma(\frac{2}{18})\gamma(\frac{6}{18})\gamma(\frac{3}{18})^{-1}=\gamma(E_7,\alpha_1)=2^{-2/9}3^{1/3}.$$

• Cas $i=7$ (cf. annexe B.4.7).
En utilisant les deux premiers résultats de 8.3.10 et de 8.3.12 :

$$\gamma(E_7,\alpha_7)=\gamma(\frac{12}{18})\gamma(\frac{1}{18})\gamma(\frac{4}{18})^{-1}=2^{7/9}3^{1/3}.$$

d'où la formule 8.2.2 vérifiée pour le système E_7. ♦

8.3.5 Système du type E_8

$$R = E_8\,;h = 30\,;\theta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8.$$

Donc :

$$k = 2^{13/30}3^{1/5}5^{1/12}, k^2 = 2^{13/15}3^{2/5}5^{1/6}.$$

Base :

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_8}{2} - \sum_{i=2}^{7}\frac{\epsilon_i}{2}, \alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3,$$

$$\alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5; \alpha_8 = \epsilon_7 - \epsilon_6.$$

Nombre de racines : $n = 240$,

i	$n_i^{-1}k^2$
$i = 1$	$2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6}$
$i = 2$	$2^{13/15}3^{-3/5}5^{1/6}$
$i = 3$	$2^{-17/15}3^{2/5}5^{1/6}$
$i = 4$	$2^{-2/15}3^{-3/5}5^{1/6}$
$i = 5$	$2^{13/15}3^{2/5}5^{-5/6}$
$i = 6$	$2^{-17/15}3^{2/5}5^{1/6}$
$i = 7$	$2^{13/15}3^{-3/5}5^{1/6}$
$i = 8$	$2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6}$

Racines positives :

$$\pm\epsilon_i + \epsilon_j, (1 \leqslant i < j \leqslant 8),$$

$$\frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i), (\text{avec} \sum_{i=1}^{7}\nu(i)\text{pair}).$$

Somme des racines positives :

$$\rho = \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 3\epsilon_4 + 4\epsilon_5 + 5\epsilon_6 + 6\epsilon_7 + 23\epsilon_8.$$

Notation 8.3.13.

$$\beta = \frac{1}{2}\epsilon_8.$$

$$(\beta|\rho) = 23/2\,; (\beta|\alpha_1) = 1/4.$$

Démonstration.

• Cas $i = 1$ (cf. annexe B.5.1). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = \gamma(\frac{1}{30})\gamma(\frac{23}{30})\gamma(\frac{3}{30})^{-1}\gamma(\frac{5}{30})^{-1}\gamma(\frac{16}{30})^{-1}\gamma(\frac{8}{30})\gamma(\frac{12}{30})\gamma(\frac{10}{30}).$$

Or utilisant 1.1.11 pour $n = 5$ et $n = 3$, on a les résultats suivants :

Résultat 8.3.14.

$$\Gamma(\frac{5}{30}) = (2\pi)^{-2}5^{-1/3}\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{25}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{10}{30}) = (2\pi)^{-2}5^{-1/6}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{20}{30})\Gamma(\frac{26}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{20}{30}) = (2\pi)^{-2}5^{1/6}\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{10}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{25}{30}) = (2\pi)^{-2}5^{1/3}\Gamma(\frac{5}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

Résultat 8.3.15.

$$\Gamma(\frac{3}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{-2/5}\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{21}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{6}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{-3/10}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{12}{30})\Gamma(\frac{22}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{9}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{-1/5}\Gamma(\frac{3}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{23}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{12}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{-1/10}\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{24}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{18}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{1/10}\Gamma(\frac{6}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{26}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{24}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{1/10}\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{18}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{27}{30}) = (2\pi)^{-1}3^{2/5}\Gamma(\frac{9}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

Et avec 1.1.12 :

Résultat 8.3.16.

$$\Gamma(\frac{2}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-14/15}\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{16}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{4}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-13/15}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{17}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{8}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-11/15}\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{19}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{14}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-8/15}\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{22}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{16}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-7/15}\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{23}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{22}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-4/15}\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{26}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{26}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-2/15}\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{28}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-1/15}\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

Et donc les résultats suivants :

Résultat 8.3.17.

$$\frac{\Gamma(\frac{10}{30})}{\Gamma(\frac{20}{30})} = \Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{26}{30})(2\pi)^{-2}5^{-1/6}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{25}{30})}{\Gamma(\frac{5}{30})} = (2\pi)^{-2}5^{1/3}\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

$$\frac{\Gamma(\frac{27}{30})}{\Gamma(\frac{3}{30})} = \Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30})(2\pi)^{-2}3^{1/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{12}{30})}{\Gamma(\frac{18}{30})} = \Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{28}{30})(2\pi)^{-2}3^{1/5}.$$

On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = 3^{2/5}5^{1/6}(2^{-4}\pi^{-4})^2\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{23}{30})^3\Gamma(\frac{14}{30})^3\Gamma(\frac{8}{30})^3\times$$

$$\times\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30})\times$$

$$\times\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{7}{30})^{-1}\Gamma(\frac{16}{30})^{-1}\Gamma(\frac{22}{30})^{-1}.$$

puis on remplace, grâce à 8.3.16, les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{1}{30}), \Gamma(\frac{23}{30}), \Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}).$$

On a alors :

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = 2^{-62/15}3^{2/5}5^{1/6}\pi^{-4}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

Sachant que grâce à 8.3.14 :

$$\Gamma(\frac{10}{30})\times\Gamma(\frac{20}{30}) = (2\pi)^{-4}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{20}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{10}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

On a que :

$$\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{28}{30}) = (2\pi)^4.$$

D'où :

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = 2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6}.$$

- Cas $i = 2$ (cf.annexe B.5.2). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_2) = \gamma(\frac{1}{30})\gamma(\frac{6}{30})\gamma(\frac{7}{30})\gamma(\frac{8}{30})\gamma(\frac{17}{30})\gamma(\frac{15}{30})\gamma(\frac{24}{30})\times$$

$$\times\gamma(\frac{2}{30})^{-1}\gamma(\frac{3}{30})^{-1}\gamma(\frac{10}{30})^{-1}\gamma(\frac{12}{30})^{-1}\gamma(\frac{21}{30})^{-1}.$$

Or, réutilisant 8.3.15 et 8.3.14, on a :

Résultat 8.3.18.

$$\frac{\Gamma(\frac{20}{30})}{\Gamma(\frac{10}{30})} = (2\pi)^{-2}5^{1/6}\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

$$\frac{\Gamma(\frac{27}{30})}{\Gamma(\frac{3}{30})} = \Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30})(2\pi)^{-2}3^{1/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{9}{30})}{\Gamma(\frac{21}{30})} = \Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{29}{30}))^{-1}(2\pi)^{2}3^{-3/5}.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{18}{30})}{\Gamma(\frac{12}{30})} = \Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{28}{30}))^{-1}(2\pi)^{2}3^{-1/5}.$$

On obtient :

$$\gamma(E_8,\alpha_2) = 3^{-3/5}5^{1/6}\frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}{\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{2}{30})}.$$

Et avec 8.3.16 :

$$\Gamma(\frac{2}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-14/15}\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{16}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{28}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-1/15}\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

D'où :

$$\gamma(E_8,\alpha_2) = 2^{13/15}3^{-3/5}5^{1/6}.$$

- Cas $i=3$ (cf. annexe B.5.4). On obtient :

$$\gamma(E_8,\alpha_3) = \gamma(\frac{20}{30})\gamma(\frac{24}{30})\gamma(\frac{13}{30})\gamma(\frac{7}{30})\gamma(\frac{11}{30})\gamma(\frac{15}{30})^{-1}\gamma(\frac{8}{30})^{-1}\gamma(\frac{22}{30})^{-1}.$$

Or, avec 8.3.14 et 8.3.15 on a :

Résultat 8.3.19.

$$\frac{\Gamma(\frac{20}{30})}{\Gamma(\frac{10}{30})} = (2\pi)^{-2}5^{1/6}\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

$$\frac{\Gamma(\frac{24}{30})}{\Gamma(\frac{6}{30})} = (2\pi)^{2}3^{2/5}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{22}{30}).$$

Ainsi :

$$\gamma(E_8,\alpha_3) = 3^{2/5}5^{1/6}\frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{11}{30})}{\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})}.$$

Puis on remplace, grâce à 8.3.16, les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{23}{30}),\Gamma(\frac{11}{30}),\Gamma(\frac{17}{30}),\Gamma(\frac{13}{30}),\Gamma(\frac{19}{30}),\Gamma(\frac{7}{30}).$$

D'où :

$$\gamma(E_8,\alpha_3) = 2^{-17/15}3^{2/5}5^{1/6}.$$

- Cas $i = 4$ (cf. annexe B.5.6). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_4) = \gamma(\frac{2}{30})\gamma(\frac{3}{30})\gamma(\frac{25}{30})\gamma(\frac{11}{30})^{-1}\gamma(\frac{20}{30})^{-1}\times$$
$$\times\gamma(\frac{24}{30})^{-1}\gamma(\frac{1}{30})^{-1}\gamma(\frac{4}{30})^{-1}.$$

Or, réutilisant 8.3.14, 8.3.15, 8.3.17 et 8.3.18, on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_4) = 3^{-3/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}\frac{\Gamma(\frac{2}{30})^2\Gamma(\frac{26}{30})^2\Gamma(\frac{14}{30})^2\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{17}{30})}{\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}.$$

Puis on remplace, grâce à 8.3.16, les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{1}{30}).$$

Ainsi :

$$\gamma(E_8, \alpha_4) = 3^{-3/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}2^{-2/15}\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{28}{30}).$$

Ce qui donne :

$$\gamma(E_8, \alpha_4) = 2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}(2\pi)^4 = 2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6}.$$

- Cas $i = 5$ (cf. annexe B.5.8). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_5) = \gamma(\frac{11}{30})\gamma(\frac{7}{30})^{-1}\gamma(\frac{8}{30})^{-1}\gamma(\frac{13}{30})^{-1}\gamma(\frac{16}{30})\times$$
$$\times\gamma(\frac{4}{30})\gamma(\frac{6}{30})^{-1}\gamma(\frac{2}{30})^{-1}\gamma(\frac{20}{30})^{-1}\gamma(\frac{25}{30})^{-2}.$$

Or, utilisant les résultats cités précédemment 8.3.17 et 8.3.19, on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_5) = 3^{2/5}5^{-5/6}(2\pi)^4\frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{8}{30})}{\Gamma(\frac{19}{30}\frac{7}{30})\Gamma(\frac{13}{30})\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30})^2}.$$

Puis on remplace, grâce à 8.3.16, les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}), \Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{23}{30}).$$

D'où :

$$\gamma(E_8, \alpha_5) = 3^{2/5}5^{-5/6}2^{4-47/15}\pi^4\pi^{-4} = 2^{13/15}3^{2/5}5^{-5/6}.$$

- Cas $i = 6$ (cf.annexe B.5.10). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_6) = \gamma(\frac{27}{30})\gamma(\frac{20}{30})\gamma(\frac{14}{30})\gamma(\frac{13}{30})\gamma(\frac{6}{30})\gamma(\frac{9}{30})^{-1}\gamma(\frac{15}{30})^{-1}\gamma(\frac{26}{30})^{-1}.$$

Or, utilisant les résultats cités précédemment 8.3.18 et 8.3.19, on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_6) = 3^{2/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}\frac{\Gamma(\frac{13}{30})^2\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{19}{30})^2\Gamma(\frac{29}{30})^2\Gamma(\frac{4}{30})^2\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{22}{30})\Gamma(\frac{7}{30})}{\Gamma(\frac{8}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{26}{30})^2}.$$

Puis on remplace, grâce à 8.3.16 les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{13}{30}), \Gamma(\frac{19}{30}), \Gamma(\frac{7}{30}), \Gamma(\frac{23}{30}).$$

D'où :

$$\gamma(E_8, \alpha_6) = 3^{2/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}\pi^4 2^{43/15} = 2^{-17/15}3^{2/5}5^{1/6} = \gamma(E_8, \alpha_3).$$

- Cas $i = 7$ (cf.annexe B.5.12). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_7) = \gamma(\frac{9}{30})\gamma(\frac{19}{30})\gamma(\frac{4}{30})^{-1}\gamma(\frac{10}{30})^{-1}\gamma(\frac{14}{30})^{-1}\gamma(\frac{18}{30})^{-1}\gamma(\frac{27}{30})^{-1}.$$

Or, utilisant 8.3.18, on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_7) = 3^{-3/5}5^{1/6}\frac{\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})\Gamma(\frac{1}{30})}{\Gamma(\frac{29}{30})\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{14}{30})}.$$

Et sachant que :

$$\Gamma(\frac{2}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-14/15}\Gamma(\frac{1}{30})\Gamma(\frac{16}{30}).$$

$$\Gamma(\frac{28}{30}) = \pi^{-1/2}2^{-1/15}\Gamma(\frac{14}{30})\Gamma(\frac{29}{30}).$$

On a :

$$\gamma(E_8, \alpha_7) = 2^{13/15}3^{-3/5}5^{1/6} = \gamma(E_8, \alpha_2).$$

- Cas $i = 8$ (cf. annexe B.5.13). On obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_8) = \gamma(\frac{14}{30})\gamma(\frac{18}{30})\gamma(\frac{28}{30})^{-1}\gamma(\frac{5}{30})^{-1}\gamma(\frac{10}{30})\gamma(\frac{9}{30})^{-1}.$$

Or, avec 8.3.17 et 8.3.18, on obtient :

$$\gamma(E_8, \alpha_8) = 3^{2/5}5^{1/6}(2\pi)^{-4}\frac{\Gamma(\frac{2}{30})\Gamma(\frac{26}{30})\Gamma(\frac{11}{30})\Gamma(\frac{17}{30})^2\Gamma(\frac{23}{30})\Gamma(\frac{29}{30})^2\Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{19}{30})\Gamma(\frac{14}{30})}{\Gamma(\frac{4}{30})\Gamma(\frac{16}{30})\Gamma(\frac{28}{30})}.$$

On remplace, grâce à 8.3.16, les expressions suivantes :

$$\Gamma(\frac{11}{30}), \Gamma(\frac{17}{30}), \Gamma(\frac{23}{30}), \Gamma(\frac{29}{30}), \Gamma(\frac{7}{30})\Gamma(\frac{19}{30}).$$

Alors :

$$\gamma(E_8, \alpha_8) = 2^{-2/15}3^{2/5}5^{1/6} = \gamma(E_8, \alpha_1).$$

Ainsi la formule 8.2.2 est vérifiée pour le système E_8. ♦

8.4 Formule de Fateev pour les systèmes B, C, F, G

Voici le deuxième théorème de ce chapitre, cf. [ABF$^+$00].
Les notations utilisées sont celles du chapitre 7, cf.7.1.

Théorème 8.4.1. *pour tout $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant l$, on a :*

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{(\alpha|\rho^\vee)}{h}\right)^{-(\alpha_i|\alpha^\vee)} = n_i^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h}. \qquad (F')$$

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{(\alpha|\rho)}{h^\vee}\right)^{-(\alpha_i^\vee|\alpha)} = n_i^\vee \alpha_i^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee}. \qquad (F'')$$

8.4.1 Système du type $B_l, l \geqslant 2$:

$n = 2l^2\,; h = 2l\,; \theta = -\alpha_0 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_l;$
$2\rho = (2l-1)\epsilon_1 + (2l-3)\epsilon_2 + \ldots + (2l-2i+1)\epsilon_i + 3\epsilon_{l-1} + \epsilon_l.$
Base : pour tout $1 \leqslant i \leqslant l-1$,

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}\,; \alpha_l = \epsilon_l.$$

Racines positives :

$$\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l,$$
$$\epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l,$$
$$\epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l.$$

On a :

$$h^\vee = 2l-1, \alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i|\alpha_i)}.$$
$$n_i = 2, 2 \leqslant i \leqslant l, n_0 = n_1 = 1.$$

Donc pour la base duale :

$$\alpha_1^\vee = \alpha_1, \ldots, \alpha_i^\vee = \alpha_i, \ldots, \alpha_l^\vee = 2\alpha_l.$$

Pour les racines positives duales :

$$\epsilon_i^\vee = 2\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l,$$
$$(\epsilon_i - \epsilon_j)^\vee = \epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l,$$
$$(\epsilon_i + \epsilon_j)^\vee = \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l.$$

D'où :

$$2\rho^\vee = l\epsilon_1 + (l-1)\epsilon_2 + \ldots + (l-i+1)\epsilon_i + \ldots + 2\epsilon_{l-1} + \epsilon_l.$$

Calcul des $n_i^\vee$ on a :

$$n_i^\vee = \frac{n_i \alpha_i^2}{2},\ 0 \leqslant i \leqslant l.$$

D'où :

$$n_i^\vee = n_i = 2,\ 2 \leqslant i \leqslant l-1,\ n_0^\vee = n_1^\vee = n_l^\vee = 1.$$

Donc pour la formule (F") :

$$n_i^\vee \alpha_i^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{\frac{4}{2l-1}},\ 2 \leqslant i \leqslant l-1.$$

$$n_1^\vee \alpha_1^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{\frac{5-2l}{2l-1}}.$$

$$n_l^\vee \alpha_l^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{\frac{6-4l}{2l-1}}.$$

Pour la formule (F') :

$$n_i^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h} = 2^{\frac{4-2l+h}{h}},\ 2 \leqslant i \leqslant l-1.$$

$$n_l^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h} = n_1^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h} = 2^{\frac{4-2l}{h}}.$$

Démonstration.
Vérifions la formule (F').
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.1.1.) On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{l}{2l}\Big)^{-2} \gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)^{2} \gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2} \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{l} \gamma\Big(\frac{j-1}{2l}\Big)^{-1} \prod_{j=3}^{l} \gamma\Big(\frac{j-2}{2l}\Big) \prod_{j=3}^{l} \gamma\Big(\frac{2l-j+1}{2l}\Big)^{-1} \prod_{j=3}^{l} \gamma\Big(\frac{2l-j}{2l}\Big).$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2}{2l}\Big) = \gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1} = 2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+1}{2l}\Big)\pi^{-1/2} 2^{\frac{2-2l}{2l}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-1}{2l}\Big)\pi^{-1/2} 2^{\frac{-2}{2l}}.$$

Et :

$$\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1} = \pi^{1/2}2^{\frac{2}{2l}}\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2l}{2l}} = 2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

• Cas $i = l$ (cf. annexe C.1.2). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j}{2l}\Big)\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j+2}{2l}\Big)^{-1}.$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{2}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{l+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l}{2l}\Big)^{-1} = \gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1} = 2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

(d'après le cas $i = 1$.)

