Outils pour la classification locale des équations aux q-différences linéaires complexes

Lucia Di Vizio* et Jacques Sauloy†

Micro-cours au CIRM,

Théories galoisiennes et arithmétiques des équations différentielles,

21-25 septembre 2009

Résumé

On expose ici les outils élémentaires de la classification locale (formelle et analytique) des équations aux q-différences linéaires complexes. Les résultats sont donnés dans trois types de situation : modules sur un corps aux différences (K, σ) ; modules aux q-différences formels (*i.e.* sur $\mathbf{C}((z))$) ; modules aux q-différences analytiques (*i.e.* sur $\mathbf{C}(\{z\})$). Dans ce dernier cas nous distinguerons le cas $|q| \neq 1$ (mais nous travaillerons plutôt sous l'hypothèses $|q| > 1$) et $|q| = 1$. Le Théorème 5.9 améliore [DV09, Theorem 3.14], en éliminant certaines hypothèses diophantiennes.

Table des matières

Work partially supported by ANR, contract ANR-06-JCJC-0028

*Institut de Mathématiques de Jussieu, Topologie et géométrie algébriques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. e-mail: `divizio@math.jussieu.fr`.

†Institut mathématique de Toulouse et U.F.R. M.I.G., Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 4, France. email: `sauloy@math.univ-toulouse.fr`

1 En guise de motivation : quelques exemples historiques élémentaires

Ce chapitre a un rôle introductif, presque culturel : il sert essentiellement à motiver le cours. En filigrane, la comparaison avec la théorie "classique" des équations différentielles linéaires analytiques sur $\mathbf{C}$ devrait servir de fil d'Ariane, et le problème des petits diviseurs, qui surgit pour $|q| = 1$, devrait être un aperçu de notre but final. On peut utilement compléter cette introduction par la lecture de l'article de survol [1] [DVRSZ03].

Remarque 1.1. *Nous sous-entendrons toujours que q n'est pas une racine de l'unité, sauf si le contraire est explicitement supposé.*

Nous ferons appel aux notations standard du "q-calcul". En particulier, nous utiliserons les *symboles de Pochhammer* :

$$(a;q)_n := \prod_{0 \leq i < n} (1 - aq^i),$$
$$(a;q)_\infty := \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i).$$

La première formule est définie pour $n \in \mathbf{N}$ et $a, q \in \mathbf{C}$, mais nous supposerons *toujours* que $q \in \mathbf{C}^*$. En fait, nous supposerons presque toujours que q n'est pas non plus racine de l'unité ; et nous distinguerons fréquemment le cas $|q| = 1$ du cas $|q| \neq 1$. On a la relation de récurrence :

$$(a;q)_n = (1 - a)(aq;q)_{n-1}.$$

Cette relation permet d'étendre la définition de $(a;q)_n$ à tout $n \in \mathbf{Z}$ (avec, bien entendu, des conditions supplémentaires sur a et q). On vérifie alors dans tous les cas l'égalité :

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

Le produit infini $(a;q)_\infty$ ne converge dans $\mathbf{C}$ que si $a = 0$ ou $|q| < 1$. (Cependant, considéré comme *série formelle* en q, il est défini inconditionnellement.)

1. Voir aussi le chapitre "Combinatoire avancée" (*sic*) du livre de L3 dirigé par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, à paraitre chez De Boeck cette rentrée. (Ce chapitre a été commis par le deuxième auteur.)

Exercice 1.2. Donner une expression explicite de $(a;q)_n$ lorsque $n<0$.

Exercice 1.3. Déterminer récursivement les coefficients de la série formelle $(a;q)_\infty \in \mathbf{C}[[q]]$.
Indication : en dérivant logarithmiquement, on se ramène à une "série de Lambert" $\sum \dfrac{aq^n}{1-aq^n}$ dont le développement en série formelle s'exprime sans peine.

1.1 Exemples réguliers et fuchsiens

1.1.1 Le q-calcul d'Euler et le "paramètre supplémentaire"

Soit $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier $n \in \mathbf{N}$ (voir par exemple [HW88, chap XIX]). En 1748, Euler[2] a déterminé la série génératrice de ces nombres :

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^n)\cdots}.$$

Cette série entière en q a pour rayon de convergence 1 et admet le cercle unité pour frontière naturelle. Euler a démontré de nombreuses formules extraordinaires, dont celle-ci :

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(q;q)_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)}.$$

Pour cette dernière, il a inventé la *ruse fondamentale*, l'introduction d'un paramètre supplémentaire ; on pose :

$$f(z) := \frac{1}{(z;q)_\infty} = \frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^n z)\cdots}.$$

Pour q fixé tel que $|q|<1$, c'est une fonction analytique de z pour $|z|<1$, telle que $f(0)=1$ et vérifiant l'*équation aux q-différences* :

$$f(qz) = (1-z)f(z).$$

Ces conditions suffisent à déterminer le développement en série entière $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n z^n$; en effet, elles se traduisent par les relations :

$$f_0 = 1 \text{ et } q^n f_n = f_n - f_{n-1} \Longrightarrow f_n = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \frac{1}{(q;q)_n}.$$

On a donc, pour $|z|<1$:

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(q;q)_n} z^n,$$

d'où la formule d'Euler en prenant $z := q$. Il ne semble pas facile de démontrer cette formule sans l'introduction du paramètre supplémentaire !

2. À ma connaissance, l'usage de la lettre q dans ce genre de calcul remonte à Jacobi. Le lien avec la lettre q des déformations quantiques est donc dû à un heureux hasard ! Ce qui est certain, c'est que le lien établi par Jacobi entre la fonction $\sum p(n)q^n$ et la théorie des fonctions elliptiques a eu une influence favorable sur l'avenir du q-calcul.

Exercice 1.4. On suppose que $|q| \neq 1$. Démontrer la formule valable dans $\mathbf{C}\{z\}$:

$$(z;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n.$$

Préciser le rayon de convergence de cette série.

Exercice 1.5. La série convergente

$$e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(q;q)_n}$$

est un analogue de la série exponentielle dans le sens que $e_q((1-q))z)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$d_q y = y\,,\ \text{où}\ d_q y(z) = \frac{y(qz)-y(z)}{(q-1)z}.$$

Montrer que

$$e_q(z) e_{q^{-1}}(q^{-1}z) = 1\,.$$

1.1.2 Le théorème q-binomial de Cauchy

(Voir [GR90, chap 1.3].) Le théorème du binôme généralisé de Newton peut être écrit sous la forme suivante :

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n,\ \text{où}\ (\alpha)_n := \prod_{0\leq i<n} (\alpha+i).$$

Sa preuve la plus simple consiste à vérifier que les deux membres sont solutions de l'équation différentielle $f' = \dfrac{\alpha}{1-z} f$. Pour le membre droit, cela découle de la relation de récurrence entre ses coefficients : $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{\alpha+n}{n+1} \Longrightarrow (n+1) f_{n+1} = (\alpha+n) f_n$.

En 1843, Cauchy a évalué le "q-analogue" suivant du membre droit (on suppose $|q| < 1$) :

$$\phi_q(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n.$$

Pour quelle raison est-ce un q-analogue ? Par exemple, parce qu'en posant $a := q^\alpha$, on vérifie que :

$$\lim_{q\to 1} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}.$$

(Naturellement, il faut un peu de soin pour préciser ce que l'on entend ici par q^α, s'agissant de nombres complexes !) On peut donc voir la famille des $\phi_q(z)$ comme une déformation de paramètre q de la fonction $(1-z)^{-\alpha}$. La méthode la plus simple pour évaluer la série ϕ_q est de convertir la relation de récurrence entre ses coefficients f_n en une équation fonctionnelle :

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}} \Longrightarrow (1-q^{n+1}) f_{n+1} = (1-aq^n) f_n \Longrightarrow f(z) - f(qz) = z\big(f(z) - af(qz)\big).$$

(La dernière relation s'obtient en multipliant la précédente par z^{n+1} et en sommant pour $n \in \mathbf{N}$.) On a donc l'équation aux q-différences d'ordre 1 :

$$f(qz) = \frac{1-z}{1-az} f(z) \Longleftrightarrow f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz).$$

La deuxième forme nous intéresse parce que l'on peut l'itérer :

$$f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz) = \frac{1-az}{1-z}\frac{1-aqz}{1-qz} f(q^2z) = \cdots = \frac{1-az}{1-z}\frac{1-aqz}{1-qz}\frac{1-aq^2z}{1-q^2z} \cdots f(0).$$

On obtient ainsi le théorème q-binomial de Cauchy :

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n.$$

Voici une autre explication du statut de q-analogue. L'équation aux q-différences peut s'écrire :

$$\frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z} = \frac{a-1}{q-1}\frac{1}{1-az} f(z).$$

Lorsque $q \to 1$, avec bien entendu $a := q^\alpha$, le membre gauche tend vers f' et le membre droit vers $\frac{\alpha}{1-z} f$. (On ne fait pas bouger f dans cet argument heuristique.) L'équation aux q-différences peut donc être vue comme une q-déformation de l'équation différentielle.

Exercice 1.6. Sous l'hypothèse $a := q^\alpha$, calculer directement $\lim_{q\to 1} \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\cdot$ (Pas très facile !)

1.1.3 Les fonctions hypergéométriques basiques de Heine

(Voir [GR90, chap 1.2].) À partir de 1846, Heine a commencé à systématiser l'usage de la q-analogie $\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} \leftrightarrow \frac{(\alpha)_n}{n!}$, laquelle repose sur le passage à la limite $\lim_{q\to 1} \frac{q^\alpha - 1}{q-1} = \alpha\cdot$ Sa principale découverte est une q-déformation de la série hypergéométrique $F(\alpha,\beta;\gamma;z) := \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n$ de Gauß. Heine définit ainsi la série hypergéométrique *basique* (l'adjectif fait référence à la base q) :

$$\Phi(a,b;c;q,z) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n} z^n.$$

Pour des valeurs génériques de $a,b,c \in \mathbf{C}^*$, cette série a pour rayon de convergence 1. Sous l'hypothèse $a := q^\alpha$, $b := q^\beta$, $c := q^\gamma$, ses coefficients tendent vers ceux de $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ lorsque $q \to 1$. Noter que, lorsque $\beta = \gamma$, resp. lorsque $b = c$, on retrouve la série du binôme de Newton, resp. la série q-binomiale de Cauchy.

La série hypergéométrique classique est célèbre par suite de son rôle central dans la théorie des équations différentielles complexes. (Son étude par Riemann est à l'origine de la correspondance de Riemann-Hilbert.) La série hypergéométrique basique est solution d'une équation fonctionnelle, que l'on trouve simplement à partir de la relation de récurrence entre ses coefficients :

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(1-aq^n)(1-bq^n)}{(1-cq^n)(1-q^{n+1})} \Longrightarrow (1-cq^n)(1-q^{n+1})f_{n+1} = (1-aq^n)(1-bq^n)f_n$$

$$\Longrightarrow \big(1-(\frac{c}{q}+1)q^{n+1} + \frac{c}{q}q^{2n+2}\big)f_{n+1} = \big(1-(a+b)q^n + abq^{2n}\big)f_n.$$

Pour aller plus loin, introduisons la notation :

$$\sigma_q f(z) := f(qz).$$

On trouve alors l'équation aux q-différences d'ordre 2 :

$$\big(1-(\frac{c}{q}+1)\sigma_q+\frac{c}{q}{\sigma_q}^2\big)f = z\big(1-(a+b)\sigma_q+ab{\sigma_q}^2\big)f \Longrightarrow$$

$$(\frac{c}{q}-abz){\sigma_q}^2 f-\big((\frac{c}{q}+1)-(a+b)z\big)\sigma_q f+(1-z)f=0.$$

Pour voir en quoi cette équation aux q-différences est une q-déformation de l'équation différentielle hypergéométrique, on procède ainsi [3]. Notons :

$$\delta_q := \frac{\sigma_q-1}{q-1} \text{ l'opérateur de "}q\text{-dérivation" } f(z)\mapsto \frac{f(qz)-f(z)}{q-1}.$$

Il s'agit d'une "dérivation tordue", ce qui signifie que l'on a la forme suivante de la règle de Leibniz :

$$\delta_q(fg) = f\delta_q(g)+\delta_q(f)\sigma_q(g).$$

En un sens intuitif, δ_q dégénère, lorsque $q\to 1$, en l'opérateur de dérivation $\delta := z\dfrac{d}{dz}$, défini par $f(z)\mapsto zf'(z)$. Dans l'équation aux q-différences ci-dessus, on peut remplacer σ_q par $1+(q-1)\delta_q$ (ici, 1 désigne simplement l'opérateur identité $f(z)\mapsto f(z)$). Si l'on fait ensuite l'hypothèse $a := q^\alpha$, $b := q^\beta$, $c := q^\gamma$, puis $q\to 1$ et que l'on remplace δ_q par δ, on obtient une équation différentielle d'ordre 2. (Il peut y avoir lieu de simplifier par $q-1$ avant de passer à la limite.)

Exercice 1.7. Vérifier que c'est bien l'équation différentielle hypergéométrique satisfaite par $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$.

1.2 Exemples irréguliers

Tous les exemples précédents sont fuchsiens (en ce qui concerne les équations aux q-différences, la définition sera donnée au chapitre 6). Nous allons examiner des exemple irréguliers. Pour tout le reste de ce chapitre, on suppose que $|q|>1$.

1.2.1 Les q-analogues de la série d'Euler

La série d'Euler [4] $\hat{f}(z) := \sum\limits_{n\geq 0} n!\,z^{n+1}$ a pour rayon de convergence 0. Elle est solution de l'équation différentielle $z\delta f - f = -z$ (on rappelle que δ désigne l'opérateur différentiel $z\dfrac{d}{dz}$).

Premier q-analogue. C'est le plus simple (le plus grossier) : il consiste à remplacer δ par σ_q, d'où l'équation aux q-différences :

$$z\sigma_q f - f = -z \Longleftrightarrow f = z+z\sigma_q f \Longleftrightarrow f = \sum_{n\geq 0}(z\sigma_q)^n z \Longleftrightarrow f = \sum_{n\geq 0} q^{n(n+1)/2}z^{n+1}.$$

En effet, l'opérateur $f\mapsto z+z\sigma_q f$ est z-adiquement contractant dans $\mathbf{C}[[z]]$ et admet donc un unique point fixe obtenu par itération ; et $(z\sigma_q)^n = q^{n(n-1)/2}z^n{\sigma_q}^n$ en vertu de l'exercice ci-dessous. Dans cet exemple, on a remplacé $n! = 1\times\cdots\times n$ par $q^{n(n+1)/2} = q^1\times\cdots\times q^n$ tout simplement parce que n et q^n sont les valeurs propres respectives de δ et de σ_q associées au vecteur propre z^n.

3. Une théorie des q-déformations des équations différentielles fuchsiennes et de leur monodromie est exposée dans [Sau00], où elle est appliquée aux séries hypergéométriques.

4. Une étude fine des q-déformations de la série d'Euler est exposée dans [DVZ09]. On y découvre notamment que les cas $|q|>1$ et $|q|<1$ ne sont pas symétriques et des conséquences de ce fait.

Exercice 1.8. Pour $u \in \mathbf{C}((z))$, calculer $(u\sigma_q)^n$. (Ce sera plus facile après avoir lu 3.1.)

Deuxième q-analogue. On remplace δ par δ_q. cela conduit (en regardant comme ci-dessus les valeurs propres) aux q-analogies :

$$n \leftrightarrow [n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ et } n! \leftrightarrow [n]_q^! := \prod_{0 \leq k < n} \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Exercice 1.9. Vérifier que l'équation aux q-différences :

$$z\delta_q f - f = -z$$

admet pour unique solution la série formelle :

$$\sum_{n \geq 0} [n]_q^! z^{n+1}.$$

Exercice 1.10. Démontrer que pour tout $q \in \mathbf{C}^*$ tel que $|q| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} [n]_q^! z^{n+1}$ converge pour $|z| < |q - 1|$. (Pour une étude détaillée de cette série dans le cas $|q| < 1$, *cf.* [DVZ09, §1])

Ordre q-Gevrey. Les deux séries précédentes ont des propriétés semblables du point de vue de l'analyse [5]. Rappelons qu'une série divergente $\sum a_n z^n$ est dite d'ordre Gevrey $\leq s$ s'il existe $R > 0$ tel que l'on ait une relation de domination $a_n = O\big(R^n (n!)^s\big)$. L'ordre q-Gevrey se définit de manière analogue en remplaçant $n!$ par $[n]_q^!$. Il est facile de voir que $[n]_q^!$ et $q^{n^2/2}$ sont du même ordre de grandeur (*i.e.* leurs quotients sont des $O(R^n)$) et donc que $\sum a_n z^n$ est d'ordre q-Gevrey $\leq s$ s'il existe $R > 0$ tel que $a_n = O\big(R^n q^{sn^2/2}\big)$. Les deux séries ci-dessus sont d'ordre q-Gevrey exact 1.

Troisième q-analogue. Nous utiliserons une autre série légèrement plus simple et de même ordre q-Gevrey que les précédentes, la *série de Tshakaloff* :

$$\text{Ч}(z) := \sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} z^n,$$

qui est l'unique solution de l'équation aux q-différences :

$$z\sigma_q f - f = -1,$$

comme on peut s'en convaincre par identification des coefficients ou bien en itérant l'opérateur $f \mapsto 1 + z\sigma_q f$. Il s'agit d'une équation du premier ordre non homogène, qui donne lieu à une équation homogène d'ordre 2 :

$$qz{\sigma_q}^2 f - (1 + z)\sigma_q f + f = 0.$$

Exercice 1.11. Calculer $(\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1)$ et en déduire l'équation homogène indiquée.

Exercice 1.12. Donner l'ordre q-Gevrey et l'équation fonctionnelle de la "série de Mordell" [6] $\sum_{n \geq 0} q^{n^2} z^n$.

5. Mais pas de l'arithmétique : voir par exemple [And00a, And00b, DVRSZ03, DV02].
6. Elle apparaît dans un article de Mordell, voir [Zhaa].

1.2.2 Séries hypergéométriques basiques “confluentes”

De même que les séries hypergéométriques classiques donnent par dégénérescence (spécialisation des paramètres, avec éventuellement “rescaling” de la variable) les séries hypergéométriques dites “confluentes”, qui sont solutions d'équations différentielles irrégulières, de même les séries hypergéométriques basiques peuvent dégénérer. Reprenons les notations sur les séries hypergéométriques basiques (paragraphe 1.1.3) avec ici $|q| > 1$, donc en remplaçant q par q^{-1}. Lorsque $c \to \infty$, la série $\Phi(a, b; c; q^{-1}, -qcz)$ dégénère en la série hypergéométrique basique “confluente”

$$\phi(a, b; q, z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a; q^{-1})_n (b; q^{-1})_n}{(q^{-1}; q^{-1})_n} q^{n(n+1)/2} z^n \ , \quad \text{où } a, b \in \mathbf{C}^*.$$

De la relation de récurrence entre les coefficients u_n, on tire une équation aux q-différences :

$$(q^{n+1} - 1) u_{n+1} = q^2 (q^n - a)(q^n - b) u_n, \Longrightarrow (\sigma_q - 1)\phi = q^2 z (\sigma_q - a)(\sigma_q - b)\phi$$
$$\Longrightarrow \big(q^2 z (\sigma_q - a)(\sigma_q - b) - (\sigma_q - 1)\big)\phi = q^2 z {\sigma_q}^2 \phi - \big(1 + (a+b) q^2 z\big)\sigma_q \phi + (1 + abq^2 z)\phi = 0.$$

Exercice 1.13. On définit [7] :

$$s(\alpha, \beta; q, z) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(\alpha - q) \cdots (\alpha - q^n)(\beta - q) \cdots (\beta - q^n)} z^n.$$

Démontrer l'équation aux q-différences du second ordre non homogène :

$$\big((\sigma_q - \alpha)(\sigma_q - \beta) - qz{\sigma_q}^2\big)s = (1 - \alpha)(1 - \beta).$$

En déduire l'équation aux q-différences du troisième ordre homogène correspondante.

1.3 q-calcul pour $|q| = 1$

Les problèmes de convergence des q-séries lorsque q est un nombre complexe de norme 1 de la forme $q = \exp(2i\pi\omega)$, pour $\omega \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$, deviennent rapidement très compliqués. Nous nous limiterons à donner quelques résultats qui nous semblent bien élucider les problèmes que nous allons devoir analyser dans la suite et nous allons renvoyer aux références originales ou à des articles d'exposition.

1.3.1 La série q-exponentielle

La série q-exponentielle

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(q; q)_n}$$

est définie pour tout q complexe, non racine de l'unité. Pour $|q| > 1$ elle est entière, tant dis que pour $|q| < 1$ il s'agit d'une fonction analytique en zéro qui se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier, comme nous l'avons déjà remarqué au §1.1.1 ; en effet nous avons :

$$e_q(z) = \frac{1}{(z; q)_\infty} \ .$$

Si $|q| = 1$ la série $e_q(x)$ a un comportement assez chaotique, fonction des propriétés diophantiennes de $\omega \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$, tel que $q = \exp(2i\pi\omega)$.

7. Dans son célèbre article de 1935, “The final problem : an account of the Mock Theta Functions” (reproduit, par exemple dans [BR01]) G. N. Watson (page 330) énumère sept “mock theta functions of order three”. Les quatre premières sont notées f, ϕ, ψ, χ (d'après Ramanujan, qui les a découvertes) ; les trois autres sont notées ω, ν, ρ (d'après Watson, qui les a ajoutées à la liste). Dans [Zhab], Changgui Zhang utilise la série $s(\alpha, \beta; q, z)$ pour les étudier.

Exercice 1.14. Soit $q = \exp(2i\pi\omega)$, avec $\omega \in [0,1] \smallsetminus \mathbf{Q}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La série $e_q(z)$ converge ;
2. $\liminf_{n\to\infty} |1-q^n|^{1/n} > 0$;
3. $\liminf_{n\to\infty} \|n\omega\|_{\mathbf{Z}}^{1/n} > 0$, où l'on a utilisé la notation $\|n\omega\|_{\mathbf{Z}} = \inf_{k\in\mathbf{Z}} |n\omega + k|$.

(Suggestion : pour l'équivalence entre les deux premières propositions, montrer l'identité de Hardy-Littlewood [HL46] :

$$e_q(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n(1-q^n)}\right)$$

pour tout z dans le domaine de convergence de $e_q(z)$.)

L'exercice 1.14 implique en particulier que le rayon de convergence de $e_q(x)$ est au plus 1, pour tout q de norme 1, non racine de l'unité. Nous pouvons être plus précis. Considérons le développement en fraction continue de $\omega \in [0,1] \smallsetminus \mathbf{Q}$ (*cf.* par exemple [Lan95]) :

$$\omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}},$$

avec $a_1, a_2, \dots \in \mathbf{Z}_{>0}$. On écrit $\omega = [0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$. Posons

$$\begin{aligned} p_{-1} &= q_{-2} = 1 \\ p_{-2} &= q_{-1} = 0 \end{aligned}$$

et pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}\,, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}\,. \end{aligned}$$

Le nombre $\frac{p_k}{q_k}$ a la propriété suivante :

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}.$$

Il s'appelle le n-ième convergent de ω. La suite q_k est strictement croissante et :

Théorème 1.15 (*cf.* [Lan95, I,§2])**.**

- *Pour tout $k \geq 1$ on a les inégalités :*

$$\frac{1}{2q_{k+1}} < \frac{1}{q_{k+1}+q_k} < |q_k\omega - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}\,.$$

- *Pour tout entier n, j tel que $0 < n < q_{k+1}$, on a*

$$|n\omega - j| \geq |q_k\omega - p_k| = \|q_k\omega\|_{\mathbf{Z}}\,.$$

L'étude de la convergence de $e_q(z)$ peut être précisée ultérieurement.