• $2 \leqslant i \leqslant l-1$ (cf. annexe C.1.3).
On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{l-i+1}{2l}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{l-i}{2l}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i-1}{2l}\Big)\times$$

$$\times\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+2}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l}\Big)\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{i-j+1}{2l}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{i-j}{2l}\Big)\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+2}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l}\Big).$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{l-i}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{l-i+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i+2}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{2l-i+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big)^{-1} = 2^{\frac{2}{l}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2i-2}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{i-1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+i-1}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2-2l}{2l}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2i}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l-i}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-i}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i}{2l}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2i+2}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l-i+1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-i+1}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2i}{2l}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2i}{2l}\Big) = \Gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{i+l}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2l}{2l}}.$$

Donc (F') est vérifiée pour le système du type B_l. ♦

Démonstration.
Vérifions la deuxième formule (F”).
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.2.1). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{l}{2l-1}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{2l-1}{2(2l-1)}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{j-1}{2l-1}\Big)^{-1}\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{j-2}{2l-1}\Big)\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j}{2l-1}\Big)^{-1}\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-1}{2l-1}\Big).$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{2}{2l-1}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l+1}{2(2l-1)}\Big)^{-1}=\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1}=2^{\frac{5-2l}{2l-1}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l+1}{2(2l-1)}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{3-2l}{2l-1}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-3}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{2l-3}{2(2l-1)}\Big)\Gamma\Big(\frac{2(2l-2)}{2l-1}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2l-1}}$$

$$\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1}=\pi^{-1/2}2^{\frac{2}{2l-1}}\pi^{1/2}2^{\frac{3-2l}{2l-1}}=2^{\frac{5-2l}{2l-1}}.$$

• Cas $i = l$ (cf. annexe C.2.2). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2(2l-1)}\Big)^{-2}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j}{2(2l-1)}\Big)^{2}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j+1}{2l-1}\Big)^{-2}.$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2(2l-1)}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{l}{2l-1}\Big)^{-2}=2^{\frac{6-4l}{2l-1}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{1}{4l-2}\Big)\Gamma\Big(\frac{l}{2l-1}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2l}{2l-1}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{4l-3}{2(2l-1)}\Big)\Gamma\Big(\frac{l-1}{2l-1}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-1}{2l-1}}.$$

$$\gamma\Big(\frac{1}{2(2l-1)}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{l}{2l-1}\Big)^{-2}=2^{\frac{6-4l}{2l-1}}.$$

• Cas $2 \leqslant i \leqslant l-1$ (cf. annexe C.2.3).

On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2(2l-1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2(2l-1)}\gamma\Big(\frac{1}{2l-1}\Big)\Big)^{-2}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i}{2l-1}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i-1}{2l-1}\Big)\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l-1}\Big)^{-1}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i}{2l-1}\Big)\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{i-j+1}{2l-1}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{i-j}{2l-1}\Big)\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l-1}\Big)^{-1}\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i}{2l-1}\Big).$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2(2l-1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2(2l-1)}\Big)\gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2l-1}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l-1}\Big)\gamma\Big(\frac{2l-i}{2l-1}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{i}{2l-1}\Big)^{-1}=$$

$$=2^{\frac{4}{2l-1}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2i-2}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{i-1}{2l-1}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l+2i-3}{2(2l-1)}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-1-2l}{2l-1}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{2l-i}{2l-1}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2(2l-1)}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i+2}{2l-1}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2l-1}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-i-1}{2l-1}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i}{2l-1}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2i}{2l-1}\Big)=\Gamma\Big(\frac{i}{2l-1}\Big)\Gamma\Big(\frac{2i+2l-1}{2(2l-1)}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2l+1}{2l-1}}.$$

Donc (F”) est vérifiée pour le système du type B_l. ♦

8.4.2 Système du type $C_l, l \geqslant 3$:

$n=2l^2\,;h=2l\,;\theta=-\alpha_0=2\epsilon_1=2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$.
$2\rho=(2l)\epsilon_1+(2l-2)\epsilon_2+\ldots+(2l-2i+2)\epsilon_i+4\epsilon_{l-1}+2\epsilon_l$.
Base : pour tout $1\leqslant i\leqslant l-1$

$$\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}\,;\alpha_l=2\epsilon_l.$$

Racines positives :

$$2\epsilon_i, 1\leqslant i\leqslant l,$$

$$\epsilon_i-\epsilon_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant l,$$

$$\epsilon_i+\epsilon_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant l.$$

On a :
$$h^\vee = 2(l+1),\ \alpha_i^\vee = \alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l-1,\ \alpha_l^\vee = \frac{\alpha_l}{2}.$$
$$n_i = 2,\ 1 \leqslant i \leqslant l-1,\ n_0 = n_l = 1.$$

Racines positives duales :
$$2\epsilon_i^\vee = \epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l,$$
$$(\epsilon_i - \epsilon_j)^\vee = \epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l,$$
$$(\epsilon_i + \epsilon_j)^\vee = \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l.$$
D'où :
$$2\rho^\vee = (2l-1)\epsilon_1 + (2l-3)\epsilon_2 + \ldots + (2l-2i+1)\epsilon_i + \ldots + \epsilon_l.$$
Calcul des $n_i^\vee$:
On a
$$n_i^\vee = \frac{n_i\alpha_i^2}{2},\ 0 \leqslant i \leqslant l.$$
D'où :
$$n_i^\vee = 2,\ 0 \leqslant i \leqslant l.$$

Donc pour la formule (F”) :
$$n_i^\vee \alpha_i^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{\frac{-2}{l+1}},\ 1 \leqslant i \leqslant l-1.$$
$$n_l^\vee \alpha_l^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{\frac{l-1}{l+1}}.$$

Pour la formule (F') :
$$n_i^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h} = n_i^\vee.2^{-1} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant l.$$

Démonstration.
Vérifions la formule (F').
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.3.1). On obtient :
$$\gamma\Big(\frac{l}{2l}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\times$$
$$\times \prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{j-1}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{j-2}{2l}\Big)\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j+1}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=3}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j}{2l}\Big).$$

Ce qui donne :
$$\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2}{2l}\Big) = \gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1} = 2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

En effet, sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2}{2l}\Big)=\Gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+1}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2l}{2l}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2}{2l}\Big)=\Gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-1}{2l}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2l}}.$$

$$\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1}=\pi^{1/2}2^{\frac{2}{2l}}\pi^{-1/2}2^{\frac{2-2l}{2l}}=2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

• Cas $i=l$ (cf. annexe C.3.2). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j}{2l}\Big)\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j+2}{2l}\Big)^{-1}.$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{2}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{l+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l}{2l}\Big)^{-1}=\gamma\Big(\frac{l-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-1}{l}\Big)^{-1}=2^{\frac{4-2l}{2l}}.$$

(d'après le cas $i=1$.)
• Cas $1\leqslant i\leqslant l$ (cf. annexe C.3.3). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\times$$

$$\times\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{j-i-1}{2l}\Big)\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{j=i+2}^{l}\gamma\Big(\frac{2l-j-i}{2l}\Big)\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{i-j+1}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{i-j}{2l}\Big)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i+1}{2l}\Big)^{-1}\prod_{j=1}^{i-1}\gamma\Big(\frac{2l-j-i}{2l}\Big).$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{l-i}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{l-i}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{2l-2i-1}{2l}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\gamma\Big(\frac{2l-2i+1}{2l}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-i}{2l}\Big)^{-1}=1.$$

En effet, sachant que :

$$\gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-i}{2l}\Big)^{-1}=\gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{i}{2l}\Big).$$

Donc (F') est vérifiée pour le système du type C_l. ♦

Démonstration. Vérifions maintenant la formule (F")
• Cas $i = l$ (cf. annexe C.4.1). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{2}{2(l+1)}\Big)^{-2}\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j}{2(l+1)}\Big)\prod_{j=1}^{l-1}\gamma\Big(\frac{l-j+2}{2(l+1)}\Big)^{-1}.$$

Ce qui donne :

$$\gamma\Big(\frac{1}{l+1}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{2(l+1)}\Big) = 2^{\frac{l-1}{l+1}}.$$

Car :

$$\Gamma\Big(\frac{2l}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l+1}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2}{2l+2}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+2}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2l}{2l+2}}.$$

• Cas $1 \leqslant i \leqslant l-1$ (cf. C.4.2). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{2l-2i+2}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i}{2(l+1)}\Big)\gamma\Big(\frac{l-i}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{i}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-i+1}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-i+1}{2(l+1)}\Big).$$

Sachant que :

$$\Gamma\Big(\frac{2i}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{i}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+1+i}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2l-2}{2l+2}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2(l-i+1)}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l-i+1}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l-i+2}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i}{2l+2}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2l-2i}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{l-i}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{2l+1-i}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{-2i-2}{2l+2}}.$$

$$\Gamma\Big(\frac{2i+2}{2l+2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{i+1}{2l+2}\Big)\Gamma\Big(\frac{l+i+2}{2l+2}\Big)\pi^{-1/2}2^{\frac{2i-2l}{2l+2}}.$$

On a alors :

$$\gamma\Big(\frac{2l-2i+2}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-2i}{2(l+1)}\Big)\gamma\Big(\frac{l-i}{2(l+1)}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\gamma\Big(\frac{i}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2l-i+1}{2(l+1)}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{l-i+1}{2(l+1)}\Big) =$$

$$= 2^{\frac{-2}{l+1}}.$$

Donc (F") est vérifiée pour le système du type C_l. ♦

8.4.3 Système du type F_4 :

$n = 48\,; h = 12\,; \theta = -\alpha_0 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4\,;$
$2\rho = 11\epsilon_1 + 5\epsilon_2 + 3\epsilon_3 + \epsilon_4$.
Base :

$$\alpha_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_{i+2}, \text{ pour} 1 \leqslant i \leqslant 2\,; \alpha_3 = \epsilon_4\,; \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4).$$

Racines positives :

$$\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4,$$
$$\epsilon_i \pm \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4,$$
$$\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4).$$

On a :

$$h^\vee = 9,\ \alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i|\alpha_i)}.$$
$$n_1 = n_4 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ n_0 = 1.$$

Base duale :

$$\alpha_1^\vee = \alpha_1,\ \alpha_2^\vee = \alpha_2,\ \alpha_3^\vee = 2\alpha_3,\ \alpha_4^\vee = 2\alpha_4.$$

Racines positives duales :

$$\epsilon_i^\vee = 2\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4.$$
$$(\epsilon_i \pm \epsilon_j)^\vee = \epsilon_i \pm \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4.$$
$$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)^\vee = (\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4).$$

D'où :

$$\rho^\vee = 8\epsilon_1 + 3\epsilon_2 + 2\epsilon_3 + \epsilon_4.$$

Calcul des $n_i^\vee$:
On a

$$n_i^\vee = n_i\alpha_i^2/2,\ 0 \leqslant i \leqslant l.$$

D'où :

$$n_1^\vee = n_3^\vee = 2,\ n_2^\vee = 3,\ n_0^\vee = n_4^\vee = 1.$$

Donc pour la formule (F") :

$$n_1^\vee\alpha_1^2/2\prod_{j=0}^{l}(n_j^\vee\alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{8/9}3^{-1/3}.$$

$$n_2^\vee\alpha_2^2/2\prod_{j=0}^{l}(n_j^\vee\alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{-1/9}3^{2/3}.$$

$$n_3^\vee \alpha_3^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{-1/9} 3^{-1/3}.$$

$$n_4^\vee \alpha_4^2/2 \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee \alpha_j^2/2)^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{-10/9} 3^{-1/3}.$$

Pour la formule (F') :

$$n_i^\vee \prod_{j=0}^{l} (n_j^\vee)^{-n_j/h} = n_i^\vee 2^{-1/2} 3^{-1/4},\ 1 \leqslant i \leqslant 4.$$

Démonstration. Vérifions maintenant la formule (F')

- Cas $i = 1$ (cf. annexe C.5.1).

  On obtient (en utilisant $\gamma\left(\frac{10}{12}\right) = \gamma\left(\frac{2}{12}\right)^{-1}$ et $\gamma\left(\frac{11}{12}\right) = \gamma\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$) :

$$\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1} = \gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1} =$$
$$= \gamma(E_6, \alpha_2)^{-1} = n_1^\vee 2^{-1/2} 3^{-1/4} = 2^{1/2} 3^{-1/4}.$$

- Cas $i = 2$ (cf. annexe C.5.2).

  On obtient (en utilisant $\gamma\left(\frac{10}{12}\right) = \gamma\left(\frac{2}{12}\right)^{-1}$ et $\gamma\left(\frac{5}{12}\right) = \gamma\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}$ et $\gamma\left(\frac{9}{12}\right) = \gamma\left(\frac{3}{12}\right)^{-1}$) :

$$\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{-3}\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big) = \gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)^{-3}\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big) =$$
$$= \gamma(E_6, \alpha_4)^{-1} = 2^{-1/2} 3^{3/4}.$$

- Cas $i = 3$ (cf. annexe C.5.3).

  On obtient (en utilisant $\gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$) :

$$\gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1} = \gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1}$$
$$= \gamma(E_6, \alpha_2)^{-1} = 2^{1/2} 3^{-1/4}.$$

- Cas $i = 4$ (cf. annexe C.5.4).

  On obtient (en utilisant $\gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$) :

$$\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{8}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)^{-1} = \gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)^{-1}$$
$$= \gamma(E_6, \alpha_1)^{-1} = 2^{-1/2} 3^{-1/4}.$$

Donc la formule (F') est vérifiée pour F_4. ♦

Démonstration. Vérifions maintenant la formule (F”).
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.6.1). On obtient :

$$\gamma(F_4, \alpha_1) = \gamma\Big(\frac{3}{18}\Big)\gamma\Big(\frac{4}{9}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{7}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{3}{9}\Big)^{-1}.$$

Or, en utilisant 8.3.10 et 8.3.12, on a :

$$\gamma(F_4, \alpha_1) = 3^{-1/3}2^{8/9}.$$

• Cas $i = 2$ (cf. annexe C.6.2).
On obtient :

$$\gamma(F_4, \alpha_2) = \gamma\Big(\frac{3}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2}{9}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{5}{9}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{18}\Big)\gamma\Big(\frac{7}{18}\Big).$$

De même, en utilisant 8.3.10 et 8.3.12 :

$$\gamma(F_4, \alpha_2) = 2^{-1/9}3^{2/3}.$$

• Cas $i = 3$ (cf. annexe C.6.3).
On obtient :

$$\gamma(F_4, \alpha_3) = \gamma\Big(\frac{1}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{7}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{5}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{9}\Big)\gamma\Big(\frac{1}{9}\Big)\gamma\Big(\frac{2}{9}\Big).$$

De même, en utilisant 8.3.10 et 8.3.12 :

$$\gamma(F_4, \alpha_3) = 2^{-1/9}3^{-1/3}.$$

• Cas $i = 4$ (cf. annexe C.6.4).
On obtient :

$$\gamma(F_4, \alpha_4) = \gamma\Big(\frac{1}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{2}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{6}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{10}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{11}{18}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{3}{18}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{18}\Big)\gamma\Big(\frac{4}{18}\Big).$$

De même en utilisant 8.3.10 et 8.3.12 :

$$\gamma(F_4, \alpha_4) = 2^{-10/9}3^{-1/3}.$$

Donc la formule (F”) est vérifiée pour F_4. ♦

8.4.4 Système du type G_2 :

$n = 12\,; h = 6\,; \theta = -\alpha_0 = -\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2\,;$
$2\rho = 2(-\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 3\epsilon_3)$.
Base :

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2\,; \alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3.$$

Racines positives :

$$\alpha_1\,;\alpha_2\,;-\epsilon_1+\epsilon_3\,;-\epsilon_2+\epsilon_3\,;\epsilon_1-2\epsilon_2+\epsilon_3\,;-\epsilon_1-\epsilon_2+2\epsilon_3.$$

On a :

$$h^\vee = 12,\ \alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i|\alpha_i)}\,;$$
$$n_1 = 3,\ n_2 = 2,\ n_0 = 1.$$

Base duale

$$\alpha_1^\vee = \alpha_1,\ \alpha_2^\vee = \frac{1}{3}\alpha_2.$$

Racines positives duales :

$$\alpha_1^\vee = \alpha_1\,;\alpha_2^\vee = \frac{1}{3}\alpha_2\,;-\epsilon_1+\epsilon_3\,;-\epsilon_2+\epsilon_3\,;\frac{1}{3}(\epsilon_1-2\epsilon_2+\epsilon_3)\,;\frac{1}{3}(-\epsilon_1-\epsilon_2+2\epsilon_3).$$

D'où :

$$6\rho^\vee = -2\epsilon_1 - 8\epsilon_2 + 10\epsilon_3.$$

Calcul des $n_i^\vee$:
On a

$$n_i^\vee = \frac{n_i\alpha_i^2}{2},\ 0 \leqslant i \leqslant 2.$$

D'où :

$$n_1^\vee = 3,\ n_2^\vee = 6,\ n_0^\vee = 3.$$

Donc pour la formule (F") :

$$n_1^\vee\alpha_1^2/2\prod_{j=0}^{2}(\frac{n_j^\vee\alpha_j^2}{2})^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{-1/2}3^{-3/4}.$$

$$n_2^\vee\alpha_2^2/2\prod_{j=0}^{2}(\frac{n_j^\vee\alpha_j^2}{2})^{-n_j^\vee/h^\vee} = 2^{1/2}3^{1/4}.$$

Pour la formule (F') :

$$n_1^\vee\prod_{j=0}^{2}(n_j^\vee)^{-n_j/h} = 2^{-1/3}.$$

$$n_2^\vee\prod_{j=0}^{2}(n_j^\vee)^{-n_j/h} = 2^{2/3}.$$

Démonstration. Vérifions maintenant la formule (F')
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.7.1).
On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{6}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)^{-1} = \gamma(D_4, \alpha_1)^{-1} = 2^{-1/3}.$$

• Cas $i = 2$ (cf. annexeC.7.2). On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2}\gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-3}\gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = \gamma(D_4, \alpha_2)^{-1} = 2^{2/3}.$$

Donc la formule (F') est vérifiée pour le système G_2. Ainsi la formule (F') est vérifiée pour les systèmes du type B, C, F, G. ♦

Démonstration. Vérifions maintenant la formule (F")
• Cas $i = 1$ (cf. annexe C.8.1).
On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{3}\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{6}{12}\Big)^{-3}.$$

En utilisant :

$$2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{3}{12}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{9}{12}),$$

puis :

$$2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{10}{12}) = \Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12}),$$

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{8}{12}) = \Gamma(\frac{4}{12})\Gamma(\frac{10}{12}),$$

et

$$2^{5/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{2}{12}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{7}{12}),$$

puis :

$$\Gamma(\frac{2}{12})\Gamma(\frac{10}{12}) = 2\pi,$$

on a bien :

$$\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)^{-2}\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{3}\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{5}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{6}{12}\Big)^{-3} = 2^{-1/2}3^{-3/4}.$$

• Cas $i = 2$ (cf. annexe C.8.2).
On obtient :

$$\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{6}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)^{-1} = \gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)^{-1}.$$

En utilisant :

$$2\pi 3^{1/4}\Gamma(\frac{3}{12}) = \Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{9}{12}),$$

puis :

$$2^{1/6}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{10}{12}) = \Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12}),$$

$$2^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(\frac{8}{12}) = \Gamma(\frac{4}{12})\Gamma(\frac{10}{12}),$$

on a :

$$\gamma\Big(\frac{1}{12}\Big)\gamma\Big(\frac{3}{12}\Big)^{-1}\gamma\Big(\frac{4}{12}\Big)^{-1} = 2^{1/2}3^{1/4}.$$

Donc la formule (F") est vérifiée pour le système G_2. Ainsi la formule (F") est vérifiée pour les systèmes du type B, C, F, G. ♦

Chapitre 9

Formule de Fateev q-analogue pour les systèmes A_l et D_l

9.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous ferons le lien entre le chapitre sur la fonction Gamma q-analogue 3 et le chapitre précédent 8 : Formule de Fateev. Nous donnerons une formule q-analogue pour les systèmes A_l et D_l.

Notation 9.1.1. Les notations utilisées sont celles du chapitre 7, cf.7.1. On pose également :

$$k(R) := k := \prod_{i=1}^{l} n_i^{n_i/2h}.$$

Rappelons le résultat trouvé au chapitre précédent 8.2.2 :

Théorème 9.1.2 (Formule de Fateev)**.** *Supposons que R soit du type A, D. Alors pour chaque $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant l$, on a :*

$$\prod_{\alpha>0} \gamma\left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{h}\right)^{\langle \alpha_i, \alpha \rangle} = n_i^{-1} k^2.$$

Donnons la définition de l'analogue de la fonction γ :

Définition 9.1.3.

$$\gamma_q(z) := \frac{\Gamma_q(z)}{\Gamma_q(1-z)}.$$

Rappelons également :

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

Alors on a :

Théorème 9.1.4 (Formule de Fateev q-analogue pour A_l, D_l).
Pour chaque $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant l$, *on a :*

$$\prod_{\alpha>0} \gamma_q \left(\frac{\langle \alpha, \rho \rangle}{h} \right)^{\langle \alpha_i, \alpha \rangle} = [n_i^{-1} k^2]_q.$$

Remarque 9.1.5.
$[n_i^{-1}k^2]_q = 1$ pour le système A_l et $[n_i^{-1}k^2]_q = 2$ pour le système D_l.

9.2 Système $A_l, l \geqslant 1$

Rappelons le résultat trouvé au chapitre précédent : 8.3.1

$$\gamma(A_l, \alpha_i) = 1 = k^2, 1 \leqslant i \leqslant l+1.$$

Prouvons la proposition énoncée précédemment 9.1.4.

Démonstration. On vient de rappeler que :

$$\gamma(A_l, \alpha_i) = 1.$$

Or :

$$[1]_q = 1.$$

Et avec la définition de l'analogue de la fonction γ (cf.9.1.3) on a trivialement :

$$\gamma_q(\frac{l+1-i}{l+1}) = \gamma_q(\frac{i}{l+1})^{-1}.$$

Ainsi la formule de Fateev q-analogue pour $A_l, l \geqslant 1$, est trivialement vérifiée. ♦

9.3 Système $D_l, l \geqslant 3$

Au chapitre précédent : 8.3.6

$$\gamma(D_4, \alpha_1) = \frac{\gamma(2/3)\gamma(1/6)}{\gamma(1/3)} = 2^{1/3}.$$

Or :

$$[2]_q^{1/3} = (1+q)^{1/3}.$$

Alors, en utilisant la définition de l'analogue de la fonction γ(cf.9.1.3) :

$$\gamma_q(D_4, \alpha_1) = \frac{\gamma_q(2/3)\gamma_{q^2}(1/6)}{\gamma_{q^2}(1/3)} = (1+q)^{1/3}.$$

Démonstration. En effet, d'après la formule de duplication q-analogue 3.2.6 :

$$\Gamma_q(1/3)\Gamma_{q^2}(1/2) = \Gamma_{q^2}(1/6)\Gamma_{q^2}(2/3)(1+q)^{-2/3}.$$

$$\Gamma_q(2/3)\Gamma_{q^2}(1/2) = \Gamma_{q^2}(1/3)\Gamma_{q^2}(5/6)(1+q)^{-1/3}.$$

On montre de même que :

$$\gamma_q(D_4, \alpha_2) = \frac{\gamma_q(1/3)^2\gamma_{q^2}(1/3)^2}{\gamma_{q^2}(1/6)^2} = (1+q)^{-2/3}.$$

$$\gamma_q(D_4, \alpha_4) = \gamma_q(D_4, \alpha_3) = \gamma_q(D_4, \alpha_1).$$

$$\gamma_q(D_5, \alpha_1) = \frac{\gamma_q(3/4)\gamma_{q^2}(1/8)}{\gamma_{q^2}(3/8)} = (1+q)^{1/2}.$$

$$\gamma_q(D_5, \alpha_5) = \gamma_q(D_5, \alpha_4) = \gamma_q(D_5, \alpha_1) = (1+q)^{1/2}.$$

$$\gamma_q(D_5, \alpha_2) = \frac{\gamma_{q^2}(3/8)}{\gamma_q(3/4)\gamma_{q^2}(1/8)} = (1+q)^{-1/2}.$$

$$\gamma_q(D_5, \alpha_3) = \gamma_q(D_5, \alpha_2).$$

Cas général :

$$\gamma_q(D_l, \alpha_i) = \gamma_q(\frac{2l-2i-2}{2l-2})\gamma_{q^2}(\frac{l-i-1}{2l-2})^{-1}\gamma_{q^2}(\frac{2l-i-1}{2l-2})\times$$

$$\times\gamma_q(\frac{2l-2i}{2l-2})^{-1}\gamma_{q^2}(\frac{l-i}{2l-2})\gamma_{q^2}(\frac{i}{2l-2}).$$

$$\gamma_q(D_l, \alpha_i) = (1+q)^{-\frac{2}{l-1}}, \text{pour tout i} \leqslant l-2.$$

$$\gamma_q(D_l, \alpha_l) = \gamma_q(D_l, \alpha_{l-1}) = \gamma_{q^2}(\frac{1}{2l-2})\gamma_{q^2}(\frac{l}{2l-2})\gamma_q(\frac{2}{2l-2})^{-1} = (1+q)^{\frac{l-3}{l-1}}.$$

♦

Chapitre 10

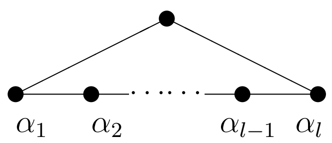
Produits Gamma et vecteurs propres des matrices de Cartan

Le but de ce chapitre est d'exprimer certains vecteurs propres de matrices de Cartan en termes de produits de valeurs de la fonction Γ.

Notation 10.0.1. Pour énoncer les théorèmes, on utilise les notations du chapitre 7 cf.7.1.
On utilise la liste ci-dessous des graphes de Dynkin complétés.

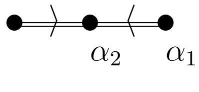
10.1 Liste des graphes de Dynkin complétés

Système de type $A_l, l \geqslant 2$

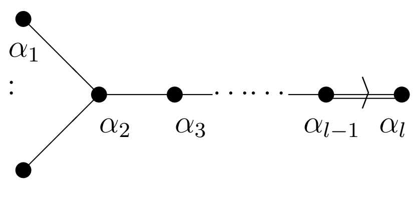


Système de type $B_l, l \geqslant 2$

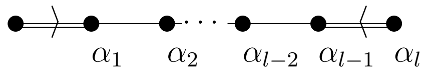
Pour $l = 2$:



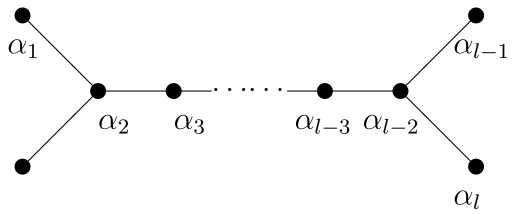
Pour $l \geqslant 3$:



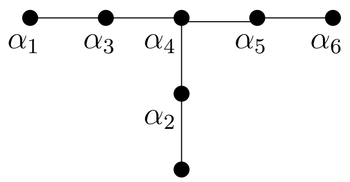
Système de type $C_l, l \geqslant 2$



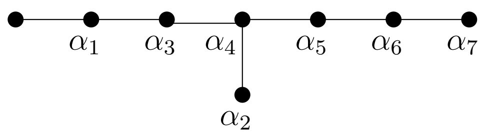
Système de type $D_l, l \geqslant 4$



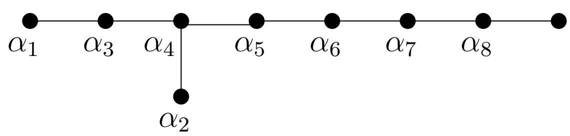
Système de type E_6



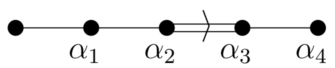
Système de type E_7



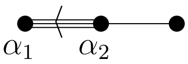
Système de type E_8



Système de type F_4



Système de type G_2



10.2 Théorème pour les matrices de Cartan : cas fini

On définit des nombres réels strictement positifs :

$$\Gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha>0} \Gamma(\langle \alpha, \rho^\vee \rangle / h)^{-\langle \alpha^\vee, \alpha_i \rangle},$$

et un vecteur

$$\Gamma(R) = (\Gamma(R, \alpha_1), \ldots, \Gamma(R, \alpha_l)) \in \mathbb{R}^l.$$

D'autre part, la matrice $A' = I - A/2$ est indécomposable avec des coefficients positifs (c'est la matrice d'incidence du graphe de Dynkin de R cf. liste des graphes 10.1).
D'après le théorème de Perron-Frobenius ([Gan66],Ch. XIII, **S 2**), A' admet un unique, à proportionnalité près, vecteur propre v_{PF} de coordonnées strictement positives et de valeur propre réelle $\lambda_{max}(A') > 0$. Celle-ci est strictement supérieure aux valeurs absolues de toutes autres valeurs propres de A'. En effet, toutes les valeurs propres de A sont reélles et strictement positives, et v_{PF} est un vecteur propre de A de valeur propre minimale :

$$\lambda_{min}(A) = 4\sin^2(\pi/2h),$$

où h est le nombre de Coxeter de R.
On a :

$$\lambda_{max}(A') = (2 - \lambda_{min}(A))/2 = \cos(\pi/2h).$$

On appelle v_{FP} le vecteur de Perron-Frobenius de A. Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 10.2.1. *Pour chaque système de racines R fini irréductible de rang l $\Gamma(R)$ est le vecteur de Perron - Frobenius de la matrice de Cartan A de R.*

Pour la preuve (qui est un calcul direct), voir 10.4 et en annexe D pour le cas E_8.

10.3 Théorème pour les matrices de Cartan affines

Soit $\theta = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ la plus longue racine.
On pose $n_0 = 1$, $\alpha_0 = -\theta$, donc $h = \sum_{i=0}^{l} n_i$.

On peut aussi définir les coordonnées de v_{PF} comme les racines carrées de valeurs propres de la matrice M avec :

$$M^{ab} = \sum_{i=0}^{l} n_i \alpha_i^a \alpha_i^b,$$

cf.[Fre91] et cf.[FLO91].
Ces nombres sont les masses des particules dans des modèles perturbés de la Théorie Conforme de Champs, cf.[FZ90] et cf.[Zam89].

Enonçons une assertion semblable au théorème ci-dessus pour des matrices de Cartan affines. Soit $\hat{A}$ la matrice de Cartan $(l+1) \times (l+1)$ du système de racines affine R, [Kac94], alors $\hat{A}$ admet, à proportionnalité près, un seul vecteur propre de valeur propre 0, et

$$\delta := (n_0, \dots, n_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$$

est l'unique tel vecteur dont les coordonnées sont strictement positives et entières. Les nombres $n_i, 0 \leq i \leq l$ coïncident avec les marques de Kac du graphe de Dynkin completé R (cf. graphes de Dynkin 10.1, [Kac94], 4.8, 4.9).

10.3.1 Systèmes du type A, D, E :

On normalise le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ de telle façon que $\langle \theta, \theta \rangle = 2$.

Supposons d'abord que R soit simplement lacé.
Posons

$$\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x),$$

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha>0} \gamma(\langle \alpha, \rho \rangle / h)^{-\langle \alpha_i, \alpha \rangle}, \ 0 \leq i \leq l,$$

$$\gamma(R) = (\gamma(R, \alpha_0), \dots, \gamma(R, \alpha_l)) \in \mathbb{R}^{l+1}.$$

L'énoncé suivant est équivalent à la formule de V.Fateev, 8.2.2.
On trouvera la preuve de ce théorème au 10.5.

Théorème 10.3.1 (pour les systèmes du type A, D, E)**.**

$$\gamma(R) = k(R)^{-1/h} \delta$$

où

$$k(R) = \prod_{i=1}^{l} n_i^{n_i}.$$

10.3.2 Théorème pour le cas général :

Soient $n_i^\vee, 0 \leq i \leq l$, les marques du graphe de Dynkin dual, obtenu en renversant les arrêtes du graphe initial ; on a $n_i^\vee = n_i \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2}, 1 \leq i \leq l, \ n_0^\vee = 1$.

Soit $h^\vee = h^\vee(R) = \sum_{i=0}^{l} n_l^\vee$, le nombre de Coxeter dual, [Kac94], 6.1.

Posons :

$$\delta^\vee := (n_0^\vee, \dots, n_l^\vee),$$

C'est un vecteur propre, de valeur propre 0, de la matrice de Cartan généralisée $\hat{A}^\vee$ duale de $\hat{A}$.

On définit :

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha>0} \gamma(\langle\alpha, \rho^\vee\rangle/h)^{-\langle\alpha_i, \alpha^\vee\rangle},$$

$$\gamma(R) = (\gamma(R, \alpha_0), \ldots, \gamma(R, \alpha_l)).$$

L'énoncé suivant est équivalent à la formule de Fateev et coll.,[ABF+00], (46). On trouvera la preuve de ce théorème au 10.5.

Théorème 10.3.2.

$$\gamma(R) = \left(\prod_{i=0}^{l} n_i^{\vee n_i}\right)^{-1/h} \delta^\vee.$$

10.4 Preuves : cas fini

10.4.1 Liste des vecteurs de Perron-Frobenius pour les matrices de Cartan finis

Pour les systèmes simplement lacés, [KM90], [Pas87], [Fat94],[BCS90] ; pour les cas non-simplement lacés, voir [BCS90] ; dans cet article un procédé de pliure (« folding ») est décrit, il permet d'obtenir le vecteur PF (dit aussi « de masses ») des systèmes non-simplement lacés à partir des systèmes simplement lacés convenables.

On utilise la notation suivante pour un vecteur de Perron-Frobenius d'un système de racines R :

$$m(R) = (m_1, \ldots, m_l).$$

On utilise la numérotation des sommets du graphe de Dynkin comme dans le livre de Bourbaki [Bou81], cf.liste des graphes 10.1.

- A_n :

$$m_a = \sin(\pi a/(n+1)),\ 1 \leq a \leq n.$$

- B_n :

$$m_a = 2\sin(\pi a/2n),\ 1 \leq a \leq n-1,\ m_n = 1,$$

cf. D_{n+1}.

- C_n :

$$m_a = \sin(\pi a/2n),\ 1 \leq a \leq n,$$

cf. A_{2n-1}.

- D_n :

$$m_a = 2\sin(\pi a/(2n-2)),\ 1 \leq a \leq n-2,\ m_{n-1} = m_n = 1.$$

- E_6 :

$$m_1 = m_6 = 1,\ m_3 = m_5 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ m_4 = \sqrt{3}+1,\ m_2 = \sqrt{2}.$$

- E_7 :

$$m_7 = 1,\ m_6 = 2\cos(\pi/18),\ m_1 = 2\cos(5\pi/18),\ m_4 = 4\cos(\pi/18)\cos(\pi/9),$$

$$m_3 = 4\cos(\pi/18)\cos(5\pi/18),\ m_5 = 2\cos(\pi/9)\cos(2\pi/9),\ m_2 = 2\cos(\pi/9).$$

- E_8 :

$$m(E_8) = (2\cos(\pi/5), 4\cos(\pi/5)\cos(7\pi/30), 4\cos(\pi/5)\cos(\pi/30),$$

$$8\cos^2(\pi/5)\cos(2\pi/15), 8\cos^2(\pi/5)\cos(7\pi/30), 4\cos(\pi/5)\cos(2\pi/15), 2\cos(\pi/30), 1).$$

- F_4 :

$$m_1 = \sqrt{2},\ m_2 = \sqrt{3}+1,\ m_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ m_4 = 1,$$

cf. E_6.