Définition 1.16. La *fonction de Brjuno* de ω est définie par (*cf.* par exemple [Mar00, §4.4])

$$\mathcal{B}(\omega) = \sum_{k\geq 0} \frac{\log q_{k+1}}{q_k}\,.$$

On dit que ω est un *nombre de Brjuno* si $\mathcal{B}(\omega) < \infty$.

Exercice 1.17. On dit qu'un nombre $\omega \in \mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$ est *diophantien (d'ordre $\beta \geq 0$)* s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\omega - p/q| \geq c/q^{1+\beta}$, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$, avec $q \geq 1$. Démontrer que

1. si $\omega \in [0,1] \smallsetminus \mathbf{Q}$ est diophantien, $e_q(z)$ converge ;
2. les nombre diophantiens sont des nombres de Brjuno ;
3. qu'il existe des nombres de Brujno qui ne sont pas diophantiens. (Suggestions : choisir un nombre tel que $q_{k+1} \leq c e^{q_k^{1-\varepsilon}}$).

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 1.18 (Yoccoz lower bound, *cf.* [Yoc95], [CM00, Thm. 2.1], [Mar00, Thm. 5.1])**.** *Si ω est un nombre de Brjuno la série $\sum_{k\geq 0} \frac{z^n}{(q;q)_k}$ converge. De plus le rayon de convergence de $e_q(z)$ est minoré par $e^{-\mathcal{B}(\omega)-C_0}$, où $C_0 > 0$ est une constante universelle (*i.e. *indépendante de ω).*

Nous savons, quand-même, que le sous-ensemble du cercle unité formé des q pour lesquels le rayon de convergence de $e_q(z)$ est strictement plus petit que 1 a mesure de Lebesgue 0 et dimension de Hausdorff 0 (*cf.* [Mar00, §4.3]). Pour une présentation détaillée des propriétés de $e_q(z)$ nous renvoyons le lecteur à [Lub98], où l'on trouvera une preuve du fait suivant :

Proposition 1.19. *Pour tout $r \in [0,1]$ il existe $q \in \mathbf{C}$, de norme 1, non racine de l'unité, tel que $e_q(z)$ converge pour $|z| < r$.*

Exercice 1.20. On suppose que $e_q(x)$, $q = \exp(2i\pi\omega)$ avec $\omega \in [0,1] \smallsetminus \mathbf{Q}$, a un rayon de convergence $R(q) > 0$. Alors $R(q) = R(q^{-1})$ et $e_q(z)$ et $e_{q^{-1}}(z)$ ont une frontière naturelle sur le cercle $|z| = R(q)$ (*cf.* [Lub98, Prop.1.1]).

1.3.2 Une autre série hypergéométrique

Soient $\lambda, q \in \mathbf{C}$ deux nombres complexes de norme 1. On suppose que q n'est pas une racine de l'unité et que $\lambda \notin q^{\mathbf{Z}}$. La série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(\lambda;q)_n}$$

peut avoir un rayon compris entre [0,1], dépendant des propriétés diophantiennes relatives de q et λ. On rappelle l'identité suivante qui est un cas particulier des transformation de Heine (*cf.* [GR90, App.(III.3)] et exercice 3.26 plus loin) :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(q\lambda;q)_n} = (1-\lambda) e_q(z) \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{1-q^n\lambda} \frac{(-z)^n}{(q;q)_n}\,.$$

Elle relie la convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(\lambda;q)_n}$ à celle de $e_q(x)$ et de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{1-q^n\lambda}$.

1.3.3 q-analogue de la série d'Euler et autres exempleS hypergéométriques confluents

Soient $q, \lambda \in \mathbf{C}$. Nous considérons la série hypergéométrique confluente

$$\phi_\lambda(z) = \sum_{n\geq 0} (\lambda; q)_n z^n ,$$

solution de l'équation aux q-differences

$$\phi_\lambda(z)(1-z) = 1 - \lambda z \phi_\lambda(qz) .$$

Pour $\lambda = q$ on obtient, à quelques termes près, la q-série d'Euler $\sum_{n\geq 0}(q;q)_n z^n$ (*cf.* §1.2).

Exercice 1.21. Supposons que $\lambda \notin q^{\mathbf{Z}}$. Démontrer que (*cf.* [DLPS91, (1.14)]) :

1. Si $|q| > 1$, la série $\phi_\lambda(z)$ est divergente ; si $|q| < 1$ elle est convergente pour $|z| < |\lambda q^{-1}|^2$.
2. Si q est une racine primitive de l'unité d'ordre ν, $\phi_\lambda(z)$ est une fonction rationnelle ayant de pôles simples dans l'ensemble des racines ν-ièmes de $(q^{-\nu} - \lambda^{-\nu})$.
3. Si q est un nombre complexe de norme 1 et $|\lambda| \neq 1$, alors $\phi_\lambda(z)$ converge pour $|z| < |\lambda| \min\{1, |\lambda|\}$ et le bord du disque de convergence est une frontière naturelle.

Le cas où q et λ sont deux nombres complexes de norme 1, avec q non racine de l'unité, est très laborieux. Nous renvoyons le lecteur à la référence originale [DLPS91]. La preuve est basée sur une version faible du critère d'équidistribution de Weil (*cf.* [DLPS91, Thm.1.1]).

Théorème 1.22 (*cf.* [DLPS91, Thm.1.3])**.** *Soient $q, \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = |q| = 1$, q non racine de l'unité. Alors :*

1. *la série $\phi_\lambda(z)$ converge au moins sur le disque $|z| < 1$;*
2. *si $\lambda = q$ alors le rayon de convergence est exactement 1 ;*
3. *pour un λ fixé, l'ensemble de q pour lesquels le rayon de convergence est strictement plus grand que 1 a mesure de Lebesgue 0 ;*

De plus on peut prouver que :

Théorème 1.23 (*cf.* [Pet92, Thm.2])**.** *Soit $R \in [1, +\infty]$. Alors il existe $q, \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = |q| = 1$, q non racine de l'unité, tels que $\phi_\lambda(z)$ converge pour $|z| < R$.*

2 Classification des équations de rang 1

Une équation aux q-différences analytique linéaire homogène d'ordre 1 a la forme :

$$\sigma_q f = af,$$

où $a \in \mathbf{C}(\{z\})^*$. (On autorise donc les pôles.) Pour résoudre ou classifier de telles équations, on peut être amené à restreindre le corps à $\mathbf{C}(z)$, ou au contraire l'étendre à $\mathbf{C}((z))$. Commençons donc par une version plus algébrique du problème.

Remarque 2.1. Dans tout ce qui suit, nous exclurons le cas où q est une racine de l'unité (et, à la section suivante, celui où l'automorphisme σ est d'ordre fini) car il se ramène à de la théorie de Galois classique.

2.1 Sur un corps quelconque

Soient K un corps commutatif et σ un automorphisme de K (d'ordre infini, *cf.* la remarque ci-dessus). Fixons $a \in K^*$ et considérons l'équation :

$$\sigma f = af.$$

Si l'on en connait une solution particulière non triviale f_0, il est clair que l'ensemble des solutions est :

$$Cf_0 = \{\phi f_0 \,|\, \phi \in C\}, \text{ où } C = K^\sigma := \{\phi \in K \,|\, \sigma\phi = \phi\}.$$

Le corps C joue ici le rôle de *corps des constantes* et nous l'appellerons ainsi.

Il est naturel (pour résoudre ou pour classifier) de faire appel à la transformation de jauge (changement de fonction inconnue) :

$$g = uf, u \in K^*.$$

L'équation de départ est alors équivalente à l'équation :

$$\sigma_q g = bg, \text{ où } b := a\frac{\sigma u}{u}.$$

Les classes d'équivalence d'équations d'ordre 1 pour cette relation forment donc le "groupe de Picard"[8] :

$$\mathrm{Pic}(K, \sigma) := K^*/G_\sigma, \text{ où } G_\sigma := \left\{\frac{\sigma u}{u} \,|\, u \in K^*\right\}.$$

En particulier, on a fait apparaitre une suite exacte :

$$1 \to (K^\sigma)^* \to K^* \overset{u \mapsto \sigma u/u}{\longrightarrow} K^* \to \mathrm{Pic}(K, \sigma) \to 1.$$

Nous allons préciser $(K^\sigma)^*$ et $\mathrm{Pic}(K, \sigma)$ dans les cas où $K := \mathbf{C}((z)), \mathbf{C}(\{z\}), \mathbf{C}(z)$ et $\sigma := \sigma_q$. Nous supposerons que $q \in \mathbf{C}^*$ n'est pas une racine de l'unité. Il s'agit donc dans chaque cas d'étudier le noyau et le conoyau de l'endomorphisme $\lambda : u \mapsto \sigma u/u$ de K^*.

Exercice 2.2. Traiter le cas où q est une racine de l'unité.

2.2 Sur le corps $\mathbf{C}((z))$

Le groupe $\mathbf{C}((z))^*$ admet la décomposition en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}((z))^* = \mathbf{C}^*.z^{\mathbf{Z}}.U, \text{ où } U := 1 + z\mathbf{C}[[z]].$$

L'effet de l'endomorphisme λ sur chaque facteur est le suivant : $\mathbf{C}^*$ est dans son noyau ; $z^{\mathbf{Z}}$ est envoyé injectivement sur $q^{\mathbf{Z}}$; λ induit un automorphisme de U, en vertu du calcul suivant :
(2.2.1)

$$v = \frac{\sigma_q u}{u} \Longleftrightarrow \sigma_q u = vu \Longleftrightarrow \forall n \geq 1\ ,\ q^n u_n = v_0 u_n + \cdots + v_n u_0 \Longleftrightarrow \forall n \geq 1\ ,\ u_n = \frac{v_1 u_{n-1} + \cdots + v_n u_0}{q^n - 1},$$

où l'on a posé $u = \sum\limits_{n \geq 0} u_n z^n$ et $v = \sum\limits_{n \geq 0} v_n z^n$, $u_0 = v_0 = 1$. Noter l'intervention de l'hypothèse $q^n \neq 1$! On en déduit :

$$(\mathbf{C}((z))^{\sigma_q})^* = \mathbf{C}^*, \quad G_{\sigma_q} = q^{\mathbf{Z}}.U, \quad \mathrm{Pic}(\mathbf{C}((z)), \sigma_q) \simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z} = \mathbf{E}_q \times \mathbf{Z} \text{ où } \mathbf{E}_q := \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

8. On verra en effet au 4.1.3 qu'il s'agit essentiellement du groupe des classes de modules aux différences de rang 1.

Comment comprendre les invariants de l'équation $\sigma_q f = af$ ainsi obtenus ? On écrit $a = cz^\mu u$, avec $c \in \mathbf{C}^*$, $\mu \in \mathbf{Z}$ et $u \in U$. Alors $\mu \in \mathbf{Z}$ est la *pente* de l'équation (on la trouvera dans le polygone de Newton) ; et $\overline{c} := c \pmod{q^{\mathbf{Z}}} \in \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ en est l'*exposant*. (Rappelons que les exposants d'une équation différentielle sont des complexes définis modulo $\mathbf{Z}$.) La classe d'une équation aux q-différences d'ordre 1 (formelle) est donc entièrement déterminée par sa pente et son exposant.

Le groupe $\mathbf{E}_q$. Soit $\tau \in \mathbf{C}$ tel que $e^{2i\pi\tau} = q$ (ce n'est donc pas un rationnel) et soit $\Lambda_\tau := \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ (c'est donc un groupe abélien libre de rang 2). Le morphisme surjectif $x \mapsto e^{2i\pi x}$ de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$ induit l'isomorphisme :

$$\mathbf{C}/\Lambda_\tau \simeq \mathbf{E}_q.$$

En particulier, si $\tau \notin \mathbf{R}$, c'est-à-dire si $|q| \neq 1$, le groupe Λ_τ est un réseau et le groupe $\mathbf{E}_q$ est celui d'une courbe elliptique.