- G_2 :

$$m_1 = 1,\ m_2 = \sqrt{3},$$

cf. D_4.

10.4.2 Calculs des vecteurs $\Gamma(R)$

Rappelons les identités classiques satisfaites par la fonction $\Gamma(x)$ (cf. chapitre 1) :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x}{\sin(\pi x)}. \qquad (C)$$

(formule des compléments) ;

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x + i/n) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nx+1/2}\Gamma(nx). \qquad (M)$$

On aura besoin de trois cas $n = 2, 3, 5$ de cette formule ; voici les cas $n = 2$ et 3 explicitement :

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = \pi^{1/2}2^{-2x+1}\Gamma(2x). \qquad (D)$$

(formule de duplication de Legendre) et

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1/3)\Gamma(x+2/3) = 2\pi 3^{-3x+1/2}\Gamma(3x). \qquad (T)$$

On a

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\Gamma(x)^2,$$

donc

$$\Gamma(x)^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\gamma(x).$$

On pose

$$s(x) := \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Par exemple $s(1/2) = 1/\pi$.

$$s(R, \alpha_i) := \prod_{\alpha>0} s(\langle \alpha, \rho\rangle/h)^{-\langle \alpha, \alpha_i\rangle},$$

d'où

$$\Gamma(R, \alpha_i)^2 = s(R, \alpha_i)\gamma(R, \alpha_i).$$

• **Système de racines A_n :**
$h = n + 1$.

Pour $1 \leq a \leq n$:

$$\Gamma(A_n, \alpha_a) = \{\Gamma(a/(n+1))\Gamma((n+1-a)/(n+1))\}^{-1} = \frac{\sin(\pi a/(n+1))}{\pi}.$$

Donc

$$\Gamma(A_n) = \pi^{-1}(\sin(\pi/(n+1)), \ldots, \sin(\pi n/(n+1)) = \pi^{-1} m(A_n).$$

• **Système de racines $B_n,\ n \geq 2$:**
$h = 2r$.

Pour $1 \leq a \leq n-1$:

$$\begin{aligned}\Gamma(B_n, \alpha_a) &= \frac{\Gamma((n-a)/2n)\Gamma((2n-2a+2)/2n)}{\Gamma(a/2n)\Gamma((2n-2a)/2r)\Gamma((n-a+1)/2n)\Gamma((2n-a+1)/2n)} \\ &= \frac{\sin(\pi/2n)}{2^{-1/n}\pi}.\end{aligned}$$

(on utilise (D) avec $x = (n-a)/2n$ et $x = (n-a+1)/2n$).

$$\Gamma(B_n, \alpha_n) = \Gamma(1/2n)^{-1}\Gamma(2/2n)\Gamma(n/2n)^{-1}\Gamma((n+1)/2n)^{-1} = 2^{-(n-1)/n}\pi^{-1}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(B_n) = 2^{1/n}\pi^{-1}(\sin(\pi/2n), ..., \sin((n-1)\pi/2n), 1/2) = 2^{1/n}\pi^{-1}m(B_n).$$

• **Système de racines $C_n,\ n \geq 2$**

$h = 2n$.
Pour $1 \leq a \leq n-1$:

$$\Gamma(C_n, \alpha_a) = \Gamma(a/2n)^{-1}\Gamma((2n-a)/2n)^{-1} = \frac{\sin(\pi a/2n)}{\pi},$$

d'où

$$\Gamma(C_n) = \pi^{-1}(\sin(\pi/2n), \ldots, \sin(\pi n/2n)) = \pi^{-1} m(C_n).$$

- **Système de racines** $D_n,\ n \geq 2$

$h = 2n - 2$.
Pour $1 \leq a \leq n-2$:

$$\Gamma(D_n, \alpha_a) = \Gamma((n-a-1)/(2n-2))\Gamma((2n-2a)/(2n-2))\times$$

$$\times\Gamma((2n-2a-2)/(2n-2))\Gamma((2n-a-1)/(2n-2))\Gamma((n-a)/(2n-2))\Gamma(a/(2n-2)) =$$

$$= 2^{1/(n-1)}\pi^{-1}\sin(\pi/(2n-2))\ (1 \leq a \leq n-2).$$

Et :

$$\begin{aligned}\Gamma(D_n, \alpha_{n-1}) &= \Gamma(D_n, \alpha_n) \\ &= \Gamma(1/(2n-2))^{-1}\Gamma(2/(2n-2))\Gamma((n-1)/(2n-2))^{-1}\Gamma(n/(2n-2))^{-1} \\ &= 2^{-n/(n-1)}\pi^{-1}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma(D_n) = 2^{1/(n-1)}\pi^{-1}m(D_n).$$

- **Système de racines** E_6

$h = 12$.

Remarque 10.4.1. Le graphe de Dynkin admet un automorphisme σ d'ordre 2, $\sigma(\alpha_1) = \alpha_6$, $\sigma(\alpha_3) = \alpha_5$, $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ pour $i = 2, 4$.
Il s'en suit que $f(E_6, \alpha_i) = f(E_6, \sigma(\alpha_i))$ pour $f = \Gamma, \gamma$ ou s.

On va utiliser les formules élémentaires suivantes :

$$\sin(\pi/12) = \sin(\pi/3 - \pi/4) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

$$\sin(5\pi/12) = \sin(7\pi/12) = \sin(\pi/3 + \pi/4) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

$$s(1/4) = \sqrt{2}\pi,\ s(1/3) = s(2/3) = 2\pi/\sqrt{3}. \tag{3}$$

$$s(1/12)/s(5/12) = (\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)^2/2. \tag{4}$$

En plus, on utilisera le calcul du vecteur $\gamma(E_6)$, cf. chapitre 8.3.3.

On a :

$$\gamma(E_6, \alpha_1) = \gamma(E_6, \alpha_6) = \frac{\gamma(3/12)}{\gamma(1/12)\gamma(8/12)} = 2^{-1/2}3^{-1/4},$$

et

$$s(E_6, \alpha_1) = s(E_6, \alpha_6) = \frac{s(1/4)}{s(1/2)s(1/12)s(2/3)} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{2^2\pi^2}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(E_6,\alpha_1)=\Gamma(E_6,\alpha_6)=\frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(6/12)\Gamma(1/12)\Gamma(8/12)}=2^{-5/4}\pi^{-1}\cdot 3^{1/8}(\sqrt{3}-1)^{1/4}.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_3)=\Gamma(E_6,\alpha_5)=\frac{\Gamma(6/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)}.$$

$$s(E_6,\alpha_3)=s(E_6,\alpha_5)=\frac{s(1/2)}{s(1/3)s(5/12)s(3/4)}=\pi^{-2}\cdot\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2^3}.$$

$$\gamma(E_6,\alpha_3)=\gamma(E_6,\alpha_5)=\{\gamma(4/12)\gamma(5/12)\gamma(9/12)\}^{-1}=2^{1/2}3^{-1/4}.$$

$$s(E_6,\alpha_1)/s(E_6,\alpha_3)=s(1/2)^{-2}s(1/4)^2s(5/12)/s(1/12)=2^2(\sqrt{3}+1)^{-2}.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_1)/\Gamma(E_6,\alpha_3)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_2)=\frac{1}{\Gamma(6/12)}\cdot\frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)}\cdot\frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)}.$$

$$\gamma(E_6,\alpha_2)=\frac{\gamma(3/12)}{\gamma(4/12)\gamma(5/12)}=\gamma(E_6,\alpha_3)=2^{1/2}3^{-1/4}.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_2)/\Gamma(E_6,\alpha_3)=\frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)\Gamma(3/12)\Gamma(9/12)}{\Gamma(6/12)^2\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_4)=\Gamma(1/12)\Gamma(2/12)^{-1}\Gamma(10/12)^{-1}\Gamma(3/12)^{-2}\Gamma(9/12)\Gamma(4/12)\times$$

$$\Gamma(5/12)\Gamma(7/12)^{-1}\Gamma(6/12)^{-1}.$$

$$s(E_6,\alpha_4)=s(1/12)s(1/6)^{-2}s(1/4)^{-1}s(1/3)s(1/2)^{-1}=\{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\}^{-1}.$$

$$s(E_6,\alpha_4)/s(E_6,\alpha_3)=2^2/3.$$

$$\gamma(E_6,\alpha_4)=\gamma(1/12)\gamma(3/12)^{-3}.\gamma(4/12)=2^{-1/2}3^{3/4}.$$

$$\gamma(E_6,\alpha_4)/\gamma(E_6,\alpha_3)=3/2.$$

$$\Gamma(E_6,\alpha_4)/\Gamma(E_6,\alpha_3)=2^{1/2}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(E_6)=\Gamma(E_6,\alpha_1)\cdot(1,\sqrt{2},(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2},\sqrt{3}+1,(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2},1)$$

$$\Gamma(E_6)=2^{-5/4}3^{1/8}(\sqrt{3}-1)^{1/4}\pi^{-1}m(E_6).$$

- **Système de racines E_7**

$h = 18$.
En utilisant (D) et (T), on arrive aux valeurs suivantes de $\Gamma(E_7, \alpha_i)$:

$$\Gamma(E_7,\alpha_1) = \frac{\Gamma(3/18)\Gamma(5/18)\Gamma(16/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(6/18)\Gamma(8/18)\Gamma(10/18)\Gamma(17/18)} = \frac{\sin(\pi/9)\sin(2\pi/9)}{2^{-10/9}3^{1/6}\pi}.$$

$$\Gamma(E_7,\alpha_2) = \frac{\Gamma(2/18)\Gamma(3/18)\Gamma(10/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(5/18)\Gamma(6/18)\Gamma(7/18)\Gamma(14/18)} = \frac{\sin(2\pi/9)}{2^{-1/9}3^{1/6}\pi}.$$

$$\Gamma(E_7,\alpha_3) = \frac{\Gamma(8/18)\Gamma(15/18)}{\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(11/18)\Gamma(16/18)} = 2^{-8/9}3^{1/3}/\pi.$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_7,\alpha_4) &= \frac{\Gamma(1/18)\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(14/18)}{\Gamma(2/18)\Gamma(3/18)\Gamma(7/18)\Gamma(8/18)\Gamma(12/18)\Gamma(15/18)}\\ &= \frac{\sin(2\pi/9)\sin(4\pi/9)}{2^{-10/9}3^{1/6}\pi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(E_7,\alpha_5) &= \frac{\Gamma(2/18)\Gamma(6/18)\Gamma(7/18)\Gamma(12/18)}{\Gamma(3/18)\Gamma(4/18)\Gamma(5/18)\Gamma(9/18)\Gamma(10/18)\Gamma(14/18)}\\ &= \frac{\sin(2\pi/9)\sin(5\pi/18)}{2^{-10/9}3^{1/6}\pi}.\end{aligned}$$

$$\Gamma(E_7,\alpha_6) = \frac{\Gamma(3/18)}{\Gamma(2/18)\Gamma(6/18)\Gamma(13/18)} = \frac{\sin(\pi/9)\sin(4\pi/9)}{2^{-10/9}3^{1/6}\pi}.$$

$$\Gamma(E_7,\alpha_7) = \frac{\Gamma(4/18)}{\Gamma(1/18)\Gamma(9/18)\Gamma(12/18)} = \frac{\sin(\pi/9)}{2^{-1/9}3^{1/6}\pi}.$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(E_7) = 2^{1/9}3^{-1/6}\pi^{-1}(2\sin(\pi/9)\sin(2\pi/9), \sin(2\pi/9), \sqrt{3}/2, 2\sin(2\pi/9)\sin(4\pi/9),$$
$$2\sin(2\pi/9)\sin(5\pi/18), 2\sin(\pi/9)\sin(4\pi/9), \sin(\pi/9)).$$

En utilisant (M) avec $n = 1/9$, on a :

$$\sin(\pi/9)\sin(2\pi/9)\sin(4\pi/9) = \frac{\sqrt{3}}{8}, \tag{$*$}$$

Il s'en suit que :

$$\Gamma(E_7) = 2^{1/9}3^{-1/6}\sin(\pi/9)\pi^{-1}m(E_7).$$

• **Système de racines** E_8
$h = 30$
Le cas E_8 est plus long ; pour la preuve de :

$$\Gamma(E_8) = \Gamma(E_8, \alpha_8) m(E_8).$$

cf. annexe D.

• **Système de racines** F_4
$h = 12.$

$$\begin{aligned}\Gamma(F_4, \alpha_1) &= \frac{1}{\Gamma(6/12)} \cdot \frac{\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(11/12)} \cdot \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)} \\ &= \Gamma(E_6, \alpha_2) \\ &= 2^{-1/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} + 1)^{-1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(F_4, \alpha_2) &= \frac{1}{\Gamma(6/12)\Gamma(2/12)\Gamma(10/12)} \cdot \frac{\Gamma(1/12)\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)}{\Gamma(3/12)^2\Gamma(7/12)} \\ &= \Gamma(E_6, \alpha_4) \\ &= 2^{-3/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} + 1)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\Gamma(F_4, \alpha_3) = \frac{\Gamma(6/12)}{\Gamma(4/12)\Gamma(5/12)\Gamma(9/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_3) = \Gamma(E_6, \alpha_5) = 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3}+1)^{1/2}.$$

$$\Gamma(F_4, \alpha_4) = \frac{\Gamma(3/12)}{\Gamma(1/12)\Gamma(6/12)\Gamma(8/12)} = \Gamma(E_6, \alpha_1) = \Gamma(E_6, \alpha_6) = 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3}-1)^{1/2}.$$

d'où

$$\Gamma(F_4) = \Gamma(F_4, \alpha_4)(\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1, (\sqrt{3} + 1)/\sqrt{2}, 1) = 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} - 1)^{1/2} m(F_4).$$

• **Système de racines** G_2
$h = 6$

$$\Gamma(G_2, \alpha_1) = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(1/2)\Gamma(2/3)} = 2^{-2/3} \pi^{-1} = \Gamma(D_4, \alpha_1).$$

En utilisant la formule de duplication (cf. chapitre 1.1.11) :

$$\Gamma(1/3) = 2^{-2/3} \pi^{-1/2} \Gamma(1/6)\Gamma(2/3).$$

Ensuite, en employant la formule des compléments pour $x = 1/6$ et $1/3$ (cf. chapitre 1.1.10),

$$\begin{aligned}\Gamma(G_2,\alpha_2) &= \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)^3\Gamma(5/6)}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\cdot\left[\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}\right]^2\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}\pi}\\ &= \Gamma(D_4,\alpha_2)\end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\Gamma(G_2) = 2^{-2/3}\pi^{-1}(1,\sqrt{3}) = 2^{-2/3}\pi^{-1}m(G_2).$$

10.5 Preuves : cas affine

On utilise toujours les mêmes notations 7.1.
Supposons d'abord que R soit simplément lacé.

Théorème 10.5.1 (rappel chapitre 8)**.** *Pour* $1 \le i \le l$*, on a :*

$$\gamma(R,\alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i.$$

Prouvons le théorème 10.3.1.

Démonstration. Ici nous supposons donc 10.5.1 connue. Puisque :

$$\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i,$$

on a

$$\gamma(R,\alpha_0) = \prod_{i=1}^{l}\gamma(R,\alpha_i)^{-n_i} = k(R)^{\sum_1^l n_i/h}\prod_{i=1}^{l} n_i^{-n_i} = k(R)^{-1/h},$$

puisque $\sum_1^l n_i = h-1$. Il s'en suit que

$$\gamma(R) = k(R)^{-1/h}\delta,$$

ce qui démontre le théorème 10.3.1. Réciproquement, la valeur du facteur $k(R)^{-1/h}$ est uniquement définie si on veut que $\gamma(R)$ soit proportionel à δ. ♦

Prouvons le théorème 10.3.2.

Démonstration. Pour le cas général (pas forcement simplement lacé), posons :

$$k(R) = \prod_{i=1}^{l} n_i^{\vee n_i}.$$

La formule de C.Ahn, P.Baseilhac, V.A.Fateev, C.Kim et C.Rim dit :

Théorème 10.5.2 ([ABF$^+$00])**.** *Pour* $1 \le i \le l$*, on a :*

$$\gamma(R,\alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i^{\vee}.$$

En supposant 10.5.2 connue, le même argument que ci-dessus implique le théorème 10.3.2. ♦

Chapitre 11

Un peu d'histoire

11.1 Petit historique de Gamma

11.1.1 Euler

En 1755, Euler publie *Institutiones calculi integralis*[1] où il étudie la fonction $\Pi(s)$ ($\Pi(s) = \Gamma(s+1)$ dans les notations modernes, la notation Γ est due à Legendre). En 1729, s'intéressant à l'interpolation des fonctions, il obtient l'expression :

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-x}(n+1)^x}{n+x}$$

permettant de représenter $x!$ avec x réel... Puis, suite à une correspondance avec Christian Goldbach, dans un article publié en 1730 traitant de l'intégrale de Wallis, celle-ci l'amène à :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t = n!$$

11.1.2 Gauss

Dans [Gau13] [Gau12], Gauss fait une étude approfondie des fonctions hypergéométriques et de la fonction Γ. Il obtient la fonction Γ comme une limite de la fonction Bêta d'Euler :

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n \, \mathrm{d}t = \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}.$$

11.1.3 Weierstrass

Enfin, Weierstrass[2] en s'appuyant sur les travaux de Gauss, donne une application exemplaire de son théorème de représentation d'une fonction holomorphe par un produit infini, par la formule, avec $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\frac{s}{n}) e^{-\frac{s}{n}} \right\}.$$

1. [Eul13]
2. [Wei27]

γ étant définie par :

$$\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log{(n)}]=\gamma.$$

11.2 La fonction Double Gamma

Cette fonction remarquable étudiée par Barnes vers 1900, ne figure pas dans les tables de fonctions spéciales les plus connues.
Elle est citée en exercice par Whittaker and Whatson dans [WW27] p.264 (n˚48-49-50).
Elle a été utilisée par Shintani dans [Shi77].
Avant Barnes, ces fonctions avaient été introduites sous une forme différente par Hölder, Alexeiewsky, Glaisher, Kinkelin, [Höl86], [Ale94],[Gla93b], [Kin60].
Hardy [Har05] a étudié cette fonction de son point de vue de la théorie des fonctions elliptiques.
À la fin des années 70, Vignéras [Vig79] a redéfini une fonction gamma multiple comme une fonction satisfaisant le théorème généralisé de Bohr-Morellup, en outre, Vignéras [Vig79], Voros [Vor87] et Kurokawa [Kur91], [Kur92b], [Kur92a], [Kur92c], ont montré que cette fonction gamma multiple joue un rôle essentiel pour exprimer la fonction zêta de Selberg et le déterminant de Laplaciens.