Formes normales. Il s'agit de choisir explicitement un représentant de chaque classe. Naturellement, le degré μ sera représenté par l'équation $\sigma_q f = z^\mu f$. Quant à l'exposant $\overline{c} \in \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, l'usage, sous l'hypothèse $|q| \neq 1$, est de l'identifier à son unique représentant dans la *couronne fondamentale* :

$$C_q := \begin{cases} \{z \in \mathbf{C}^* \mid 1 \leq |z| < |q|\} \text{ si } |q| > 1, \\ \{z \in \mathbf{C}^* \mid 1 \geq |z| > |q|\} \text{ si } |q| < 1. \end{cases}$$

Il n'y a pas, à notre connaissance, de convention particulière sous l'hypothèse $|q| = 1$.

Exercice 2.3. La structure de groupe de $\mathbf{E}_q$ dépend-elle de q ? (On suppose que q n'est pas racine de l'unité.)

2.3 Sur le corps $\mathbf{C}(\{z\})$

Remplacer σ_q par $\sigma_q{}^{-1} = \sigma_{q^{-1}}$ ne change ni le corps des constantes ni le groupe de Picard : nous supposerons donc que $|q| \geq 1$. L'argumentation de la section précédente est presque inchangée. Le groupe $\mathbf{C}(\{z\})^*$ admet la décomposition en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}(\{z\})^* = \mathbf{C}^*.z^{\mathbf{Z}}.U, \text{ où } U := 1 + z\mathbf{C}\{z\}.$$

L'effet de l'endomorphisme λ sur chaque facteur est le suivant : $\mathbf{C}^*$ est dans son noyau ; $z^{\mathbf{Z}}$ est envoyé injectivement sur $q^{\mathbf{Z}}$; si $|q| > 1$ ou si $|q| = 1$ et la q-exponentielle $e_q(x)$ converge, λ induit un automorphisme de U. Pour ce dernier point, il s'agit seulement de vérifier que, dans le calcul antérieur, u est analytique (*i.e.* de rayon de convergence non nul) si v l'est. C'est facile et on en laisse le soin au lecteur. Donc, si $|q| > 1$ ou si $|q| = 1$ et la q-exponentielle $e_q(x)$ converge, on obtient finalement :

$$(\mathbf{C}(\{z\})^{\sigma_q})^* = \mathbf{C}^*, \quad G_{\sigma_q} = q^{\mathbf{Z}}.U, \quad \mathrm{Pic}(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q) \simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z} = \mathbf{E}_q \times \mathbf{Z}.$$

Le discours sur les invariants et les formes normales reste inchangé.

Exercice 2.4. Soit $|q| > 1$. Résoudre l'équation $v = \dfrac{\sigma_q u}{u}$ par itération de l'équation au point fixe $u = \sigma_q{}^{-1}(vu)$, et en déduire sa solution u sous forme de produit infini.

2.4 Sur le corps $\mathbf{C}(z)$

C'est le seul endroit de ce cours où l'on s'occupera d'un problème “global” ! On a encore la décomposition de $\mathbf{C}(z)^*$ en produit direct de trois sous-groupes :

$$\mathbf{C}(z)^* = \mathbf{C}^*.z^{\mathbf{Z}}.U, \text{ où } U := \{f \in \mathbf{C}(z) \mid f(0) = 1\}.$$

Toute fraction rationnelle f telle que $f(0) = 1$ est de la forme $f = \dfrac{\prod(1 - z/a_i)}{\prod(1 - z/b_j)}$, où les $a_i, b_j \in \mathbf{C}^*$, autrement-dit, elle est entièrement déterminée par le diviseur de ses zéros et pôles sur $\mathbf{C}^*$, qui est arbitraire. On a donc un isomorphisme :

$$U \simeq \mathrm{Div}(\mathbf{C}^*),$$

i.e. le groupe abélien libre de base $\mathbf{C}^*$. Dans la décomposition $\mathbf{C}(z)^* \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z} \times \mathrm{Div}(\mathbf{C}^*)$, l'image par λ de (a, μ, D) est $(q^\mu, 1, {\sigma_q}^* D - D)$, où :

$${\sigma_q}^* \left(\sum [a_i] - \sum [b_j]\right) := \sum [a_i/q] - \sum [b_j/q].$$

Le quotient de $\mathrm{Div}(\mathbf{C}^*)$ par le sous-groupe des ${\sigma_q}^* D - D$ est isomorphe à $\mathrm{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}})$ (voir l'exercice ci-dessous) et l'on a enfin :

$$(\mathbf{C}(z)^{\sigma_q})^* = \mathbf{C}^*, \quad G_{\sigma_q} = q^{\mathbf{Z}}.U, \quad \mathrm{Pic}(\mathbf{C}(z), \sigma_q) \simeq (\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) \times \mathbf{Z} \times \mathrm{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}) = \mathbf{E}_q \times \mathbf{Z} \times \mathrm{Div}(\mathbf{E}_q).$$

Exercice 2.5. Montrer que l'application canonique $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ induit un morphisme surjectif de $\mathrm{Div}(\mathbf{C}^*)$ sur $\mathrm{Div}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}})$ dont le noyau est le sous-groupe des ${\sigma_q}^* D - D$ de $\mathrm{Div}(\mathbf{C}^*)$.

3 Opérateurs et équations

Le but ultime de la théorie (ou au moins de l'approche exposée ici) est l'étude des fonctions q-spéciales, ici via leurs équations fonctionnelles. Celles-ci sont *a priori* des équations aux q-différences linéaires complexes analytiques sur la sphère de Riemann, *i.e.* à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$; et que l'on veut classifier *a priori* rationnellement. La stratégie générale est de passer d'abord par la classification analytique locale (dont on recollera les invariants *a posteriori*, le cas échéant). Pour aborder la classification analytique, nous nous proposons de commencer par la classification formelle, plus grossière, plus algébrique, et sans doute plus facile. Comme pour les équations différentielles, la partie algébrique comporte deux approches parallèles (bien entendu équivalentes) : l'approche “polynomiale” (équations et opérateurs différentiels, resp. aux q-différences) ; et l'approche “linéaire” (systèmes et modules différentiels, resp. aux q-différences). L'approche polynomiale fait l'objet de ce chapitre, l'approche linéaire du suivant. Pour cette présentation algébrique, nous avons choisi de nous placer dans le cadre général de l'algèbre aux différences chaque fois que cela pouvait se faire avec des hypothèses simples, et de nous restreindre aux corps d'intérêt $\mathbf{C}(z), \mathbf{C}(\{z\}), \mathbf{C}((z))$ dans tous les autres cas.

Les lettres K, σ désignent respectivement un corps commutatif et un automorphisme de K. Le couple (K, σ) est appelé *corps aux différences*. Pour ne pas retomber dans la théorie de Galois classique, on supposera toujours σ d'ordre infini.

3.1 L'anneau de Ore-Laurent $\mathcal{D}_{K,\sigma}$

L'anneau $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ des opérateurs aux différences est l'anneau des polynômes de Ore-Laurent [9] :

$$\mathcal{D}_{K,\sigma} := K < S, S^{-1} >, \text{ avec : } \forall a \in K \ , \ S.a = \sigma(a).S.$$

Pratiquement, c'est le K-espace vectoriel de base les $S^n, n \in \mathbf{Z}$ dans lequel la multiplication est définie par la formule :

$$\left(\sum a_i S^i\right)\left(\sum b_j S^j\right) := \sum c_k S^k, \text{ où } c_k := \sum_{i+j=k} a^i \sigma^i(b_j).$$

On vérifie sans peine l'associativité et le fait que S^0 est neutre, etc. Il est clair que K s'identifie au sous-anneau KS^0 de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$, et que l'anneau $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est engendré par K et S, S^{-1}. Il est clair également que les éléments *entiers*, c'est-à-dire les $\sum\limits_{i \geq 0} a_i S^i$, forment le sous-anneau engendré par K et S.

Remarque 3.1. Non seulement l'anneau $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ n'est pas commutatif, mais son sous-anneau K n'est pas central (voir exercice) : $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ n'est donc pas une K-algèbre.

Exercice 3.2. Démontrer que le centre de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est le *corps des constantes* :

$$K^\sigma := \{a \in K \mid \sigma(a) = a\}.$$

L'élément $\sum a_i S^i$ de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ modélise évidemment l'application $\sum a_i \sigma^i$ de K dans lui-même. En fait, l'application $\sum a_i S^i \mapsto \sum a_i \sigma^i$ est K-linéaire, injective et transforme le produit dans $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ en la composition. (L'injectivité découle du lemme d'indépendance des caractères d'Artin-Dedekind et de l'hypothèse que σ est d'ordre infini.) On peut donc identifier $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ avec l'anneau des *opérateurs aux différences* $\sum a_i \sigma^i$ et écrire :

$$\mathcal{D}_{K,\sigma} = K < \sigma, \sigma^{-1} > .$$

Il faut alors prendre garde à un risque de confusion lorsque l'on écrit σa, avec $a \in K$: soit c'est une notation allégée pour $\sigma(a) \in K$ (cet usage est répandu) ; soit cela désigne un produit dans $\mathcal{D}_{K,\sigma}$, qui vaut alors $\sigma(a)\sigma$.

3.1.1 Degré absolu, inversibles, équivalence

Le *degré absolu* (ou simplement degré) est défini ainsi :

$$\deg \sum a_i \sigma^i := \max_{a_i \neq 0} i - \min_{a_i \neq 0} i,$$

autrement dit, $\deg 0 = -\infty$ (car $\max \emptyset = -\infty$ et $\min \emptyset = +\infty$) et $\deg \sum\limits_{i=i_0}^{i_1} a_i \sigma^i = i_1 - i_0 \in \mathbf{N}$ si $a_{i_0} a_{i_1} \neq 0$. On a dans tous les cas $\deg PQ = \deg P + \deg Q$, d'où l'on déduit immédiatement que $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est intègre et que ses inversibles sont les éléments de degré 0, c'est-à-dire les $a\sigma^k$ $(a \in K^*, k \in \mathbf{Z})$. À noter qu'il n'y a pas de formule générale (*e.g.* majoration) concernant $\deg(P + Q)$.

9. Polynômes de Ore parce que l'indéterminée S ne commute pas avec les scalaires $a \in K$; polynômes de Laurent parce que l'indéterminée est inversible. La théorie générale des anneaux de Ore est exposée dans [Ore33].

Pour tout $P \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ non nul, il existe un unique $Q = uP$, avec u inversible, qui est *standard unitaire*, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i S^i$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n = 1$.[10] À noter qu'il existe également un unique $R = Pv$, avec v inversible, qui est standard unitaire, mais que ce n'est en général pas Q : l'équivalence dans l'anneau non commutatif $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ n'est pas une chose très simple. Nous parlerons donc (si nécessaire) d'*équivalence à gauche*, resp. *à droite*. (Plus généralement, ce qui est compliqué, c'est de comparer les multiples à gauche et les multiples à droite d'un même élément.)

Exercice 3.3. Si $P = a + b\sigma$ et $Q = c + d\sigma$ sont de degré 1, dire que $Q = uP$ pour un u inversible signifie que $c/a = d/b$; alors que dire que $Q = Pu$ pour un u inversible signifie que $\sigma(c/a) = d/b$.

3.1.2 Division euclidienne, idéaux à gauche

Tout d'abord, soient $A, B \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ et supposons B non nul et $\deg A \geq \deg B$. Écrivons les :

$$A = \sum_{i=i_0}^{i_1} a_i \sigma^i \text{ et } B = \sum_{j=j_0}^{j_1} b_j \sigma^j, \text{ avec } a_{i_0} a_{i_1} \neq 0 \text{ et } b_{j_0} b_{j_1} \neq 0.$$

On a donc $i_1 - i_0 \geq j_1 - j_0 \geq 0$. Soit $u := c\sigma^k$, avec $c \in K^*, k \in \mathbf{Z}$. Pour que l'opération $A - uB$ élimine le terme dominant $a_{i_1}\sigma^{i_1}$ de A, il faut, et il suffit, que :

$$(c\sigma^k)(b_{j_1}\sigma^{j_1}) = a_{i_1}\sigma^{i_1} \Longleftrightarrow k := i_1 - j_1 \text{ et } c := \frac{a_{i_1}}{\sigma^k(b_{j_1})}.$$

Tous les termes non nuls de uB ont alors un exposant compris entre $j_0 + k = j_0 + i_1 - j_1 \geq i_0$ (minorant) et $j_1 + k = i_1$ (majorant), donc dans le même intervalle que A. Tous les termes non nuls de $A - uB$ ont donc un exposant compris entre i_0 (minorant) et $i_1 - 1$ (majorant), puisque le terme d'exposant i_1 a été éliminé. On a donc :

$$\deg(A - uB) \leq (i_1 - 1) - i_0 < \deg A.$$

Théorème 3.4 (division euclidienne à gauche). *Soient $A, B \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ avec $B \neq 0$. Il existe alors un couple $(Q, R) \in {\mathcal{D}_{K,\sigma}}^2$ tel que $A = QB + R$ et* $\deg R < \deg B$.