11.3 Fonction q-Gamma

La fonction q-analogue de la fonction Gamma a été introduite par Thomae dans [Tho69] et plus tard par Jackson dans [Jac04].
Heine [Hei47] donne une définition équivalente mais sans le facteur $(1-q)^{1-z}$.
Gasper et Rahman consacre également quelques chapitres dans « basic hypergeometric series »[GR0a].

11.4 Barnes


[3]

11.4.1 Sa vie

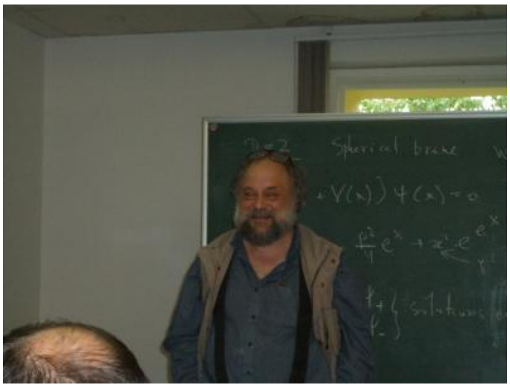
Ernest William Barnes est né le 1er avril 1874 à Birmingham. C'était un mathématicien et un scientifique anglais, mais aussi un théologien et un ecclésiastique.
Il était le plus vieux des quatre fils de John Starkie Barnes et de Kerry Jane Elizabeth, deux professeurs d'école primaire. En 1883 son père est nommé inspecteur des écoles à Birmingham, une position qu'il occupera pendant tout le reste de sa vie active.
Ernest William a étudié à la « King Edward's School » de Birmingham et plus tard en 1883 à l'université de Trinité à Cambridge. En 1898, le premier prix Smith lui est attribué.
Il sera nommé conférencier de mathématiques en 1902, doyen junior en 1906-1908 et précepteur en 1908. Il a reçu un diplôme Sc.D. de l'université de Cambridge en 1907 et a été élu camarade de la société royale en 1909. La même année où il est devenu conférencier de mathématiques, Barnes est ordonné diacre par l'évêque de Londres.
En 1915, Barnes a laissé Cambridge, et sa carrière de mathématicien, pour une nomination comme maître du temple à Londres.
Il restera maitre du temple jusqu'en 1919 puis évêque de Birmingham en 1924. Ses vues assez modernes l'opposent assez souvent aux Anglo-Catholiques de son diocèse.
Il restera évêque de Birmingham jusqu'en 1952, date à laquelle il se retirera pour cause de maladie. Il meurt dans sa maison du Sussex à l'âge de 79 ans, le 29 Novembre 1953.
Ainsi, l'épiscopat de Barnes a été marqué par une série de polémiques provenant de ses croyances religieuses souvent peu orthodoxes (positions très étonnantes pour quelqu'un qui a eu une place si haute dans l'église).

3. Vie de Barnes

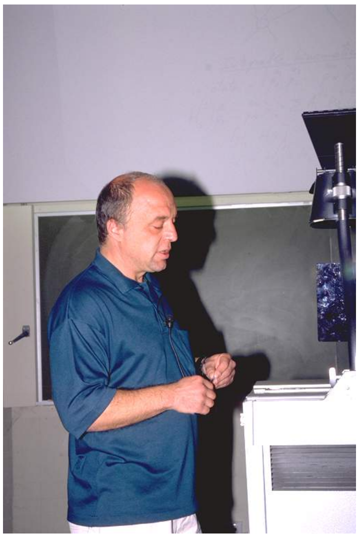
11.4.2 Publications

Barnes a écrit 29 textes mathématiques pendant les années 1897-1910.
Ses premiers travaux ont concerné divers aspects de la fonction Gamma, y compris des généralisations de cette fonction donnée par la G-fonction de Barnes, qui satisfait l'équation $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$, et à la double fonction gamma.
Barnes a ensuite tourné son attention vers la théorie des fonctions intégrales, où, dans une série d'écrits, il a étudié leur structure asymptotique.
Il a également considéré les équations de différences linéaires de second ordre liées au fonctions hypergéométriques.
Dans les cinq derniers textes concernant les fonctions hypergéométriques, Barnes a fait l'utilisation étendue des intégrales étudiées par Mellin.
Il a porté à la connaissance des mathématiciens britanniques, la puissance et la simplicité liées à ces intégrales, maintenant nommées intégrales de Mellin-Barnes.

11.5 Les frères Zamolodchikov



Alexander Zamolodchikov


Alexei Zamolodchikov [4]

4. Les frères Zamolodchikov

11.5.1 Alexander Zamolodchikov

Alexander Zamolodchikov est né à Dubna, région de Moscou, en 1952. Il a un frère jumeau Alexei.
Il obtint son diplôme en physique théorique et mathématique et son Ph.D. en 1978, puis son Doctorat ès-Sciences en 1983, au célèbre Institut de Physique Théorique L.D. Landau à Moscou, où il devint professeur, jusqu'à la fin des années quatre-vingts.
Après l'éclatement de l'URSS, il a été nommé professeur de l'université Rutgers aux Etats-Unis, dans le groupe de théorie des cordes, où il travaille actuellement.
Après 1989, il fit plusieurs séjours en France, à l'Ecole Normale Supérieure, et au LPTM (Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation), à Montpellier. Il est membre élu de l'American Physical Society et le lauréat du Prix Heineman de l'année 1999, peut-être le prix le plus prestigieux en physique mathématique, après le Prix Nobel.
Pendant son séjour au Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, il a donné de nombreux séminaires dans divers instituts de recherche et d'universités de Paris, ainsi qu'un cours de trois mois, dans le cadre de l'Ecole Doctorale de la région parisienne, sur la théorie des champs d'Ising.
Alexander Zamolodchikov, professeur à l'Université Rutgers, a bénéficié en 2004-2005 d'une Chaire Internationale de Recherche Blaise Pascal.
Ainsi, Alexander Zamolodchikov est l'un des plus célèbres physiciens théoriciens travaillant dans les domaines fondamentaux de la physique contemporaine, tels que la théorie quantique des champs, la physique statistique, la théorie des cordes et la physique mathématique des systèmes intégrables. Il est à l'origine de disciplines entières en théorie quantique des champs et en physique statistique, dans lesquelles un grand nombre de physiciens (et mathématiciens) continuent de travailler.

11.5.2 Contributions

Parmi ses contributions en physique théorique, les plus significatives sont :
- l'introduction en 1978 (avec son frère Alexei Zamolodchikov, [ZZ78]) de la matrice S pour les systèmes intégrables des champs quantiques bi-dimensionnels par la méthode du bootstrap.
C'était le véritable départ du sujet de l'intégrabilité quantique en théorie des champs.
- Le travail fondamental, en 1984 (avec A. Belavin et A. Polyakov) (un des articles les plus cités au monde en physique théorique, [ZBP84]) sur la symétrie conforme à deux dimensions.
Cet article a donné naissance à un nouvel instrument en physique théorique, dont l'importance a été reconnue dans plusieurs domaines, de la physique des transitions de phase à la théorie des cordes moderne. Il a aussi inspiré nombre de travaux de recherche en mathématiques.
- L'application, au cours des années 1990, (avec Alexei Zamolodchikov et V. Fateev, [ZZF00]) des méthodes d'intégrabilité quantique à la théorie de Liouville (le modèle de base pour beaucoup d'applications en théorie des cordes et théorie des champs

conformes).
Il s'intéresse actuellement au problème fondamental de la thermodynamique des états métastables et des états hors d'équilibre avec une approche nouvelle, parait-il, très prometteuse.

11.5.3 Alexei Zamolodchikov

Alexei Zamolodchikov, frère jumeau d'Alexander, est mort récemment le 19 Octobre 2007, à Moscou.
Il est également à l'origine de disciplines entières en théorie quantique des champs et en physique statistique, dans lesquelles un grand nombre de physiciens (et mathématiciens) continuent de travailler.

11.5.4 Contributions

Parmi ses contributions en physique théorique, les plus significatives sont :
- l'introduction en 1978 (avec son frère Alexander Zamolodchikov,[ZZ78], [ZZ96]) de la matrice S pour les systèmes intégrables des champs quantiques bi-dimensionnels par la méthode du bootstrap. C'était le véritable départ du sujet de l'intégrabilité quantique en théorie des champs,
- l'application, au cours des années 1990, (avec Alexander Zamolodchikov et V. Fateev, [ZZF00]) des méthodes d'intégrabilité quantique à la théorie de Liouville (le modèle de base pour beaucoup d'applications en théorie des cordes et théorie des champs conformes).

Annexe A

Annexes de calculs pour les chapitre 6 et 7

A.1 Formulaires trigonométriques

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a.$$
$$\sinh a \cosh b = \frac{1}{2}[\sinh(a+b) + \sinh(a-b)].$$
$$\sinh a + \sinh b = 2\sinh\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cosh\Big(\frac{a-b}{2}\Big).$$
$$\sinh^2 a - \sinh^2 b = \sinh(a-b)\sinh(a+b).$$

A.2 Annexes de calculs du chapitre 7 : fonction de Fateev

Table de calculs :

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$$
$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$$
$$\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2$$

$$\langle Q, \alpha_1 \rangle = q$$
$$\langle Q, \alpha_2 \rangle = q$$

$$\langle \bar{\alpha_1}, \alpha_1 \rangle = 2 - q$$
$$\langle \bar{\alpha_1}, \alpha_2 \rangle = -1 - q$$
$$\langle \bar{\alpha_2}, \alpha_1 \rangle = -1 - q$$
$$\langle \bar{\alpha_2}, \alpha_2 \rangle = 2 - q$$

$$\langle \overline{s_1(\alpha_1)}, \alpha_1 \rangle = q - 2$$
$$\langle \overline{s_1(\alpha_1)}, \alpha_2 \rangle = 1 - 2q$$
$$\langle \overline{s_1(\alpha_2)}, \alpha_1 \rangle = q + 1$$
$$\langle \overline{s_1(\alpha_2)}, \alpha_2 \rangle = 1 - 2q$$

$$\langle \overline{s_2(\alpha_1)}, \alpha_1 \rangle = 1 - 2q$$
$$\langle \overline{s_2(\alpha_1)}, \alpha_2 \rangle = q + 1$$
$$\langle \overline{s_2(\alpha_2)}, \alpha_1 \rangle = 1 - 2q$$
$$\langle \overline{s_2(\alpha_2)}, \alpha_2 \rangle = q - 2$$

$$\langle \rho, \rho \rangle = 2$$
$$\langle \rho, \alpha_1 \rangle = 1$$
$$\langle \rho, \alpha_2 \rangle = 1$$
$$\langle \rho, Q \rangle = 2q$$
$$\langle \rho, \bar{\alpha_1} \rangle = 1 - 2q$$
$$\langle \rho, \bar{\alpha_2} \rangle = 1 - 2q$$
$$\langle \rho, \overline{s_1(\alpha_1)} \rangle = -q - 1$$
$$\langle \rho, \overline{s_1(\alpha_2)} \rangle = 2 - q$$
$$\langle \rho, \overline{s_2(\alpha_1)} \rangle = 2 - q$$
$$\langle \rho, \overline{s_2(\alpha_2)} \rangle = -q - 1$$

$$\langle s_1(\alpha_1), \alpha_1 \rangle = 2(q-1)$$
$$\langle s_1(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = 1 - q$$
$$\langle s_1(\alpha_2), \alpha_1 \rangle = 1 + 2q$$
$$\langle s_1(\alpha_2), \alpha_2 \rangle = 1 - q$$
$$\langle s_2(\alpha_1), \alpha_1 \rangle = 1 - q$$
$$\langle s_2(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = 1 + 2q$$
$$\langle s_2(\alpha_2), \alpha_1 \rangle = 1 - q$$
$$\langle s_2(\alpha_2), \alpha_2 \rangle = 2(q-1)$$
$$\langle s_1(\alpha_1), s_1(\alpha_1) \rangle = 2(q-1)^2$$
$$\langle s_1(\alpha_2), s_1(\alpha_2) \rangle = 2(1 + q + q^2)$$
$$\langle s_2(\alpha_1), s_2(\alpha_1) \rangle = 2(1 + q + q^2)$$
$$\langle s_2(\alpha_2), s_2(\alpha_2) \rangle = 2(q-1)^2$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1 - 2Q, \alpha_1 \rangle &= 2 - 2q \\
\langle \alpha_1 - 2Q, \alpha_2 \rangle &= -1 - 2q \\
\langle \alpha_2 - 2Q, \alpha_1 \rangle &= -1 - 2q \\
\langle \alpha_2 - 2Q, \alpha_2 \rangle &= 2 - 2q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle s_1(\alpha_1) - 2Q, \alpha_1 \rangle &= -2 \\
\langle s_1(\alpha_1) - 2Q, \alpha_2 \rangle &= 1 - 3q \\
\langle s_1(\alpha_2) - 2Q, \alpha_1 \rangle &= 1 \\
\langle s_1(\alpha_2) - 2Q, \alpha_2 \rangle &= 1 - 3q \\
\langle s_2(\alpha_1) - 2Q, \alpha_1 \rangle &= 1 - 3q \\
\langle s_2(\alpha_1) - 2Q, \alpha_2 \rangle &= 1 \\
\langle s_2(\alpha_2) - 2Q, \alpha_1 \rangle &= 1 - 3q \\
\langle s_2(\alpha_2) - 2Q, \alpha_2 \rangle &= -2
\end{aligned}$$

Liste des tableaux

Annexe B

Annexes de calculs du chapitre 8 : systèmes de racines du type A, D, E

B.1 Système du type $A_l, l \geqslant 1$

B.1.1 Pour calculer $\gamma(A_l, \alpha_1)$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_i, \alpha_1 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
α_{12}	2	1
α_{13}	1	2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
α_{1l+1}	1	1
α_{23}	-1	1
$\dots$	$\dots$	$\dots$
α_{2l+1}	-1	$l-1$

B.1.2 Pour calculer $\gamma(A_l, \alpha_2)$, les racines positives α telles que $\langle \alpha, \alpha_2 \rangle \neq 0$:

on trouve :

$$\alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, 2\rho = l\epsilon_1 + (l-2)\epsilon_2 + ... + (l-2(i-1))\epsilon_i + ... - (l-2)\epsilon_l - l\epsilon_{l+1}.$$

α	$\langle\alpha,\alpha_2\rangle$	$\langle\alpha,\rho\rangle$
α_{12}	-1	1
α_{13}	1	2
α_{23}	2	1
...	...	...
α_{2i}	1	$i-2$
...	...	...
α_{2l+1}	1	$l-1$
α_{34}	1	1
...	...	...
α_{3i}	-1	$i-3$
...	...	...
α_{3l+1}	-1	$l-2$

B.1.3 Cas général, pour obtenir $\gamma(A_l,\alpha_i)$, les racines positives α telles que $\langle\alpha,\alpha_i\rangle \neq 0$:

α	$\langle\alpha,\alpha_i\rangle$	$\langle\alpha,\rho\rangle$
α_{ii+1}	2	1
$\alpha_{ij}, i+2 \leqslant j \leqslant l+1$	1	$j-i$
$\alpha_{i+1j}, i+2 \leqslant j \leqslant l+1$	-1	$j-i-1$
$\alpha_{ji}, 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$i-j$
$\alpha_{ji+1}, 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	$i+1-j$

B.2 Système du type $D_l, l \geqslant 3$

B.2.1 Pour calculer $\gamma(D_l,\alpha_i)$:

α	$\langle\alpha,\alpha_i\rangle$	$\langle\alpha,\rho\rangle$
α_{ii+1}	2	1
$\alpha_{ji}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$i-j$
$\alpha_{ji+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	i-j+1
$\alpha_{ij}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	j-i
$\alpha_{i+1j}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	j-i-1
$\beta_{ji}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	2l-j-i
$\beta_{ji+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$2l-j-i-1$
$\beta_{ij}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	$2l-i-j$
$\beta_{i+1j}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	$2l-i-1-j$

B.2.2 Pour calculer $\gamma(D_l, \alpha_{l-1})$ et $\gamma(D_l, \alpha_l)$, pour tout i $\leqslant l-2$:

α	$\langle \alpha, \alpha_l \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\alpha_{il-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-2$	-1	l-i-1
$\alpha_{il}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-2$	-1	l-i
$\beta_{jl}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-2$	1	l-i
$\beta_{jl-1}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	l-i+1
$\beta_{l-1j}, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	2	1

B.2.3 Calculs pour $\gamma(D_3, \alpha_2)$:

α	$\langle \alpha, \alpha_2 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
α_{12}	-1	1
α_{13}	1	2
α_{23}	2	1
β_{13}	-1	2
β_{12}	1	3

B.2.4 Calculs pour $\gamma(D_3, \alpha_3)$:

α	$\langle \alpha, \alpha_3 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
α_{12}	-1	1
α_{13}	-1	2
β_{12}	1	3
β_{13}	1	2
β_{23}	2	1

B.2.5 Calculs pour $\gamma(D_4, \alpha_i)$:

• Soit $l = 4, i = 1$:
en utilisant la formule 8.3.4 :

$$\gamma(D_4, \alpha_1) = \frac{\gamma(2/3)\gamma(1/6)}{\gamma(1/3)}.$$

Or, en utilisant la formule de duplication de la fonction Gamma avec $x = 1/6$, on a :

$$\Gamma(1/6) = \pi^{1/2} 2^{2/3} \frac{\Gamma(2/6)}{\Gamma(4/6)} = \pi^{1/2} 2^{2/3} \gamma(1/3).$$

Puis avec $x = 1/3$:

$$\Gamma(5/6) = \pi^{1/2} 2^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} = \pi^{1/2} 2^{1/3} \gamma(2/3).$$

On obtient :

$$\gamma(D_4, \alpha_1) = \frac{\gamma(1/6)\Gamma(5/6)\pi^{1/2} 2^{2/3}}{\Gamma(1/6)\pi^{1/2} 2^{1/3}}.$$

$$\gamma(D_4, \alpha_1) = 2^{1/3}.$$

Remarque B.2.1. En utilisant la formule des compléments pour la fonction Gamma, avec $x = 1/6$:
$\Gamma(1/6)\Gamma(5/6) = 2\pi$ et $\Gamma(1/6) = \pi^{1/2}2^{2/3}\frac{\Gamma(2/6)}{\Gamma(4/6)} = \pi^{1/2}2^{2/3}\gamma(1/3)$,
on a le même résultat.