Démonstration. C'est l'algorithme classique :

```
R := A; Q := 0;                          % invariant de boucle: A = Q B + R
tant que deg R >= deg B
   (choisir u tel que deg(R - u B) < deg R;
    R := R - u B; Q := Q + u);;
```

Il faut bien entendu justifier la possibilité de choisir u : c'est le calcul qui précède l'énoncé du théorème. □

Remarque 3.5. Il n'y a pas unicité : l'argument habituel repose sur la règle de majoration de $\deg(R' - R)$ qui est fausse ici. Par exemple, en divisant $a + b\sigma$ par $\sigma - 1$, on peut trouver au choix le reste $a + b$ ou le reste $(a + b)\sigma$ (qui sont tous deux de degré 0). On peut cependant raffiner l'énoncé dans ce sens, mais nous n'en avons pas besoin.

10. Nous dirons que $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i S^i \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ est *standard* si $a_0 \neq 0$, et qu'il est *standard unitaire* s'il est standard et $a_n = 1$. Alors, pour tout $P \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ non nul, il existe un unique $Q = uP$, avec u inversible, qui est standard unitaire.

Corollaire 3.6. *Tout idéal à gauche de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est principal. Tout idéal non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $\mathcal{D}_{K,\sigma}P$, où P est standard unitaire.*

> **Exercice 3.7.** Énoncer et prouver le théorème et le corollaire pour la division et les idéaux à droite.
>
> **Exercice 3.8.** Démontrer que l'anneau de polynômes non commutatifs $K < \sigma >$ est un anneau euclidien, pour le degré usuel (non absolu) : $\deg \sum_i a_i \sigma^i = \max_{a_i \neq 0} i$.

Alors qu'est-ce qui est compliqué ? Le corollaire ci-dessus dit que les idéaux à gauche sont simples à classifier : hors l'idéal nul, ils sont en bijection avec leurs générateurs standards unitaires, tout comme les idéaux de polynômes usuels (commutatifs).
Ce qui est compliqué, c'est de classer les modules à gauche monogènes. Hors l'unique cas sans torsion de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$, ils sont tous de la forme $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$, où P est standard unitaire. Mais il est difficile de dire à quelle condition $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$. Plus généralement, il est difficile de décrire les morphismes de $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ dans $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$.

Exemple 3.9. Prenons $P := \sigma_q - a$ et $Q := \sigma_q - b$ avec $a, b \in K^*$. Un morphisme de $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ dans $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ est décrit par l'image de la classe 1 $\pmod{\mathcal{D}_{K,\sigma}P}$, soit $F \pmod{\mathcal{D}_{K,\sigma}Q}$; il faut que l'image de la classe $P \pmod{\mathcal{D}_{K,\sigma}P}$, *i.e.* la classe $(\sigma_q - a)F \pmod{\mathcal{D}_{K,\sigma}Q}$, soit nulle, autrement dit, que l'on ait $(\sigma_q - a)F = G(\sigma_q - b)$ pour un certain G. Mais le petit calcul :

$$(\sigma_q - a)F = \sigma_q(F)\sigma_q - aF = \sigma_q(F)\big(\sigma_q - b\big) + \big(\sigma_q(F)b - aF\big)$$

montre que cela équivaut à : $\sigma_q(F)b - aF = H(\sigma_q - b)$ pour un certain H En comparant les degrés absolus, on voit que la condition est $\sigma_q(F)b = aF$. En particulier, on a équivalence entre les conditions : (i) il y a un morphisme non nul ; (ii) les deux modules sont isomorphes ; (iii) a/b appartient au sous-groupe de K^* image de l'endomorphisme $F \mapsto \sigma_q(F)/F$.

Pour des opérateurs plus généraux, on ne s'en tire pas aussi facilement (!) et il faut faire intervenir des propriétés spécifiques du corps K. Dans notre cas, ces propriétés viendront de l'analyse.

> **Exercice 3.10.** Montrer que, si $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}(\sigma_q - a)$, alors le degré absolu de Q est 1. (Calculer les dimensions.)

3.1.3 Extension du corps de base

Soit (K', σ') une extension du corps aux différences (K, σ), autrement dit, K' est une extension de K et σ' un automorphisme de K' tel que $\sigma'_{|K} = \sigma$. L'application $\sum a_i \sigma^i \mapsto \sum a_i {\sigma'}^i$ de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ dans $\mathcal{D}_{K',\sigma'}$ est bien définie puisque $K \subset K'$, et il résulte de la condition $\sigma'_{|K} = \sigma$ que c'est un morphisme d'anneaux, qui est injectif. On a de plus un isomorphisme de K'-espaces vectoriels :

$$\mathcal{D}_{K',\sigma'} \simeq K' \otimes_K \mathcal{D}_{K,\sigma}.$$

Exemple 3.11. Si K est l'un des corps $\mathbf{C}(z), \mathbf{C}(\{z\}), \mathbf{C}((z))$ et si $\sigma := \sigma_q$, nous aurons l'usage de l'extension $K' := K[z^{1/\ell}]$ (qui est galoisienne de groupe $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$). Notons $z' := z^{1/\ell}$. Pour étendre σ_q, nous choisirons une racine ℓ-ième q' de q, et nous poserons :

$$\sigma_{q'} : f(z') \mapsto f(q'z').$$

> **Exercice 3.12.** En tant que $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module à gauche, $\mathcal{D}_{K',\sigma'}$ est libre de rang $[K' : K]$.

3.1.4 Conjugaison (ou transformation de jauge)

On a vu à la section 2 l'intérêt des transformations de jauge $g = uf, u \in K^*$. Ce sont en fait les éléments $\sigma(u)/u$ qui apparaissent alors effectivement dans les transformations des équations. Nous allons ici envisager une opération analogue $g = \theta f$, où l'on ne suppose pas que θ est dans le corps de base K, mais seulement que $u := \sigma(\theta)/\theta \in K$.

Soit donc $u \in K^*$. On munit le corps $K' := K(\theta)$ (extension transcendante) de l'unique automorphisme σ' tel que $\sigma'_{|K} = \sigma$ et que $\sigma'(\theta) = u\theta$. Notons pour simplifier $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{K,\sigma}$ et $\mathcal{D}' := \mathcal{D}_{K',\sigma'}$.

Puisque θ est inversible dans $\mathcal{D}'$, il définit un automorphisme intérieur $P \mapsto \theta^{-1}P\theta$ de l'anneau $\mathcal{D}'$. En vertu du calcul ci-dessous, le sous-anneau $\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}'$ est stable par cet automorphisme intérieur :

$$\theta^{-1}\left(\sum a_i\sigma^i\right)\theta = \sum a_i(\theta^{-1}\sigma'\theta)^i = \sum a_i(u\sigma')^i = \sum a_i(u\sigma)^i,$$

car $\theta^{-1}\sigma\theta = \theta^{-1}\sigma'\theta = \theta^{-1}\sigma'(\theta)\sigma' = u\sigma'$. En fait, on a des formules explicites :

$$(u\sigma)^i = \begin{cases} u\sigma(u)\cdots\sigma^{i-1}(u)\sigma^i \text{ si } i \geq 0, \\ (\sigma^{-1}(u)\cdots\sigma^{-j}(u))^{-1}\sigma^i \text{ si } -i = j \geq 0. \end{cases}$$

Nous poserons donc, si $P := \sum a_i\sigma^i$:

$$P^{[u]} := \sum \tilde{a}_i\sigma^i, \text{ où } \tilde{a}_i := \begin{cases} u\sigma(u)\cdots\sigma^{i-1}(u)a_i \text{ si } i \geq 0, \\ (\sigma^{-1}(u)\cdots\sigma^{-j}(u))^{-1}a_i \text{ si } -i = j \geq 0. \end{cases}$$

On a ainsi défini un automorphisme "extérieur" (!) $P \mapsto P^{[u]}$ de l'anneau $\mathcal{D}$, qui induit l'identité sur K.

> **Exercice 3.13.** Montrer que $u \mapsto (P \mapsto P^{[u]})$ est un morphisme de groupes de K^* dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$, dont le noyau est $(K^\sigma)^*$.

3.2 Le polygone de Newton

On va d'abord l'étudier dans le cas d'un corps aux différences valué : K sera un corps commutatif muni (as usual) d'un automorphisme σ, et aussi d'une valuation v de groupe $\mathbf{Z}$ telle que :

(3.13.1) $$\forall x \in K\ ,\ v(\sigma(x)) = v(x).$$

Définition 3.14. Le polygone de Newton $N(P)$ de l'opérateur aux différences $P := \sum a_i\sigma^i \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ (supposé non nul) est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble :

$$\{(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \mid j \geq v(a_i)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

La frontière de $N(P)$ est formée de deux demi-droites verticales (allant vers le haut) et de k vecteurs numérotés de gauche à droite : $(r_1, d_1), \ldots, (r_k, d_k)$, avec $r_i \in \mathbf{N}^*$ et $d_i \in \mathbf{Z}$. (La première coordonnée est en fait un rang et la seconde un degré, d'où leurs noms.) Notant $\mu_i := \dfrac{d_i}{r_i} \in \mathbf{Q}$ les pentes de ces vecteurs, on a donc (par convexité) :

$$\mu_1 < \cdots < \mu_k.$$

On notera $S(P) := \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ le "support" de $N(P)$.

Si $a \in K^*$ et $\ell \in \mathbf{Z}$, il est immédiat que $N(a\sigma^\ell P) = N(Pa\sigma^\ell) = N(P) + (\ell, v(a))$. Le polygone de Newton n'est donc intéressant qu'à translation près, et que c'est l'objet suivant qui possède les meilleures propriétés.

Définition 3.15. Avec les mêmes notations, la *fonction de Newton* de P est la fonction $r_P : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ définie par :

$$r_P(\mu_i) = r_i, \text{ et } r_P = 0 \text{ sur } \mathbf{Q} \setminus S(P).$$

La donnée de r_P est équivalente à celle de $N(P)$ à translation près. Ainsi, si $Q = a\sigma^\ell P$ (ou $Q = Pa\sigma^\ell$), avec $a \in K^*$ et $\ell \in \mathbf{Z}$, on a $r_Q = r_P$. Autrement dit, r_P est déterminée par l'idéal $\mathcal{D}_{K,\sigma}P$. On verra qu'elle est même déterminée par le module $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$, mais c'est plus difficile !

Exemple 3.16. L'opérateur $P := {\sigma_q}^2 + \sigma_q + 1$ a pour unique pente 0, et $r_P(0) = 2$.
L'opérateur $P := {\sigma_q}^2 + z\sigma_q + 1$ a pour unique pente 0, et $r_P(0) = 2$.
L'opérateur $P := {\sigma_q}^2 + \sigma_q + z$ a pour pentes -1 et 0, et $r_P(-1) = r_P(0) = 1$.
L'opérateur $P := z{\sigma_q}^2 + \sigma_q + 1$ a pour pentes 0 et 1, et $r_P(0) = r_P(1) = 1$.
L'opérateur $P := z{\sigma_q}^2 + z\sigma_q + 1$ a pour unique pente $1/2$, et $r_P(1/2) = 2$.
L'opérateur $P := z{\sigma_q}^2 + \sigma_q + z$ a pour pentes -1 et 1, et $r_P(-1) = r_P(1) = 1$.
L'opérateur $P := {\sigma_q}^2 + z\sigma_q + z$ a pour unique pente $-1/2$, et $r_P(-1/2) = 2$.
L'opérateur $P := z^2{\sigma_q}^2 + z\sigma_q + 1$ a pour unique pente 1, et $r_P(1) = 2$.
L'opérateur $P := {\sigma_q}^2 + z\sigma_q + z^2$ a pour unique pente -1, et $r_P(-1) = 2$.