• Soit $l = 4, i = 2$, alors $n_2^{-1}k^2 = 2^{-2/3}$.
De plus

$$\gamma(D_4, \alpha_2) = \gamma(1/6)^{-1}\gamma(5/6)\gamma(2/3)^{-1}\gamma(1/3)^3 = \gamma(1/3)^4\gamma(1/6)^{-2}.$$

D'après $\gamma(D_4, \alpha_1)$, on a : $\gamma(1/6) = 2^{1/3}\gamma(1/3)^2$.
Donc : $\gamma(D_4, \alpha_2) = 2^{-2/3}$.
• Soit $l = 4, i = 3$: alors $n_3^{-1}k^2 = 2^{1/3}$.
De plus

$$\gamma(D_4, \alpha_3) = \gamma(4/6)\gamma(2/6)^{-1}\gamma(1/6)\gamma(1/2) = \gamma(1/3)^{-1}\gamma(1/6)\gamma(2/3).$$

D'après $\gamma(D_4, \alpha_1)$, on a : $\gamma(1/6) = 2^{1/3}\gamma(1/3)^2$. Donc :

$$\gamma(D_4, \alpha_3) = \gamma(1/3)^{-1}2^{1/3}\gamma(1/3)^2\gamma(2/3) = 2^{1/3}.$$

• Soit $l = 4, i = 4$:, alors $n_4^{-1}k^2 = 2^{1/3}$.
De plus

$$\gamma(D_4, \alpha_4) = \gamma(1/6)^2\gamma(2/6)^{-1}\gamma(1/6)^{-1}\gamma(4/6)\gamma(3/6) = \gamma(1/6)\gamma(1/3)^{-2}.$$

D'après $\gamma(D_4, \alpha_1)$, on a : $\gamma(1/6) = 2^{1/3}\gamma(1/3)^2$. Donc :

$$\gamma(D_4, \alpha_4) = \gamma(1/3)^2 2^{1/3}\gamma(1/3)^{-2} = 2^{1/3}.$$

B.2.6 Calculs pour $\gamma(D_5, \alpha_i)$:

Soit $l = 5$:

$$\gamma(D_5, \alpha_i) = \gamma(8 - 2i/8)\gamma(4 - i/8)^{-1}\gamma(9 - i/8)\gamma(10 - 2i/8)^{-1}\gamma(5 - i/8)\gamma(i/8).$$

• $i = 1, n_1^{-1}k^2 = 2^{1/2}$.

$$\gamma(D_5, \alpha_1) = \gamma(3/4)\gamma(1/8)\gamma(3/8)^{-1}.$$

Or $\Gamma(1/8)\Gamma(5/8) = \pi^{1/2}2^{3/4}\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(3/8)\Gamma(7/8) = \pi^{1/2}2^{1/4}\Gamma(3/4)$.
Puis avec $\gamma(3/4) = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ etc... On obtient :

$$\gamma(D_5, \alpha_1) = 2^{1/2}.$$

• $i = 2, n_2^{-1}k^2 = 2^{-1/2}$.

$$\gamma(D_5, \alpha_2) = \gamma(7/8)\gamma(3/8)\gamma(3/4)^{-1}.$$

Or $\gamma(7/8) = \gamma(1/8)^{-1}$ donc, d'après le cas $i = 1$, on obtient :

$$\gamma(D_5, \alpha_2) = 2^{-1/2}.$$

• $i = 3, n_3^{-1}k^2 = 2^{-1/2}$.

$$\gamma(D_5, \alpha_3) = \gamma(1/8)^{-1}\gamma(3/8)\gamma(3/4)^{-1}$$

Donc, d'après le cas $i = 2$, on obtient :

$$\gamma(D_5, \alpha_3) = 2^{-1/2}.$$

• $i = 4, n_4^{-1}k^2 = 2^{1/2}$.

$$\gamma(D_5, \alpha_4) = \gamma(1/8)\gamma(5/8)\gamma(1/4)^{-1} = \gamma(3/4)\gamma(1/8)\gamma(3/8)^{-1}.$$

Donc, d'après le cas $i = 1$, on obtient :

$$\gamma(D_5, \alpha_4) = 2^{1/2}.$$

• $i = 5, n_5^{-1}k^2 = 2^{1/2}$.

$$\gamma(D_5, \alpha_5) = \gamma(1/8)\gamma(5/8)\gamma(1/4)^{-1}$$

Donc, d'après le cas $i = 4$, on obtient :

$$\gamma(D_5, \alpha_5) = 2^{1/2}.$$

B.3 Système du type E_6

B.3.1 Cas $i = 1$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_i \quad 2 \leqslant i \leqslant 5$	-1	$i - 1$
$\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	-1	i
$\epsilon_3 + \epsilon_i, \quad 4 \leqslant i \leqslant 5$	-1	i+1
$\epsilon_4 + \epsilon_5$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	2	1

B.3.2 Cas $i = 2$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_2 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$\epsilon_1 + \epsilon_i \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	1	$i - 1$
$-\epsilon_1 + \epsilon_i \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	-1	$i - 1$
$\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	1	i
$-\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	-1	i-2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	3

B.3.3 Cas $i = 3$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_3 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_3 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_i \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	-1	$i-1$
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_i \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	1	$i-1$
$\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	1	i
$-\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5$	-1	i-2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	1
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	2

B.3.4 Cas $i = 4$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_4 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_4 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 4 \leqslant i \leqslant 5$	- 1	i
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	2	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_i, \quad 4 \leqslant i \leqslant 5$	1	i-2
$\epsilon_3 + \epsilon_i, \quad 4 \leqslant i \leqslant 5$	1	i+1
$-\epsilon_3 + \epsilon_i \quad 4 \leqslant i \leqslant 5$	-1	i-3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	2

B.3.5 Cas $i = 5$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_5 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_5 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	2
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	1	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	2
$-\epsilon_1 + \epsilon_4$	1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	- 1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	4
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	-1	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	2
$\epsilon_3 + \epsilon_5$	-1	6
$-\epsilon_3 + \epsilon_4$	2	1
$-\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	2
$\epsilon_4 + \epsilon_5$	1	7
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	-1	1
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	3

B.3.6 Cas $i = 6$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_6 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_6 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	3
$\epsilon_1 + \epsilon_5$	1	4
$-\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_5$	1	4
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	- 1	4
$\epsilon_2 + \epsilon_5$	1	5
$-\epsilon_2 + \epsilon_4$	-1	2
$-\epsilon_2 + \epsilon_5$	1	3
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	5
$\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	6
$-\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	1
$-\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	2
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	2	1
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5)$	-1	4

B.4 Système du type E_7

B.4.1 Cas $i = 1$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 2 \leqslant i \leqslant 6$	-1	$i - 1$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 2 \leqslant i < j \leqslant 6$	-1	$i + j - 2$
$\epsilon_8 - \epsilon_7$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \sum_{j=2}^{6} \epsilon_j)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \sum_{j=2}^{6} \epsilon_j)$	2	1
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	2
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	6

B.4.2 Cas $i = 2$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_2 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	1	$i-1$
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	-1	$i-1$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	1	i
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	-1	$i-2$
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	3

B.4.3 Cas $i = 3$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_3 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_3 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	-1	$i-1$
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	1	$i-1$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	1	i
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 6$	-1	i-2
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \sum_{j=2}^{6} \epsilon_j)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \sum_{j=3}^{6} \epsilon_j)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	1

B.4.4 Cas $i = 4$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_4 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_4 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 6$	- 1	j
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	2	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 6$	1	j-2
$\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 6$	1	j+1
$-\epsilon_3 + \epsilon_j \quad 4 \leqslant j \leqslant 6$	-1	j-3
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	2

B.4.5 Cas $i = 5$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_5 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_5 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	2
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	2
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	1	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_4$	1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	- 1	3
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	-1	1
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	4
$-\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	2
$-\epsilon_3 + \epsilon_4$	2	1
$\epsilon_3 + \epsilon_5$	-1	6
$\epsilon_3 + \epsilon_6$	-1	7
$-\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	2
$-\epsilon_3 + \epsilon_6$	1	3
$\epsilon_4 + \epsilon_5$	1	7
$\epsilon_4 + \epsilon_6$	1	8
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	-1	1
$-\epsilon_4 + \epsilon_6$	-1	2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	4

B.4.6 Cas $i = 6$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_6 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_6 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_5$	1	4
$-\epsilon_1 + \epsilon_5$	1	4
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_5$	1	5
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	- 1	4
$-\epsilon_2 + \epsilon_4$	- 1	2
$\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	6
$-\epsilon_3 + \epsilon_5$	1	2
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	5
$-\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	1
$\epsilon_4 + \epsilon_6$	-1	8
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	2	1
$-\epsilon_4 + \epsilon_6$	1	2
$\epsilon_5 + \epsilon_6$	1	9
$-\epsilon_5 + \epsilon_6$	-1	1
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	4

B.4.7 Cas $i = 7$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_7 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_7 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 + \epsilon_5$	-1	4
$-\epsilon_1 + \epsilon_5$	-1	4
$\epsilon_1 + \epsilon_6$	1	5
$-\epsilon_1 + \epsilon_6$	1	5
$\epsilon_2 + \epsilon_5$	- 1	5
$-\epsilon_2 + \epsilon_5$	-1	3
$\epsilon_2 + \epsilon_6$	1	6
$-\epsilon_2 + \epsilon_6$	1	4
$\epsilon_3 + \epsilon_5$	-1	6
$-\epsilon_3 + \epsilon_5$	-1	2
$\epsilon_3 + \epsilon_6$	1	7
$-\epsilon_3 + \epsilon_6$	1	3
$\epsilon_4 + \epsilon_5$	-1	7
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	-1	1
$\epsilon_4 + \epsilon_6$	1	8
$-\epsilon_4 + \epsilon_6$	1	2
$-\epsilon_5 + \epsilon_6$	2	1
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6)$	1	6

B.5 Système du type E_8

B.5.1 Cas $i = 1$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 2 \leqslant i \leqslant 7$	-1	$i - 1$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 2 \leqslant i < j \leqslant 7$	-1	$i + j - 2$
$\epsilon_1 + \epsilon_8$	1	23
$-\epsilon_2 + \epsilon_8$	1	22
$-\epsilon_3 + \epsilon_8$	1	21
$-\epsilon_4 + \epsilon_8$	1	20
$-\epsilon_5 + \epsilon_8$	1	19
$-\epsilon_6 + \epsilon_8$	1	18
$-\epsilon_7 + \epsilon_8$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{7} \epsilon_j)$	-1	22
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \sum_{j=3}^{7} \epsilon_j)$	-1	21
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \sum_{j=4}^{7} \epsilon_j)$	-1	20
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	19
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	18
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	2	1
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	2
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	7

B.5.2 Cas $i = 2$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_2 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j-1$
$\epsilon_1 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j-1$
$\epsilon_8 + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	1	$j+22$
$\epsilon_8 - \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	-1	$24-j$
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j-2$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	1	j
$\beta + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{7} \epsilon_j)$	1	22
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \sum_{j=3}^{7} \epsilon_j)$	-1	21
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	7

B.5.3 Cas $i = 3$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_3 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_3 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_j \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j-1$
$\epsilon_1 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j-1$
$\epsilon_8 + \epsilon_1$	-1	23
$\epsilon_8 - \epsilon_1$	1	23
$\epsilon_8 - \epsilon_2$	-1	22
$\epsilon_8 + \epsilon_2$	1	24
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	2	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j-2$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant 7$	1	j
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	20
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	19
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	19
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	18
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	18
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	15

B.5.4 Suite du cas $i = 3$, les racines positives α telles que $\langle\alpha_j, \alpha_3\rangle \neq 0$:

α	$\langle\alpha, \alpha_3\rangle$	$\langle\alpha, \rho\rangle$
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	2
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	1

B.5.5 Cas $i = 4$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_4 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_4 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	-1	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	2
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	2	1
$-\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j-2$
$-\epsilon_2 + \epsilon_8$	1	22
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 7$	-1	j
$\epsilon_2 + \epsilon_8$	-1	24
$-\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j-3$
$-\epsilon_3 + \epsilon_8$	-1	21
$\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 4 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j+1$
$\epsilon_3 + \epsilon_8$	1	25
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	21
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	18
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	20
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14

B.5.6 Suite du cas $i = 4$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_4 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_4 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	3
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	2

B.5.7 Cas $i = 5$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_5 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_5 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	-1	$3 - j$
$\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	-1	$j + 1$
$-\epsilon_3 + \epsilon_4$	2	1
$\epsilon_3 + \epsilon_8$	-1	25
$-\epsilon_3 + \epsilon_8$	1	21
$\epsilon_4 - \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	1	$4 - j$
$\epsilon_4 + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2$	1	$j + 2$
$-\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 5 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j - 3$
$\epsilon_3 + \epsilon_j, \quad 5 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j + 1$
$-\epsilon_4 + \epsilon_j, \quad 5 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j - 4$
$\epsilon_4 + \epsilon_j, \quad 5 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j + 2$
$\epsilon_4 + \epsilon_8$	1	26
$-\epsilon_4 + \epsilon_8$	-1	20
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	20
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	19
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	19
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	18
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14

B.5.8 Suite du cas $i = 5$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_5 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_5 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	4
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	3

B.5.9 Cas $i = 6$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_6 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_6 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_j + \epsilon_5 \quad 1 \leqslant j \leqslant 3$	1	$5 - j$
$\epsilon_j + \epsilon_5, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3$	1	$j + 3$
$-\epsilon_4 + \epsilon_5$	2	1
$-\epsilon_5 + \epsilon_j, \quad 6 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j - 5$
$\epsilon_5 + \epsilon_j, \quad 6 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j + 3$
$\epsilon_4 + \epsilon_8$	-1	26
$-\epsilon_4 + \epsilon_8$	1	20
$\epsilon_5 + \epsilon_8$	1	27
$-\epsilon_5 + \epsilon_8$	-1	19
$-\epsilon_j + \epsilon_4 \quad 1 \leqslant j \leqslant 3$	-1	$4 - j$
$\epsilon_j + \epsilon_4, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3$	-1	$j + 2$
$-\epsilon_4 + \epsilon_j, \quad 6 \leqslant j \leqslant 7$	1	$j - 4$
$\epsilon_4 + \epsilon_j, \quad 6 \leqslant j \leqslant 7$	-1	$j + 2$
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	19
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	18
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	18
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16

B.5.10 Suite du cas $i = 6$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_6 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_6 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	5
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	4

B.5.11 Cas $i = 7$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_7 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_7 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_j + \epsilon_5 \quad 1 \leqslant j \leqslant 4$	-1	$5 - j$
$\epsilon_j + \epsilon_5, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4$	-1	$j + 3$
$-\epsilon_j + \epsilon_6 \quad 1 \leqslant j \leqslant 4$	1	$6 - j$
$\epsilon_j + \epsilon_6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4$	1	$j + 4$
$-\epsilon_5 + \epsilon_6$	2	1
$\epsilon_5 + \epsilon_7$	-1	10
$-\epsilon_5 + \epsilon_7$	1	2
$-\epsilon_6 + \epsilon_7$	-1	1
$\epsilon_6 + \epsilon_7$	1	11
$\epsilon_6 + \epsilon_8$	1	28
$-\epsilon_6 + \epsilon_8$	-1	18
$\epsilon_5 + \epsilon_8$	-1	27
$-\epsilon_5 + \epsilon_8$	1	19
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	18
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14

B.5.12 Suite du cas $i = 7$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_7 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_7 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	-1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	1	6
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	5

B.5.13 Cas $i = 8$, les racines positives α telles que $\langle \alpha_j, \alpha_8 \rangle \neq 0$:

α	$\langle \alpha, \alpha_8 \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$-\epsilon_j + \epsilon_6 \quad 1 \leqslant j \leqslant 5$	-1	$6 - j$
$\epsilon_j + \epsilon_6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 5$	-1	$6 + j - 2$
$-\epsilon_6 + \epsilon_7$	2	1
$-\epsilon_j + \epsilon_7, \quad 1 \leqslant j \leqslant 5$	1	$j - 1$
$\epsilon_j + \epsilon_7, \quad 1 \leqslant j \leqslant 5$	1	$j + 7 - 2$
$\epsilon_6 + \epsilon_8$	-1	28
$-\epsilon_6 + \epsilon_8$	1	18
$\epsilon_7 + \epsilon_8$	1	29
$-\epsilon_7 + \epsilon_8$	-1	17
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	17
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	16
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	15
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	14
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	13
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	12
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	11
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	10
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	9
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	8
$\beta + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7)$	1	7
$\beta + \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7)$	-1	6

Annexe C

Annexes de calculs du chapitre 8 pour les systèmes B, C, F, G

C.1 Système du type $B_l, l \geqslant 2$: Formule (F')

C.1.1 Cas $i = 1$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_1, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_1	$2\epsilon_1$	2	l
ϵ_2	$2\epsilon_2$	-2	$l-1$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	1
$\epsilon_1 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_1 - \epsilon_j$	1	$j-1$
$\epsilon_1 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_1 + \epsilon_j$	1	$2l-j+1$
$\epsilon_2 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_2 - \epsilon_j$	-1	$j-2$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_2 + \epsilon_j$	-1	$2l-j$

C.1.2 Cas $i = l$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_l, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_l	$2\epsilon_l$	2	l
$\epsilon_j - \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	$\epsilon_j - \epsilon_l$	-1	$l-j$
$\epsilon_j + \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	$\epsilon_j + \epsilon_l$	1	$l-j+2$