Exercice 3.17. Quels sont les polygones de Newton des équations étudiées dans les exemples de la section 1.2 ?

3.2.1 Valuations tordues, formes initiales, additivité de la fonction de Newton

On fixe $\mu \in \mathbf{Q}$ et l'on pose :

$$\begin{aligned} v_\mu(a\sigma^\ell) &:= v(a) - \mu\ell, \\ v_\mu(P) &:= \min v_\mu(a_i\sigma^i), \text{ où } P := \sum a_i\sigma^i \\ In_\mu(P) &:= \sum_{v_\mu(a_i\sigma^i) = v_\mu(P)} a_i\sigma^i. \end{aligned}$$

La *forme initiale* $In_\mu(P)$ (pour la "valuation tordue" v_μ) est caractérisée par les propriétés suivantes : $In_\mu(P)$ est *homogène* (tous ses termes ont même image par v_μ) ; et $v_\mu\big(P - In_\mu(P)\big) > v_\mu(P)$. Pour P et Q quelconques, on a évidemment :

$$v_\mu(P + Q) \geq \min\big(v_\mu(P), v_\mu(Q)\big).$$

Lemme 3.18. *Si P et Q sont homogènes alors PQ l'est aussi et $v_\mu(PQ) = v_\mu(P) + v_\mu(Q)$. En conséquence, $In_\mu(PQ) = In_\mu(P) In_\mu(Q)$.*

Démonstration. C'est immédiat, grâce à l'hypothèse 3.13.1. □

Lemme 3.19. *Le degré absolu de $In_\mu(P)$ est $r_P(\mu)$.*

Démonstration. C'est un argument classique concernant le polygone de Newton en algèbre commutative : dans la description de la frontière de $N(P)$ les points du vecteur de pente μ_i correspondent aux termes de $In_{\mu_i}(P)$; la non-commutativité de l'indéterminée σ n'y change rien. □

Théorème 3.20 (Additivité de la fonction de Newton)**.** *Soient* $P, Q \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$. *Alors :*

$$\forall \mu \in \mathbf{Q}\ ,\ r_{PQ}(\mu) = r_P(\mu) + r_Q(\mu).$$

Démonstration. Cela découle des deux lemmes qui précèdent. □

3.2.2 Comportement de la fonction de Newton par extension

Si l'on remplace v par $v' := dv, d \in \mathbf{R}_+^*$, "les pentes sont multipliées par d" ; pour être précis, le polygone de Newton $N'(P)$ correspondant à v' est l'image de $N(P)$ par l'application $(x, y) \mapsto (x, dy)$. Les fonctions de Newton sont reliées par les formules :

$$r'_P(\mu) = r_P(\mu/d) \Longleftrightarrow r'_P(d\mu) = r_P(\mu).$$

On utilisera ces relations dans le cas d'une extension (K', σ') du corps aux différences (K, σ), et munie d'une valuation v' qui est une extension de v avec degré de ramification d, *i.e.* : $v'_{|K} = dv$; typiquement, c'est l'exemple 3.11 avec les valuations z-adique et z'-adique.

3.2.3 Comportement de la fonction de Newton par conjugaison

On reprend les notations sur la conjugaison du paragraphe 3.1.4. Si $\sigma\theta = u\theta$ et $v(u) = \lambda$, les formules reliant $P^{[u]}$ à P impliquent :

$$v\left(\tilde{a}_i\right) = v(a_i) + i\lambda.$$

On en déduit que le polygone de Newton $N\left(P^{[u]}\right)$ est l'image de $N(P)$ par l'application $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x)$. Les fonctions de Newton sont donc reliées par les formules :

$$r_{P^{[u]}}(\mu) = r_P(\mu - \lambda) \Longleftrightarrow r_{P^{[u]}}(\mu + \lambda) = r_P(\mu).$$

La conjugaison "augmente les pentes de λ".

3.3 Résolution et factorisation formelles

Nous considérons maintenant la situation suivante :
- $K := \mathbf{C}((z))$,
- q est un nombre complex non nul et non racine de l'unité,
- $\sigma := \sigma_q$,
- v est la valuation z-adique : $v(\sum_i f_i z^i) = \min_{a_i \neq 0} i$, pour tout $f \in \mathbf{C}((z))^*$.

Notre but est de factoriser un opérateur non trivial $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ de manière à "casser le polygone de Newton", *i.e.* de décomposer P en produit de facteurs n'ayant chacun qu'une pente. Quitte à multiplier P à gauche par un facteur inversible, nous pouvons aussi bien supposer que $v_0(P) = 0$ et que P est standard (pas nécessairement unitaire) ; autrement dit :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i {\sigma_q}^i = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ j \geq 0}} a_{i,j} z^j {\sigma_q}^i,\ \text{avec } a_0 \neq 0 \text{ et } \exists i\ :\ a_{i,0} \neq 0.$$

3.3.1 Équation caractéristique et solutions

Soit $f := \sum\limits_{k \geq 0} f_k z^k \in \mathbf{C}[[z]]$. Alors :

$$P.f = \sum_{i,j,k \geq 0} a_{i,j} z^j {\sigma_q}^i (f_k z^k) = \sum_{i,j,k \geq 0} a_{i,j} q^{ik} f_k z^{j+k} \in \mathbf{C}[[z]].$$

En particulier, les coefficients $(P.f)_\ell$ de z^ℓ dans $P.f$, pour tout $\ell \geq 0$, vérifient :

$$(P.f)_0 = \left(\sum_{i\geq 0} a_{i,0}\right) f_0 \text{ et } \forall \ell \geq 1 \ , \ (P.f)_\ell = \left(\sum_{i\geq 0} a_{i,0} q^{\ell i}\right) f_\ell + \text{ une combinaison linéaire de } f_0, \ldots, f_{\ell-1}.$$

On peut préciser comme suit cette combinaison linéaire. On écrit, pour $j \in \mathbf{N}$:

$$P_j := \sum_{0\leq i\leq n} a_{i,j} {\sigma_q}^i \in \mathbf{C} < \sigma_q >, \quad \overline{P_j} := \sum_{0\leq i\leq n} a_{i,j} s^i \in \mathbf{C}[s].$$

On a donc $P = P_0 + zP_1 + \cdots$ et $\overline{P} = \overline{P_0}$. De l'égalité facile $(z^j P_j)(f_k z^k) = \overline{P_j}(q^k) f_k z^{j+k}$, on déduit :

$$(P.f)_\ell = \sum_{j+k=\ell} \overline{P_j}(q^k) f_k = \overline{P_\ell}(q^0) f_0 + \cdots + \overline{P_0}(q^\ell) f_\ell.$$

Avec ces notations, les coefficients de la solution f sont donnés par $f_0 := 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall \ell \geq 1 \ , \ f_\ell := -\frac{\overline{P_\ell}(q^0) f_0 + \cdots + \overline{P_0}(q^{\ell-1}) f_{\ell-1}}{\overline{P_0}(q^\ell)}. \tag{3.20.1}$$

Bien entendu, tous les $\overline{P_j}$ sont de degré $\leq n$.

Lemme 3.21. *(i) Une condition* nécessaire *pour que l'équation $P.f = 0$ admette une solution série formelle $f \in \mathbf{C}[[z]]$ de terme constant $f_0 \neq 0$ est :* $\sum\limits_{i\geq 0} a_{i,0} = 0$.
(ii) Une condition suffisante *pour que l'équation $P.f = 0$ admette une solution série formelle $f \in \mathbf{C}[[z]]$ de terme constant $f_0 \neq 0$ est :*

$$\sum_{i\geq 0} a_{i,0} = 0 \ \text{et} \ \forall \ell \geq 1 \ , \ \sum_{i\geq 0} a_{i,0}\, q^{\ell i} \neq 0.$$

Cette solution est alors unique pour $f_0 \in \mathbf{C}^*$ donné.

Démonstration. L'assertion (i) découle immédiatement du calcul qui précède. L'assertion (ii) traduit le calcul des coefficients par la relation de récurrence (3.20.1). □

Définition 3.22. Soit $P := \sum a_i {\sigma_q}^i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ tel que $v_0(P) \neq 0$. L'*équation caractéristique* (associée à la pente 0) de P est le polynôme de Laurent :

$$\overline{P}(s) := \sum a_{i,0}\, s^i \in \mathbf{C}[s, s^{-1}].$$

On dit que $s_0 \in \mathbf{C}^*$ est une *racine non résonnante* de l'équation caractéristique si :

$$\overline{P}(s_0) = 0 \text{ et } \forall \ell \geq 1 \ , \ \overline{P}(q^\ell s_0) \neq 0.$$

La condition nécessaire (resp. suffisante) du lemme se traduit en disant que 1 est racine (resp. racine non résonnante) de l'équation caractéristique de P. Le lemme peut facilement être amélioré comme suit :

Lemme 3.23. *(i) Une condition* nécessaire *pour que l'équation $P.f = 0$ admette une solution série formelle $f \in \mathbf{C}[[z]]$ telle que $v(f) = m$ est que q^m soit racine de l'équation caractéristique de P.*
(ii) Une condition suffisante *pour que l'équation $P.f = 0$ admette une solution série formelle $f \in \mathbf{C}[[z]]$ telle que $v(f) = m$ est que q^m soit racine non résonnante de l'équation caractéristique de P. Cette solution est alors unique pour $f_m \in \mathbf{C}^*$ donné.*

Avec les notations sur les formes initiales du 3.2.1, il est clair que $\overline{P}$ n'est autre que la forme initiale de P associée à la pente 0. Le degré absolu de $\overline{P}$ est donc égal à $r_P(0)$ et l'on voit que, pour que l'équation caractéristique admette des racines non nulles, il faut, et il suffit, que $r_P(0) > 0$, autrement dit que 0 soit une pente de P.

Définition 3.24. On suppose que 0 est une pente de P. Les *exposants* de P (attachés à la pente 0) sont les racines non nulles de l'équation caractéristique ; les exposants *non résonnants* en sont les racines non résonnantes.

Solutions attachées aux autres exposants. Soit $c \in K^*$ et notons e_c un élément inversible d'une extension (K', σ') de $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ tel que $\sigma' e_c = c e_c$. Si $P := \sum a_i {\sigma_q}^i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$, est non trivial, il résulte des propriétés de la conjugaison (voir 3.1.4) que :

$$e_c^{-1} P e_c = P^{[c]} = \sum a_i c^i {\sigma_q}^i \Longrightarrow \overline{P^{[c]}}(s) = \overline{P}(cs).$$

Ainsi, les exposants de $P^{[c]}$ se déduisent de ceux de P en divisant ces derniers par c. En particulier, c est un exposant (resp. un exposant non résonnant) de P si, et seulement si, 1 est un exposant (resp. un exposant non résonnant) de $P^{[c]}$. Dans ce dernier cas, l'équation $P.f = 0$ admet une unique solution de la forme $f = e_c g$, où $g = 1 + g_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$. (Argument : si $f = e_c g$, alors $P.f = 0 \Leftrightarrow P^{[c]}.g = 0$ et l'on applique le lemme 3.21 à cette dernière équation.)

Solutions attachées aux pentes entières. Soit $\mu \in \mathbf{Z}$ une pente entière de l'opérateur non trivial $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$. Alors, d'après les propriétés de la fonction de Newton relativement à la conjugaison (voir 3.2.3), 0 est une pente de $P^{[z^{-\mu}]}$. Soit maintenant c un exposant non résonnant de $P^{[z^{-\mu}]}$ attaché à la pente 0. Notons θ un élément inversible d'une extension (K', σ') de $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ tel que $\sigma' \theta = z\theta$. On suppose également que K' contient l'élément inversible e_c tel que $\sigma' e_c = c e_c$. Alors l'équation $P.f = 0$ admet une unique solution de la forme $f = \theta^\mu e_c g$, où $g = 1 + g_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$.

Remarque 3.25. On peut montrer (lemme du Wronskien, *cf.* [DV02]) que les solutions de $Pf = 0$ dans une extension K' forment un espace vectoriel de dimension $\leq \deg P$ sur le corps des constantes de K'. Si le corps K' contient suffisamment de symboles e_c, un symbole θ et un symbole ℓ_q tel que $\sigma' \ell_q = \ell_q + 1$, alors, pour tout opérateur à pentes entières P, l'espace des solutions est de dimension $\deg P$. En vieux langage, l'équation $P.f = 0$ admet "a full complement of solutions". Des algorithmes explicites sont décrits dans [MZ00, Sau09].

3.3.2 Factorisation formelle

Nous pouvons maintenant "casser le polygone de Newton".

Premier cas. On suppose que P admet la pente 0 et l'exposant non résonnant 1. Il résulte alors du lemme 3.21 que l'équation $P.f = 0$ admet une unique solution de la forme $f = 1 + f_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$. Notons $g := (\sigma_q f)/f \in \mathbf{C}[[z]]$, de sorte que $(\sigma_q - g).f = 0$. La division euclidienne :

$$P = Q(\sigma_q - g) + R$$

admet un reste R nul ou de degré 0, et tel que $R.f = P.f - Q(\sigma_q - g).f = 0$: on a donc nécessairement $R = 0$, d'où $P = Q(\sigma_q - g)$.

Exercice 3.26. Soient q est λ deux nombres complexes tels que $\lambda \notin q^{-\mathbf{N}}$ et que q n'est pas une racine de l'unité. Considérons la série $\Phi(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(q\lambda;q)_n}$. Démontrer l'identité

$$\Phi(z) = (1-\lambda)e_q(z) \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{1-q^n\lambda} \frac{(-z)^n}{(q;q)_n},$$

à partir de l'équation aux q-différences satisfaite par $\Phi((1-q)z)$ (*cf.* [DV09, Lemma 1.3] ou [DV04, Lemma 20.1]) :

$$(\sigma_q - 1) \circ (\lambda\sigma_q - ((q-1)z+1))y(x) = 0\,.$$

Deuxième cas. On suppose que P admet la pente 0 et l'exposant $c \in \mathbf{C}^*$. Puisque l'ensemble des exposants est fini et que, par hypothèse, q n'est pas racine de l'unité, quitte à remplacer c par un $cq^m, m \in \mathbf{N}$, on peut le supposer non résonnant. D'après le paragraphe 3.3.1, $P^{[c]}$ admet l'exposant non résonnant 1 et l'on peut écrire (d'après le premier cas examiné ci-dessus) $P^{[c]} = Q'(\sigma_q - g')$ pour un $g' \in \mathbf{C}[[z]]$, donc $P = Q(\sigma_q - g)$, où $Q := c^{-1}(Q')^{[c^{-1}]}$ et $g := cg'$, puisque $(\sigma_q - g')^{[c^{-1}]} = c^{-1}\sigma_q - g'$.

Itération des deux premiers cas. Il est par ailleurs clair que, dans chacun des deux premiers cas, le polygone de Newton de $\sigma_q - g$ a pour seule pente 0, et l'on voit que celui de Q est donné par les relations :

$$r_Q(\mu) = \begin{cases} r_P(\mu) - 1 \text{ si } \mu = 0, \\ r_P(\mu) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons d'ailleurs que, si P est standard, on peut choisir Q standard. En itérant cette opération, on voit que l'on peut obtenir une factorisation :

$$P = P'P_0, \text{ où } S(P_0) = \{0\} \text{ et } S(P') = S(P) \setminus \{0\}.$$

Notons aussi que l'égalité $r_P = r_{P'} + r_{P_0}$ permet alors de déterminer totalement $r_{P'}$ et r_{P_0}. Encore une fois, si P est standard, P' et P_0 peuvent être choisis standards.

Troisième cas. Soit μ une pente *entière* quelconque de l'opérateur non trivial $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$. De la décomposition ci-dessus $Q = Q'Q_0$ appliquée à $Q := P^{[z^{-\mu}]}$, on déduit, en posant $P' := (Q')^{[z^\mu]}$ et $P_\mu := Q_0^{[z^\mu]}$, la décomposition :

$$P = P'P_\mu, \text{ où } S(P_\mu) = \{\mu\} \text{ et } S(P') = S(P) \setminus \{\mu\}.$$

De plus, $r_{P'}$ et r_{P_μ} sont alors totalement déterminés par cette relation (et l'additivité de la fonction de Newton) ; et, si P est standard, P' et P_0 peuvent être choisis standards.

En itérant le troisième cas, on obtient immédiatement :

Théorème 3.27. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ un opérateur non trivial* à pentes entières. *Notons $\mu_1, \ldots, \mu_k$ les pentes de P* dans un ordre arbitraire. *Il existe alors une décomposition :*

$$P = P_1 \cdots P_k$$

dans $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ telle que, pour $i = 1, \ldots, k$:

$$r_{P_i}(\mu_i) = r_P(\mu_i) \text{ et } \forall \mu \in \mathbf{Q} \setminus \{\mu_i\}\ ,\ r_{P_i}(\mu) = 0.$$

Si P est standard, les P_i peuvent être choisis standards.

Quatrième cas. Si les pentes de P en sont pas toutes entières, soit ℓ un dénominateur commun et considérons l'extension K' décrite à l'exemple 3.11. Le polygone de Newton de P vu comme élément de $\mathcal{D}' := K' \otimes_{\mathbf{C}((z))} \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ est à pentes entières, et l'on déduit du théorème une décomposition $P = P_1 \cdots P_k$ qui casse le polygone de Newton, à ceci près que les P_i sont dans $\mathcal{D}'$. Nous verrons via l'algèbre linéaire (Propriétés abéliennes, 4.3.2) qu'une telle décomposition existe dans $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$. Cependant, tels quels, nos calculs permettent de démontrer :

Théorème 3.28. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ un opérateur non trivial de degré absolu n. Il existe alors une décomposition :*

$$P = L_1 \cdots L_n$$

dans $K' \otimes_{\mathbf{C}((z))} \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ telle que chaque facteur L_i est de degré absolu 1. Le multiensemble des pentes des L_i est déterminé par r_P, mais leur ordre peut être choisi arbitrairement.

3.4 Résolution et factorisation analytiques, pour $|q| \neq 1$

Nous avons vu que les opérateurs aux q-différences à coefficients formels admettent une factorisation qui casse leur polygone de Newton, propriété partagée par les opérateurs différentiels et aux différences. Nous allons voir que, lorsque $|q| \neq 1$, les opérateurs aux q-différences à coefficients analytiques admettent une factorisation *analytique* qui casse leur polygone de Newton, phénomène découvert par Adams et redécouvert indépendamment par Birkhoff-Guenter, et que nous nommerons *lemme d'Adams* : ce résultat est spécifique aux q-différences. Nous supposerons que $|q| > 1$, le cas < 1 s'y ramenant sans problème.

3.4.1 Le lemme d'Adams

Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ un opérateur aux q-différences à coefficients analytiques non trivial. Pour être précis, le lemme d'Adams dit que les séries formelles $g = 1+g_1z+\cdots \in \mathbf{C}[[z]]$ qui apparaissent dans les solutions de l'équation $f = \theta^\mu e_c g$ décrites au 3.3.1 sont, *si μ est la dernière pente de P*, convergentes. Nous prendrons P sous forme standard : $P = a_0 + \cdots + a_n {\sigma_q}^n$, $a_0 a_n \neq 0$; et de plus tel que $v_0(P) = 0$, *i.e.* les $a_i \in \mathbf{C}\{z\}$ et l'un au moins des $a_i(0)$ est non nul.

Lemme 3.29 (Adams)**.** *On suppose que la dernière pente de P (*i.e.* sa plus grande pente) est* 0*, et que* 1 *en est exposant non résonnant. Alors l'unique solution de $P.f = 0$ de la forme $f = 1 + f_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$ est convergente.*

Démonstration. On reprend les notations explicitées au début de 3.3.1 ; en particulier, on invoque la relation de récurrence (3.20.1). L'hypothèse sur la pente 0 et l'exposant non résonnant 1 dit que $\overline{P_0}$ est de degré n, que $\overline{P_0}(1) = 0$, et que $\overline{P_0}(q^\ell) \neq 0$ pour tout $\ell \geq 1$ (ce qui assure la non nullité du dénominateur dans la relation de récurrence ci-dessus). Il existe donc $A > 0$ tel que :

$$\forall \ell \geq 1 \ , \ \left|\overline{P_0}(q^\ell)\right| \geq A \, |q|^{\ell n}.$$

Soit enfin $R > 0$ strictement majoré par les rayons de convergence de $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}\{z\}$ et soit $C := R^{-1}$. Il existe donc $B > 0$ tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ , \ \forall j \geq 0 \ , \ |a_{i,j}| \leq BC^j.$$

On en déduit les majorations :

$$\left|\overline{P_j}(s)\right| \leq \sum_{i=0}^{n} BC^j \, |s|^i \leq BC^j \frac{|s|^{n+1} - 1}{|s| - 1},$$

d'où en particulier (puisque $|q| > 1$) l'existence de $D > 0$ tel que :

$$\forall i, j \in \mathbf{N}\ ,\ \left|\overline{P_j}(q^i)\right| \leq DC^j\,|q|^{ni}\,.$$

De la relation de récurrence, on tire alors, pour $\ell \geq 1$:

$$|f_\ell| \leq \frac{D}{A}\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{C^{\ell-i}\,|q|^{ni}}{|q|^{n\ell}}\,|f_i| \Longrightarrow \frac{|f_\ell|}{\left(C\,|q|^{-n}\right)^\ell} \leq E\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{|f_i|}{\left(C\,|q|^{-n}\right)^i}$$

pour un certain $E > 0$. Il est alors facile de conclure à la convergence de f. □

Remarque 3.30. Le raisonnement ci-dessus ne vaut que parce que 0 est la plus grande pente de P. Par exemple, si l'on prend : $P := (\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1) = qz{\sigma_q}^2 - (1+z)\sigma_q + 1$, dont les pentes sont 0 et 1, et dont 0 est exposant non résonnant, la solution f est la série de Tshakaloff du 1.2.1 $Ч(z) := \sum\limits_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}z^n$, qui diverge rapidement.

3.4.2 Factorisation analytique

Reprenant les arguments qui ont mené au théorème 3.27, nous obtenons la factorisation analytique. Il est à noter que *l'ordre des pentes est imposé* par le lemme d'Adams : on factorise d'abord à droite la plus grande pente.

Théorème 3.31 (Adams, Birkhoff-Guenter)**.** *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ un opérateur non trivial* à pentes entières*. Notons $\mu_1 < \cdots < \mu_k$ les pentes de P* rangées en ordre croissant*. Il existe alors une décomposition :*

$$P = P_1 \cdots P_k$$

dans $\mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ telle que, pour $i = 1, \ldots, k$:

$$r_{P_i}(\mu_i) = r_P(\mu_i) \text{ et } \forall \mu \in \mathbf{Q} \setminus \{\mu_i\}\ ,\ r_{P_i}(\mu) = 0.$$

Si P est standard, les P_i peuvent être choisis standards.

Quitte à ramifier, cette décomposition subsiste pour un opérateur à pentes quelconques, à condition de prendre les facteurs P_i dans $\mathcal{D}' := K' \otimes_{\mathbf{C}((z))} \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$. Comme pour le cas formel, nous verrons au 4.3.2 que le résultat demeure vrai avec des $P_i \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$. Nous avons encore directement le résultat suivant :

Théorème 3.32. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ un opérateur non trivial de degré absolu n. Il existe alors une décomposition :*

$$P = L_1 \cdots L_n$$

dans $K' \otimes_{\mathbf{C}((z))} \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ telle que chaque facteur L_i est de degré absolu 1*. Le multiensemble des pentes des L_i est déterminé par r_P, et leur ordre est croissant.*

Exercice 3.33. Montrer que l'opérateur $P := (\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1) = qz{\sigma_q}^2 - (1+z)\sigma_q + 1$ n'admet aucune facorisation convergente $P = P_1P_0$ pour laquelle $S(P_0) = \{0\}$ et $S(P_1) = \{1\}$.