C.1.3 Cas $2 \leqslant i \leqslant l-1$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_i	$2\epsilon_i$	2	$l-i+1$
ϵ_{i+1}	$2\epsilon_{i+1}$	-2	$l-i$
$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	2	1
$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$	1	$j-i$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	1	$2l-j-i+2$
$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j$	-1	$-i+j-1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j$	-1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_j - \epsilon_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_j - \epsilon_i$	-1	$i-j$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	1	$2l-j-i+2$
$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}$	1	$i-j+1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j$	-1	$2l-j-i+1$

C.2 Système du type $B_l, l \geqslant 2$: Formule (F”)

C.2.1 Cas $i = 1$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
ϵ_1	1	$(2l-1)/2$
ϵ_2	-1	$(2l-3)/2$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	1
$\epsilon_1 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	1	$j-1$
$\epsilon_1 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	1	$2l-j$
$\epsilon_2 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	1	$j-2$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	-1	$2l-j-1$

C.2.2 Cas $i = l$:

α	$\langle \alpha, \alpha_l^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
ϵ_l	2	$1/2$
$\epsilon_j - \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	-2	$l-j$
$\epsilon_j + \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	2	$l-j+1$

C.2.3 Cas $2 \leqslant i \leqslant l-1$:

α	$\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
ϵ_i	1	$(2l-2i+1)/2$
ϵ_{i+1}	-1	$(2l-2i-1)/2$
$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	2	1
$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	$j-i$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	$-i+j-1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	$2l-j-i$
$\epsilon_j - \epsilon_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$i-j$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	$i-j+1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$2l-j-i$

C.3 Système du type $C_l, l \geqslant 3$: formule du type (F')

C.3.1 Cas $i = 1$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_1, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_1	$2\epsilon_1$	2	l
ϵ_2	$2\epsilon_2$	-2	$l-1$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	1
$\epsilon_1 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_1 - \epsilon_j$	1	$j-1$
$\epsilon_1 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_1 + \epsilon_j$	1	$2l-j+1$
$\epsilon_2 - \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_2 - \epsilon_j$	-1	$j-2$
$\epsilon_2 + \epsilon_j, \quad 3 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_2 + \epsilon_j$	-1	$2l-j$

C.3.2 Cas $i = l$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_l, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_l	$2\epsilon_l$	2	l
$\epsilon_j - \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	$\epsilon_j - \epsilon_l$	-1	$l-j$
$\epsilon_j + \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	$\epsilon_j + \epsilon_l$	1	$l-j+2$

C.3.3 Cas $1 \leqslant i \leqslant l$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
$2\epsilon_i$	ϵ_i	1	$2l-2i+1$
$2\epsilon_{i+1}$	ϵ_{i+1}	-1	$2l-2i-1$
$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	2	1
$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$	1	$j-i$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j$	-1	$-i+j-1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j$	-1	$2l-j-i$
$\epsilon_j - \epsilon_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_j - \epsilon_i$	-1	$i-j$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_i + \epsilon_j$	1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}$	1	$i-j+1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j$	-1	$2l-j-i$

C.4 Système du type $C_l, l \geqslant 3$: formule du type (F")

C.4.1 Cas $i = l$:

α	$\langle \alpha, \alpha_l^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$2\epsilon_l$	2	2
$\epsilon_j - \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	-1	$l-j$
$\epsilon_j + \epsilon_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant l-1$	1	$l-j+2$

C.4.2 Cas $1 \leqslant i \leqslant l-1$:

α	$\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$2\epsilon_i$	2	$2l-2i+1$
$2\epsilon_{i+1}$	-2	$2l-2i$
$\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$	2	1
$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	$j-i$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	1	$2l-j-i+2$
$\epsilon_{i+1} - \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	$-i+j-1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad i+2 \leqslant j \leqslant l$	-1	$2l-j-i+1$
$\epsilon_j - \epsilon_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$i-j$
$\epsilon_i + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	$2l-j-i+2$
$\epsilon_j - \epsilon_{i+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	1	$i-j+1$
$\epsilon_{i+1} + \epsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1$	-1	$2l-j-i+1$

C.5 Système du type F_4 : formule (F')

C.5.1 Cas $i = 1$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_1, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_2	$2\epsilon_2$	2	3
ϵ_3	$2\epsilon_3$	-2	2
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	-1	5
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	$\epsilon_1 - \epsilon_3$	1	6
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	$\epsilon_1 + \epsilon_2$	1	11
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	$\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	10
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	$\epsilon_2 - \epsilon_4$	1	2
$\epsilon_2 - \epsilon_3$	$\epsilon_2 - \epsilon_3$	2	1
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	$\epsilon_3 - \epsilon_4$	-1	1
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	$\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	4
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	2	5
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	2	4
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-2	4
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-2	3

C.5.2 Cas $i = 2$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_2, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_3	$2\epsilon_3$	2	2
ϵ_4	$2\epsilon_4$	-2	1
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	$\epsilon_1 - \epsilon_3$	-1	6
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	$\epsilon_1 - \epsilon_4$	1	7
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	$\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	10
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	$\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	9
$\epsilon_2 - \epsilon_3$	$\epsilon_2 - \epsilon_3$	-1	1
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	$\epsilon_2 - \epsilon_4$	1	2
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	$\epsilon_3 - \epsilon_4$	2	1
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	$\epsilon_2 + \epsilon_3$	1	5
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	$\epsilon_2 + \epsilon_4$	-1	4
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-2	5
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	2	6
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	2	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-2	2

C.5.3 Cas $i = 3$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_3, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_4	$2\epsilon_4$	2	1
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	$\epsilon_1 - \epsilon_4$	-1	7
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	$\epsilon_1 + \epsilon_4$	1	9
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	$\epsilon_2 - \epsilon_4$	-1	2
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	$\epsilon_3 - \epsilon_4$	-1	1
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	$\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	4
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	$\epsilon_3 + \epsilon_4$	1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	7
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	6
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	5
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	4
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	4
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	1

C.5.4 Cas $i = 4$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_4, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
ϵ_1	$2\epsilon_1$	1	8
ϵ_2	$2\epsilon_2$	-1	3
ϵ_3	$2\epsilon_3$	-1	2
ϵ_4	$2\epsilon_4$	-1	1
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	1	5
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	$\epsilon_1 - \epsilon_3$	1	6
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	$\epsilon_1 - \epsilon_4$	1	7
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	$\epsilon_2 + \epsilon_3$	-1	5
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	$\epsilon_2 + \epsilon_4$	-1	4
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	2	1
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-1	7
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	4

C.6 Système du type F_4 : formule (F”)

C.6.1 Cas $i = 1$:

α	$\langle\alpha, \alpha_1^\vee\rangle$	$\langle\alpha, \rho\rangle$
ϵ_2	1	$5/2$
ϵ_3	-1	$3/2$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	-1	3
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	1	4
$\epsilon_1 + \epsilon_2$	1	8
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	7
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	1	2
$\epsilon_2 - \epsilon_3$	2	1
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	-1	1
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	1	3
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	$7/2$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-1	$5/2$

C.6.2 Cas $i = 2$:

α	$\langle\alpha, \alpha_2^\vee\rangle$	$\langle\alpha, \rho\rangle$
ϵ_3	1	$3/2$
ϵ_4	-1	$1/2$
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	-1	4
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	1	5
$\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	7
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	-1	5
$\epsilon_2 - \epsilon_3$	-1	4
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	1	2
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	2	1
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	1	4
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	-1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-1	$7/2$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	$9/2$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-1	1

C.6.3 Cas $i = 3$:

α	$\langle \alpha, \alpha_3^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
ϵ_4	2	1/2
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	-2	5
$\epsilon_1 + \epsilon_4$	2	6
$\epsilon_2 - \epsilon_4$	-2	2
$\epsilon_3 - \epsilon_4$	-2	1
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	2	3
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	2	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	5
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	9/2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	7/2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	5/2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	3
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	1
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	-1	1/2

C.6.4 Cas $i = 4$:

α	$\langle \alpha, \alpha_4^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
ϵ_1	1	11/2
ϵ_2	-1	5/2
ϵ_3	-1	3/2
ϵ_4	-1	1/2
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	3
$\epsilon_1 - \epsilon_3$	2	4
$\epsilon_1 - \epsilon_4$	2	5
$\epsilon_2 + \epsilon_3$	-2	4
$\epsilon_2 + \epsilon_4$	-2	3
$\epsilon_3 + \epsilon_4$	-2	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	2	1/2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	-1	5
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)$	1	1
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	2
$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$	1	3

C.7 Système du type G_2 : Formule (F')

C.7.1 Cas $i = 1$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_1, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	1
$-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	$\frac{1}{3}(-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$	-1	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	2
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	1	3
$\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3$	$\frac{1}{3}(\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3)$	1	4

C.7.2 Cas $i = 2$:

α	$\alpha^\vee$	$\langle \alpha_2, \alpha^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho^\vee \rangle$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_1 - \epsilon_2$	-3	1
$-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	$\frac{1}{3}(-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$	2	1
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	3	2
$-\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3$	$\frac{1}{3}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3)$	1	5
$\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3$	$\frac{1}{3}(\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3)$	-1	4

C.8 Système du type G_2 : Formule (F")

C.8.1 Cas $i = 1$:

α	$\langle \alpha, \alpha_1^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	2	1
$-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	-3	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	-1	4
$-\epsilon_2 + \epsilon_3$	1	5
$\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3$	3	6

C.8.2 Cas $i = 2$:

α	$\langle \alpha, \alpha_2^\vee \rangle$	$\langle \alpha, \rho \rangle$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	-1	1
$-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	2	3
$-\epsilon_1 + \epsilon_3$	1	4
$-\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3$	1	9
$\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3$	-1	6

Annexe D

Annexes de calculs du chapitre 10

Le cas E_8

D.1 Formules trigonométriques élémentaires

On va utiliser les formules trigonométriques élémentaires suivantes.

$$s(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$\Gamma(x)^2 = \gamma(x)s(x) \tag{1}$$

$$\sin(3x) = \sin x(4\cos^2 x - 1) = \sin x(3 - 4\sin^2 x) \tag{2}$$

$$\cos(\pi/5) = \sin(3\pi/10) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}; \ \frac{1}{\cos(\pi/5)} = \sqrt{5} - 1 \tag{3a}$$

$$\cos(2\pi/5) = \sin(\pi/10) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \tag{3b}$$

$$\sin^2(\pi/5) = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \tag{3c}$$

$$\sin(\pi/5)\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}}{4} \tag{3d}$$

$$\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin(\pi/5) \tag{3e}$$

$$\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(\pi/10)} = 4\cos^2(\pi/5) \tag{4}$$

$$\sin(\pi/15)\sin(4\pi/15) = \frac{1}{2}(\cos(\pi/5) - \cos(\pi/3)) = \frac{\sqrt{5}-1}{8} \tag{5}$$

On pose

$$\alpha := \sin(\pi/5).$$

Alors :

$$\sin(2\pi/15) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6a}$$

$$\sin(4\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\alpha + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6b}$$

$$\sin(8\pi/15) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6c}$$

$$\sin(\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\alpha - \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6d}$$

Ensuite :

$$\sin(\pi/15)\cdot\sin(4\pi/15) = \frac{-1+\sqrt{5}}{8} \tag{7a}$$

$$\sin(2\pi/15)\cdot\sin(8\pi/15) = \frac{1+\sqrt{5}}{8} \tag{7b}$$

$$\sin(7\pi/30) = \frac{1-\sqrt{5}}{8} + \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}\alpha \tag{8a}$$

$$\sin(11\pi/30) = \frac{1+\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \tag{8b}$$

$$\sin(7\pi/30)\sin(13\pi/30) = \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \sin(3\pi/10)^2 \tag{8c}$$

$$\sin(4\pi/15)\cdot\sin(8\pi/15) = \sin(3\pi/10)\cdot\sin(11\pi/30). \tag{9}$$

D.2 Preuve de $\Gamma(E_8) = \Gamma(E_8, \alpha_8)m(E_8)$

Les racines positives forment 2 groupes :

• 56 racines :

$$\alpha(\pm, ij) = \pm\epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \le i < j \le 8,$$

• 64 racines :

$$\alpha(\pm,\pm,\dots) = \frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^{7})\ s_i\epsilon_i,\ \ s_i = \pm 1,\ \prod s_i = 1,$$

Soient, $56 + 64 = 120$ racines positives.

Le nombre de Coxeter $h = 30$.

$$\begin{aligned}\gamma_F(E_8) &:= (\gamma(E_8,\alpha_1),\dots,\gamma(E_8,\alpha_8)).\\ &= 2^{-13/15}3^{-2/5}5^{-1/6}(2,3,4,6,5,4,3,2).\\ &= (2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6}, 2^{-13/15}3^{3/5}5^{-1/6}, 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}, 2^{2/15}3^{3/5}5^{-1/6},\\ &\quad 2^{-13/15}3^{-2/5}5^{5/6}, 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}, 2^{-13/15}3^{3/5}5^{-1/6}, 2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6}).\end{aligned}$$

$$m(E_8) = (2\cos(\pi/5), 4\cos(\pi/5)\cos(7\pi/30), 4\cos(\pi/5)\cos(\pi/30),$$
$$8\cos^2(\pi/5)\cos(2\pi/15), 8\cos^2(\pi/5)\cos(7\pi/30), 4\cos(\pi/5)\cos(2\pi/15), 2\cos(\pi/30), 1).$$
$$= (1,62; 2,40; 3,22; 4,78; 3,89; 2,96; 1,99; 1).$$

Remarque D.2.1. Ce sont **les masses des particules dans le modèle d'Ising critique avec le champ magnétique (Zamolodchikov).**

$$\gamma(E_8, \alpha_1) = \frac{\gamma(3/30)\gamma(5/30)\gamma(16/30)}{\gamma(1/30)\gamma(8/30)\gamma(10/30)\gamma(12/30)\gamma(23/30)}.$$
$$= 2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.$$

$$\Gamma(E_8, \alpha_1) = \frac{\Gamma(3/30)\Gamma(5/30)\Gamma(16/30)}{\Gamma(1/30)\Gamma(8/30)\Gamma(10/30)\Gamma(12/30)\Gamma(23/30)}.$$
$$= 2^{16/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(\pi/15)\cdot\left(\frac{\sin(2\pi/5)\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}{\sin(\pi/10)}\right)^{1/2}.$$

$$\gamma(E_8, \alpha_2) = \frac{\gamma(2/30)\gamma(3/30)\gamma(10/30)\gamma(12/30)\gamma(21/30)}{\gamma(1/30)\gamma(6/30)\gamma(7/30)\gamma(8/30)\gamma(15/30)\gamma(17/30)\gamma(24/30)}.$$
$$= 2^{-13/15}3^{3/5}5^{-1/6}.$$
$$\Gamma(E_8, \alpha_2) = \frac{\Gamma(2/30)\Gamma(3/30)\Gamma(10/30)\Gamma(12/30)\Gamma(21/30)}{\Gamma(1/30)\Gamma(6/30)\Gamma(7/30)\Gamma(8/30)\Gamma(15/30)\Gamma(17/30)\Gamma(24/30)}.$$
$$= 2^{-103/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\frac{\sin(\pi/5)}{\sin(\pi/15)}\cdot[\sin(4\pi/15)\sin(8\pi/15)\sin(\pi/10)\sin(3\pi/10)\sin(2\pi/5)]^{-1/2}.$$

En utilisant (7a) et (7b), on obtient :

$$\Gamma(E_8, \alpha_2)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = \frac{1}{2\sin(\pi/15)}.$$

D'un autre côté,

$$m_2 = m_2/m_8 = 4\cos(\pi/5)\sin(4\pi/15) = (1+\sqrt{5})\sin(4\pi/15),$$

d'où :

$$\Gamma(E_8, \alpha_2)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_2/m_8.$$

$$\gamma(E_8, \alpha_3) = \frac{\gamma(8/30)\gamma(15/30)\gamma(22/30)}{\gamma(7/30)\gamma(11/30)\gamma(13/30)\gamma(20/30)\gamma(24/30)}$$
$$= 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.$$

$$\Gamma(E_8,\alpha_3) = \frac{\Gamma(8/30)\Gamma(15/30)\Gamma(22/30)}{\Gamma(7/30)\Gamma(11/30)\Gamma(13/30)\Gamma(20/30)\Gamma(24/30)}.$$

$$= 2^{1/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(4\pi/15)^{-1}\Big(\sin(\pi/5)\sin(7\pi/30)\sin(11\pi/30)\sin(13\pi/30)\Big)^{1/2}.$$

$$= 2^{17/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(8\pi/15)\cdot\left(\frac{\sin(\pi/5)\sin(2\pi/15)}{\sin(4\pi/15)}\right)^{1/2}.$$

De là, on obtient :

$$\Gamma(E_8,\alpha_3)/\Gamma(E_8,\alpha_8) = 2^{-1/2}(1+\sqrt{5})\sin(3\pi/10)\cdot\left(\frac{\sin(11\pi/30)}{\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}\right)^{1/2}.$$

D'autre part :

$$m_3 = 4\sin(3\pi/10)\sin(8\pi/15),$$

d'où :

$$\Gamma(E_8,\alpha_3)/\Gamma(E_8,\alpha_8) = m_3,$$

en utilisant (9).

$$\gamma(E_8,\alpha_4) = \frac{\gamma(1/30)\gamma(4/30)\gamma(11/30)\gamma(20/30)\gamma(24/30)}{\gamma(2/30)\gamma(3/30)\gamma(8/30)\gamma(12/30)\gamma(18/30)\gamma(22/30)\gamma(25/30)}.$$

$$= 2^{2/15}3^{3/5}5^{-1/6}.$$

$$\Gamma(E_8,\alpha_4) = \frac{\Gamma(1/30)\Gamma(4/30)\Gamma(11/30)\Gamma(20/30)\Gamma(24/30)}{\Gamma(2/30)\Gamma(3/30)\Gamma(8/30)\Gamma(12/30)\Gamma(18/30)\Gamma(22/30)\Gamma(25/30)}.$$

$$= 2^{-14/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(2\pi/5)\cdot\left(\frac{\sin(\pi/10)}{\sin(\pi/5)\sin(\pi/15)\sin(2\pi/15)}\right)^{1/2}.$$

On a :

$$m_4 = 8\cdot\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(4\pi/15)\sin(8\pi/15)},$$

(on utilise (9)).
Il s'en suit, en employant (7) et (3), que :

$$\Gamma(E_8,\alpha_4)/\Gamma(E_8,\alpha_8) = m_4.$$

$$\gamma(E_8,\alpha_5) =$$

$$\frac{\gamma(2/30)\gamma(6/30)\gamma(7/30)\gamma(8/30)\gamma(12/30)\gamma(13/30)\gamma(18/30)\gamma(25/30)}{\gamma(4/30)^2\gamma(5/30)\gamma(9/30)\gamma(10/30)\gamma(11/30)\gamma(15/30)\gamma(16/30)\gamma(21/30)\gamma(26/30)}.$$

$$= 2^{-13/15}3^{-2/5}5^{5/6}.$$

$$\Gamma(E_8, \alpha_5) =$$
$$\frac{\Gamma(2/30)\Gamma(6/30)\gamma(7/30)\Gamma(8/30)\Gamma(12/30)\Gamma(13/30)\Gamma(18/30)\Gamma(25/30)}{\Gamma(4/30)^2\Gamma(5/30)\Gamma(9/30)\Gamma(10/30)\Gamma(11/30)\Gamma(15/30)\Gamma(16/30)\Gamma(21/30)\Gamma(26/30)}.$$
$$= 2^{-13/30}3^{1/20}5^{5/12}\pi^{-1}\frac{\sin(3\pi/10)}{\sin(2\pi/5)} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}{\sin(\pi/5)}\right)^{1/2}.$$

En utilisant (3d), (4) et (5), on vérifie sans peine que :

$$\Gamma(E_8, \alpha_5)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = 8\cos^2(\pi/5)\cos(2\pi/15).$$

Donc :

$$\Gamma(E_8, \alpha_5)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_5/m_8.$$

$$\gamma(E_8, \alpha_6) = \frac{\gamma(9/30)\gamma(15/30)\gamma(26/30)}{\gamma(6/30)\gamma(13/30)\gamma(14/30)\gamma(20/30)\gamma(27/30)}.$$
$$= 2^{17/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.$$
$$\Gamma(E_8, \alpha_6) = \frac{\Gamma(9/30)\Gamma(15/30)\Gamma(26/30)}{\Gamma(6/30)\Gamma(13/30)\Gamma(14/30)\Gamma(20/30)\Gamma(27/30)}.$$
$$= 2^{47/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(4\pi/15) \cdot \left(\sin(\pi/5)\sin(\pi/15)\sin(8\pi/15)\right)^{1/2}.$$

On a :

$$m_6 = 4\sin(4\pi/15)\sin(8\pi/15),$$

(en employant (9)), d'où, en utilisant (3c) et (7),

$$\Gamma(E_8, \alpha_6)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_6.$$

$$\gamma(E_8, \alpha_7) = \frac{\gamma(4/30)\gamma(10/30)\gamma(14/30)\gamma(27/30)}{\gamma(2/30)\gamma(9/30)\gamma(12/30)\gamma(15/30)\gamma(19/30)\gamma(28/30)}.$$
$$= 2^{-13/15}3^{3/5}5^{-1/6}.$$
$$\Gamma(E_8, \alpha_7) = \frac{\Gamma(4/30)\Gamma(10/30)\Gamma(14/30)\Gamma(27/30)}{\Gamma(2/30)\Gamma(9/30)\Gamma(12/30)\Gamma(15/30)\Gamma(19/30)\Gamma(28/30)}.$$
$$= 2^{-13/30}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi/5)\sin(\pi/15)}{\sin(2\pi/15)}\right)^{1/2}.$$

En utilisant (7a),

$$\Gamma(E_8, \alpha_7)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = \frac{1+\sqrt{5}}{4\sin(2\pi/15)}.$$

D'un autre côté,

$$m_7 = 2\sin(8\pi/15),$$

d'où, vu (7b) :

$$\Gamma(E_8, \alpha_7)/\Gamma(E_8, \alpha_8) = m_7.$$

$$\gamma(E_8,\alpha_8) = \frac{\gamma(5/30)\gamma(9/30)\gamma(28/30)}{\gamma(1/30)\gamma(10/30)\gamma(14/30)\gamma(18/30).\gamma(29/30)}$$
$$= 2^{2/15}3^{-2/5}5^{-1/6}.$$
$$\Gamma(E_8,\alpha_8) = \frac{\Gamma(5/30)\Gamma(9/30)\Gamma(28/30)}{\Gamma(1/30)\Gamma(10/30)\Gamma(14/30)\Gamma(18/30)\Gamma(29/30)}.$$
$$= 2^{16/15}3^{1/20}5^{-1/12}\pi^{-1}\sin(\pi/15)\cdot\left(\frac{\sin(2\pi/5)\sin(2\pi/15)\sin(4\pi/15)}{\sin(3\pi/10)}\right)^{1/2}.$$

En employant (4), on voit que :

$$\Gamma(E_8,\alpha_1)/\Gamma(E_8,\alpha_8) = 2\cos(\pi/5).$$

$$\Gamma(E_8,\alpha_1)/\Gamma(E_8,\alpha_8) == m_1/m_8.$$

On a donc vérifié que :

$$\Gamma(E_8) = \Gamma(E_8,\alpha_8)m(E_8).$$

Bibliographie

[AA78] G.E. Andrews et R. Askey : A simple proof of Ramanujan's summation of the ${}_1\psi_1$. *Aequationes Math.*, **18**:333–337, 1978.

[ABF+00] C. Ahn, P. Baseilhac, V.A. Fateev, K. Chanju et R. Chaiho : Reflection amplitudes in non-simply laced Toda theories and thermodynamic Bethe Ansatz. *Phys. Let.*, **B481**:114–124, 2000.

[Ada01] V. Adamchik : On the Barnes Function. *Proceedings of the 2001, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (July 22-25, 2001, London, Canada), Academic Press*, pages 15–20, 2001.

[Ale94] W. Alexejevsky : Über eine Classe von Functionen die der Gammafunction analog sind. *Wiedmannsche Buchhandlung*, page 46, 1894.

[And86] G.E. Andrews : « W. Gosper's Proof that $\lim_{q\to 1^-} \gamma_q(x) = \gamma(x)$. »appendix a in q-series : Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra. *Amer. Math. Soc.*, pages 11–109, 1986.

[Art64] E. Artin : *The Gamma function.* Holt Rineart and Winston, 1964.

[Ask78] R. Askey : The q-Gamma and q-Beta functions. *Applic. Anal.*, **8**:125–141, 1978.

[Ask80] R. Askey : Ramanujan' s extensions of the gamma and beta functions. *Amer. Math. Monthly*, **87**:346–359, 1980.

[Bai35] W.N. Bailey : Generalized Hypergeometric Series. *Cambridge Univ. Press.*, **32**, 1935.

[Bar99] E.W. Barnes : The theory of the Gamma function. *The Messenger of Mathematics, Ser.2, Bd 29, S.*, pages 64–128, 1899.

[Bar00a] E.W. Barnes : The Genesis of the Double Gamma Functions. *Proceedings of The London Mathematical Society, Ser 1, Bd. 31, S.*, pages 358–381, 1900.

[Bar00b] E.W. Barnes : The theory of the G-function. *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Bd.3, S.*, pages 264–314, 1900.

[Bar01] E.W. Barnes : The Theory of the Double Gamma Function. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 265–388, 1901.

[Bar04] E.W. Barnes : On the Theory of the Multiple Gamma Function. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Bd.19, S.*, pages 374–425, 1904.

[BCS90] H.W. Braden, P.E. Corrigan, E.and Dorey et R. Sasaki : Affine Toda field theory and exact S-matrices. *Nucl. Phys.*, **B338**:689–746, 1990.

[Ber13] Jacob Bernoulli : *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis et Epistola Gallicè scripta de ludo pilae reticularis.* Basileae : Impensis Thurnisiorum fratrum, 1713.

[Bou81] Nicolas Bourbaki : *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV - VI.* Masson, Paris, 1981.

[Bou2d] Nicolas Bourbaki : *Éléments de mathématique. Fascicule XII. La fonction Gamma. Chapitre 7.* Herman, Paris, 1951,1961(2d).

[CA10] V. Cohen-Aptel : Formule de Fateev, http ://arxiv.org/abs/1012.5203, 2010.

[CAS08] V. Cohen-Aptel et V. Schechtman : Formule d'Euler pour la fonction G de barnes. Preuve de la formule d'Alexejevsky, 2008.

[CAS10] V. Cohen-Aptel et V. Schechtman : Produits Gamma et vecteurs propres de matrices de Cartan, http ://arxiv.org/abs/1010.5945, 2010.

[DO94] H. Dorn et H.J. Otto : Two- and three-point functions in Liouville theory. *Nucl. Phys.*, **B429**:375–388, 1994.

[Eul13] Leonhard Euler : *Institutiones calculi integralis 3rd part,Opera Mathematica*, volume **Vol.13**. Birkhäuser Basel, 1913.

[Fat94] V.A. Fateev : The exact relations between the coupling constants and the masses of particles for the integrable perturbed Conformal Field Theories. *Nucl. Phys.*, **B324**:45–51, 1994.

[Fat02] V.A. Fateev : Normalization factors, reflection amplitudes and integrable systems. *Prog. Math. Phys.,hep-th/0103014*, **23**, 2002.

[FL05] V.A. Fateev et A.V. Litvinov : On differential equation on four-point correlation function in the Conformal Toda Field Theory. *JETP Letters.,arXiv :hep-th/0505120v1*, **81**:594–598, 2005.

[FLO91] A. Fring, H.C. Liao et D.I. Olive : The mass spectrum and coupling in affine Toda theories. *Phys. Let.*, **B266**:82–86, 1991.

[FLZZ97] V.A. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov : Expectation values of boundary fields in the boundary sine-Gordon model. *Physics Letters*, **B 406**:83–88, 1997.

[FLZZ98] V.A. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov : Expectation values of local fields in the Bullough-Dodd model and integrable perturbed conformal field theories. *Nuclear Physics*, **B 516**:652–674, 1998.

[FOW08] Peter J. Forrester et S. Ole Warnaar : The Importance of the Selberg Integral. *Bull. Amer. Math. Soc., arXiv :0710.3981v1*, **45**:489–534, 2008.

[Fre91] M.D. FREEMAN : On the mass spectrum of affine Toda field theory. *Phys. Let.*, **B261**:57–61, 1991.

[FZ90] V.A. FATEEV et A.B. ZAMOLODCHIKOV : Conformal Field Theory and purely elastic S-matrices. *Int. J. Mod. Phys.*, **A5**:1025–1048, 1990.

[Gan66] F.R. GANTMACHER : *Théorie des matrices, Tome 1 et 2.* Dunod, Paris, 1966.

[Gau12] Carl Friedrich GAUSS : *Determinatio seriei nostrae per equationem differentialem secundi ordinis, Werke,Bd. III.* Werke, 1812.

[Gau13] Carl Friedrich GAUSS : *Bd. I - XII,Circa seriem infinitamVol. II, Gottingae MDCCCXIII = Werke, Bd. III.* Werke, 1813.

[Gla77] J. W. L. GLAISHER : On a numerical continued product. *Messenger of Math.*, **6**:71–76, 1877.

[Gla87] J. W. L. GLAISHER : On the product $1^1, 2^2, 3^3, \ldots, n^n$. *Messenger of Math.*, **7**:43–46, 1887.

[Gla93a] J. W. L. GLAISHER : On certain numerical products. *Messenger of Math.*, **23**:145–175, 1893.

[Gla93b] J. W. L. GLAISHER : On products and series involving prime numbers only. *Quart. J. Math.*, **26**:1–74, 1893.

[GR0a] G. GASPER et M. RAHMAN : Basic Hypergeometric Series. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications,Cambridge University Press, Cambridge and New York*, **35**, 1990a.

[Har05] G.H. HARDY : On the expression of the double zeta-function and double gamma function in terms of elliptic functions. *Trans. Cambridge. Phil. Soc.*, **20**:395–427, 1905.

[Hei47] E. HEINE : Untersuchungen über die Reihe ... *J. Reine Angew. Math.*, **34**:285–328, 1847.

[HKO00] C.P. HUGHES, J.P. KEATING et Neil O'CONNEL : Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta Function. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A456**:2611–2627, 2000.

[Höl86] V.O. HÖLDER : Uber eine transcendente function,gottingen. *Dieterichsche Verlags-Buchhandlung*, pages 514–522, 1886.

[Ism77] M.E.-H. ISMAIL : A simple proof of Ramanujan's ${}_1\psi_1$ sum. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**:185–186, 1977.

[Jac04] F.H. JACKSON : A generalization of the functions $\gamma(n)$ and x^n. *Proc. Roy. Soc. London*, **74**:64–72, 1904.

[Kac94] V.G. KAC : *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 1994.

[Kin60] KINKELIN : Ueber eine mit der Gammafunction verwante transcendente und deren Anwendung auf die integralrechnung. *J. Reine Angew. Math.*, **57**:122–158, 1860.

[KLSTS02] S. KHARCHEV, D. LEBEDEV et M. SEMENOV-TIAN-SHANSKY : Unitary representations of $u_q(sl(2,\mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q-deformed Toda chains. *Comm. Math. Phys., arXiv :hep-th/0102180 v2*, **225**:573–609, 2002.

[KM90] T.R. KLASSEN et E. MELZER : Purely elastic scattering theories and their ultraviolet limits. *Nucl. Phys.*, **B338**:485–528, 1990.

[Koo90] T.H. KOORNWINDER : Jacobi functíons as limit cases of q-ultraspherical polynomials. *J.Math.Anal.Appl.*, **148**:44–54, 1990.

[KS00] J.P. KEATING et N.C. SNAITH : Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$. *Comm. Math. Phys.*, **214**:57–89, 2000.

[Kur91] N. KUROKAWA : Multiple sine functions and Selberg zeta functions. *Proc. Japan. Acad.*, **67 A**:61–64, 1991.

[Kur92a] N. KUROKAWA : Gamma factors and Plancherel measures. *Proc. Japan. Acad.*, **68 A**:256–260, 1992.

[Kur92b] N. KUROKAWA : Multiple zeta functions. *an example Adv. Studies. Pure. Math.*, **21**:219–226, 1992.

[Kur92c] N. KUROKAWA : On a q-analogues of multiple sine functions. *RIMS. kokyuroku.*, **843**:1–10, 1992.

[Luk97] A. LUKYANOV, S.and Zamolodchikov : Exact expectation values of local fields in the quantum sine-Gordon model. *Nuclear Physics*, **B 493**:571–587, 1997.

[Meh91] M.L. MEHTA : *Random matrices, revised and enlarged 2nd Edition.* Academic Press, 1991.

[MOP81] A.V. MIKHAILOV, M.A. OLSHANETSKY et A.M. PERELOMOV : Two-dimensional generalized Toda lattice. *Commun. Math. Phys.*, **79**:473–488, 1981.

[Nak04] Yu NAKAYAMA : Liouville Field Theory : A decade after the revolution, a-3 : special functions. *Int.J.Mod.Phys.A19 :2771-2930, arXiv : hep-th042009v7*, pages 210–215, 2004.

[OW86] E. OGIEVETSKY et P. WIEGMANN : Factorized S-matrix and the Bethe Ansatz for simple Lie groups. *Phys. Let.*, **B168**:360–366, 1986.

[Pas87] V. PASQUIER : Two dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams. *Nucl. Phys.B*, **285**:162–172, 1987.

[Shi77] Takuro SHINTANI : On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **24**:167–199, 1977.

[Shi80] Takuro SHINTANI : A Proof of the Classical Kronecker Limit Formula. *University of Tokyo J.Math*, **3, No. 2**:191–199, 1980.

[Tho69] J. THOMAE : Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle.*, **70**:258–281, 1869.

[Tho02] Charles B. THORN : Liouville perturbation theory. *Physical Review,http ://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.027702*, 2002.

[UM96] K. UENO et Nishizawa M. : The multiple gamma function and its q-analogue. *Department of Mathematics School of Science and Engineering Waseda University ,http ://arxiv.org/abs/q-alg/9602033v1*, 1996.

[Vig79] M. F. VIGNÉRAS : L'équation fonctionnelle de la fonction Zêta de Selberg du groupe modulaire $psl(2, \mathbb{Z})$. *Société mathématique de France*, Astérisque **61**:235–249, 1979.

[Vor87] A. VOROS : Spectral functions, Special functions and the Selberg zeta functions. *Comm. Math. Phys.*, **110**:431–465, 1987.

[Wei27] K. T. W. WEIERSTRASS : *Gesammelte Abhandlungen*, volume 7 vol.,(a)vol. I-VI,(b)vol. VII. Mayer and Müller, (a) Berlin, (b)Leipzig, (a)1894-1915 and (b)1927.

[WW27] E.T. WHITTAKER et G.N. WHATSON : *A course of modern analysis, 4-th Edition.* Cambridge at the university Press, 1927.

[Zam89] A.B. ZAMOLODCHIKOV : Integrals of motion and S-matrix of the (scaled) $T = T_c$ Ising model with magnetic field. *Int. J. Mod. Phys.*, **A4**:4235 – 4248, 1989.

[Zam05] Al. ZAMOLODCHIKOV : On the three-point function in minimal liouville gravity. *Theor.Mat.Phys., hep-th/0505063*, **142**:183–196, 2005.

[ZBP84] A.B. ZAMOLODCHIKOV, A.A. BELAVIN et A.M. POLYAKOV : Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, **B 241 (2)**:80–333, 1984.

[ZZ78] A.B. ZAMOLODCHIKOV et Al. ZAMOLODCHIKOV : Exact S matrix of Cross-Neveu elementary fermions. *Phys.Lett.*, **B72** :481, 1978.

[ZZ96] A.B. ZAMOLODCHIKOV et Al. ZAMOLODCHIKOV : Conformal boostrap in Liouville field theory. *Nuclear Physics*, **B477**:577–605, 1996.

[ZZF00] A.B. ZAMOLODCHIKOV, Al. ZAMOLODCHIKOV et V. FATEEV : Boundary liouville field theory i. boundary state and boundary two-point function, lpm-00-05. *http ://arxiv.org/abs/hep-th/0001012v1*, 2000.