Exercice 3.34. Factoriser l'opérateur d'ordre 2 qui annule la série de Mordell (exercice 1.12).

3.5 Résolution et factorisation analytiques, pour $|q| = 1$

Nous démontrons ici quelques résultats dans le cas $|q| = 1$, en utilisant les techniques de factorisation introduites dans les sections précédentes. Dans la suite (*cf.* §5.3) nous démontrerons des résultats plus fins, par des techniques plus intrinsèques. Soit, donc, q un nombre complexe de module 1, non racine de l'unité.

3.35. Hypothèse importante. Nous supposerons à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce texte que q est tel que la série q-exponentielle est convergente (*cf.* §1.3).

Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ un opérateur aux q-différences à coefficients analytiques non trivial. Nous prendrons P sous forme standard : $P = a_0 + \cdots + a_n {\sigma_q}^n$, $a_0 a_n \neq 0$; et de plus tel que $v_0(P) = 0$, *i.e.* les $a_i \in \mathbf{C}\{z\}$ et l'un au moins des $a_i(0)$ est non nul. Nous avons donc le lemme d'Adams "amélioré" suivant :

Lemme 3.36. *On suppose que* 0 *est une pente du polygone de Newton de* P*, d'exposants* $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$*, et que* 1 *en est exposant non résonnant. Alors, si la série*

$$\sum_{n \geq 0, \lambda_i \notin q^{\mathbf{Z}}} \frac{z^n}{(\lambda_1; q)_n \cdots (\lambda_r; q)_n}$$

converge, l'unique solution de $P.f = 0$ *de la forme* $f = 1 + f_1 z + \cdots \in \mathbf{C}[[z]]$ *est convergente.*

Démonstration. Considérons la relation de récurrence (3.20.1), définissant les coefficients de f. Les termes aux dénominateurs s'écrivent, par définition,

$$\overline{P}_0(q^\ell) = (q^\ell - 1)(q^\ell - \lambda_1) \cdots (q^\ell - \lambda_1)\,.$$

Il n'est pas difficile de voir que les petits diviseurs qui apparaissent au dénominateur de relation de récurrence (3.20.1) sont contrôlés par les hypothèses diophantiennes du lemme. □

En itérant l'application du lemme d'Adams, comme nous l'avons déjà fait dans les sections précédentes, on peut arriver a factoriser l'opérateur P.

Théorème 3.37. *Soit* $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ *un opérateur non trivial, ayant une pente entière* $\mu \in \mathbf{Z}$*, et soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *les exposants de la pente* μ*. On suppose que la série*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\prod_{i,j=1,\ldots,r; \lambda_i/\lambda_j \notin q^{\mathbf{Z}}} (\lambda_i/\lambda_j; q)_n} \tag{3.37.1}$$

converge. Alors il existe une décomposition $P = Q P_\mu$ *dans* $\mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ *telle que :*

$$r_{P_\mu}(\mu) = r_P(\mu) \text{ et } \forall \nu \in \mathbf{Q} \setminus \{\mu\}\ ,\ r_{P_\mu}(\nu) = 0\,.$$

Si P *est standard, l'opérateur* P_μ *peut être choisi standard.*

Si les pentes μ_i de P ne sont pas entières, nous pouvons encore une fois considérer une extension cyclique de la forme K' et obtenir le

Théorème 3.38. *Soit* $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ *un opérateur non trivial de degré absolu* n *et soient* $\mu_1, \ldots, \mu_\kappa$ *des pentes de* P*, dont les exposants vérifient la condition* (3.37.1)*. Il existe alors une décomposition :*

$$P = Q L_1 \cdots L_n$$

dans $K' \otimes_{\mathbf{C}((z))} \mathcal{D}_{\mathbf{C}(\{z\}),\sigma_q}$ *telle que chaque facteur* L_i *est de degré absolu* 1*. De plus, chaque* L_i *a sa pente dans l'ensemble* $\{\mu_1, \ldots, \mu_\kappa\}$ *et il y a exactement* $r_P(\mu_j)$ *facteurs* L_i *ayant la pente* μ_j*, pour tout* $j = 1, \ldots, \kappa$*.*

4 Systèmes et modules

Parallèlement aux méthodes "polynomiales" du chapitre précédent, il y a les méthodes "linéaires" que nous allons maintenant utiliser.

4.1 Modules aux différences

On se place de nouveau (au moins pour commencer) dans le cas d'un corps commutatif K muni d'un automorphisme σ d'ordre infini.

4.1.1 Équations, systèmes, modules, morphismes

Équations et systèmes. Soit $P := a_0 + \cdots + a_n\sigma^n \in \mathcal{D}_{K,\sigma}$ un opérateur non trivial standard, *i.e.* $a_0 a_n \neq 0$. Comme pour les équations différentielles, on peut *vectorialiser* une équation aux différences scalaire d'ordre n en un système aux différences de rang n :

$$P.f = 0 \Longleftrightarrow \sigma X = AX, \text{ où } X := \begin{pmatrix} f \\ \sigma f \\ \vdots \\ \sigma^{n-2} f \\ \sigma^{n-1} f \end{pmatrix} \text{ et } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \ldots & -a_{n-1}/a_n \end{pmatrix}.$$

On remarque d'ailleurs que la matrice d'un tel système est inversible :

$$\det A = (-1)^n a_0/a_n \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Une extension du corps ne modifie évidemment pas le système. Une transformation de jauge $g = \theta f$, avec $\sigma\theta = u\theta$, remplace P par $P^{[u]}$, qui donne lieu au système $\sigma Y = BY$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} g \\ \sigma g \\ \vdots \\ \sigma^{n-1} g \end{pmatrix} = TX, \quad T := \begin{pmatrix} \theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma\theta & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^{n-1}\theta \end{pmatrix}, \quad B = (\sigma T) A T^{-1}.$$

Plus généralement, pour toute *matrice de transformation de jauge* $F \in \mathrm{GL}_n(K)$, le changement d'inconnue $Y = FX$ donne lieu au système équivalent $\sigma Y = BY$, où :

$$B = F[A] := (\sigma F) A F^{-1}.$$

Notre but est de classifier les systèmes aux différences pour la relation d'équivalence :

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists F \in \mathrm{GL}_n(K) \ : \ B = F[A].$$

Nous verrons d'ailleurs au 4.2.2 que tout système est équivalent au système provenant d'une équation.

Exercice 4.1. Dans l'exemple ci-dessus (système provenant d'une équation), montrer que $B \sim uA$. (On suppose que $u \in K^*$ mais pas que $\theta \in K^*$.)

Systèmes et modules. Comme bien souvent, pour classifier, on a intérêt à définir une catégorie des objets à classifier. Considérons l'application $\Phi_A : K^n \to K^n, X \mapsto A^{-1}(\sigma X)$. C'est un *automorphisme semi-linéaire* ou encore *σ-linéaire* [11] de K^n, autrement dit :

$$\forall a \in K \ , \ \forall X \in K^n \ , \ \Phi_A(aX) = \sigma(a)\Phi_A(X).$$

Définition 4.2. Un *module aux différences* sur le corps aux différences (K, σ) est un couple (V, Φ) formé d'un K-espace vectoriel V de dimension finie et d'un automorphisme semi-linéaire (ou encore σ-linéaire) de V. Un morphisme de modules aux différences de (V, Φ) dans (W, Ψ) est une application K-linéaire $f : V \to W$ telle que $\Psi \circ f = f \circ \Phi$. La catégorie ainsi définie sera notée $DiffMod(K, \sigma)$.

Soient (V, Φ) un module aux différences et $\mathcal{B}$ une base de V. On voit sans peine que $\Phi(\mathcal{B})$ est une base de V et que l'on peut donc écrire :

$$\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}A', \text{ avec } A' \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Notant $A := A'^{-1}$, on voit alors que l'application $f : X \mapsto \mathcal{B}X$ est un isomorphisme de modules aux différences de (K^n, Φ_A) dans (V, Φ) ; cela résulte du calcul suivant :

$$(\Phi \circ f)(X) = \Phi(\mathcal{B}X) = \Phi(\mathcal{B})\sigma(X) = \mathcal{B}A^{-1}\sigma(X) = f(A^{-1}\sigma(X)) = (f \circ \Phi_A)(X).$$

(La deuxième égalité vient de la σ-linéarité de Φ.) Ainsi, tout module aux différences est isomorphe à un (K^n, Φ_A). D'autre part, les morphismes de (K^n, Φ_A) dans (K^p, Φ_B) sont par définition des applications linéaires de K^n dans K^p, donc des matrices $F \in M_{p,n}(K)$, telles que, pour tout $X \in K^n$, on ait $B^{-1}\sigma(FX) = FA^{-1}\sigma(X)$, autrement dit, telles que :

$$(\sigma F)A = BF.$$

En particulier, tout isomorphisme de (K^n, Φ_A) dans (K^p, Φ_B) est une matrice $F \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $F[A] = B$. [12] Plus généralement, $DiffMod(K, \sigma)$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les matrices inversibles sur K et telle que les morphismes de $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ dans $B \in \mathrm{GL}_p(K)$ sont les matrices $F \in M_{p,n}(K)$ telles que $(\sigma F)A = BF$.

4.1.2 Abélianité

Proposition 4.3. *La catégorie $DiffMod(K, \sigma)$ est abélienne et K^σ-linéaire.*

Démonstration. Soit $f : (V, \Phi) \to (W, \Psi)$ un morphisme dans la catégorie $DiffMod(K, \sigma)$. Le noyau f est Φ-stable et son image est Ψ-stable. Les morphismes de groupes Φ, Ψ induisent donc respectivement des endomorphismes du noyau et du conoyau de f, dont on voit aisément que ce sont des automorphismes σ-linéaires. On obtient ainsi un noyau et un conoyau dans $DiffMod(K, \sigma)$, dont l'abélianité peut se vérifier mécaniquement (sinon, voir la proposition 4.6). Il est d'autre part clair que $\mathrm{Hom}\big((V, \Phi), (W, \Psi)\big) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, W) \mid \Psi \circ f = f \circ \Phi\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{L}_K(V, W)$ et qu'il est stable par multiplication externe par les éléments de K^σ, d'où la K^σ-linéarité. □

11. L'exposant -1 de A a l'effet suivant : les solutions du système $\sigma X = AX$ sont les points fixes de Φ_A. Comparer avec le cas d'un module différentiel (K^n, Δ_A), où $\Delta_A(X) = X' - AX$: les solutions du système $X' = AX$ sont les vecteurs "horizontaux" de Δ_A.

12. En particulier, tout isomorphisme de (K^n, Φ_A) dans (K^n, Φ_B) est une matrice $F \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $F[A] = B$.

Suites exactes. Il sera utile d'avoir une forme “concrète” pour les suites exactes dans $DiffMod(K,\sigma)$. Soit une telle suite :

$$0 \to (V', \Phi') \to (V, \Phi) \to (V'', \Phi'') \to 0.$$

En choisissant une base $\mathcal{B}'$ de V', que l'on étend (modulo l'identification de V' avec un sous-espace de V) en une base $\mathcal{B}$ de V, et en prenant pour base $\mathcal{B}''$ de V'' l'image de $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$, on voit que la suite ci-dessus est isomorphe à la suivante :

$$0 \to (K^{n'}, \Phi_{A'}) \to (K^n, \Phi_A) \to (K^{n''}, \Phi_{A''}) \to 0,$$

dans laquelle $n = n' + n''$, l'injection est l'inclusion canonique de $K^{n'}$ dans $K^{n'+n''} = K^{n'} \times K^{n''}$ et la surjection est la projection canonique de $K^{n'+n''} = K^{n'} \times K^{n''}$ sur $K^{n''}$. En particulier, A est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix}.$$

Morphismes de suites exactes. Soient $A = \begin{pmatrix} A' & U \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B' & V \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$ des matrices associées à des suites exactes comme ci-dessus. Un morphisme entre ces suites exactes sera donc décrit par trois morphismes $F' : A' \to B'$, $F : A \to B$ et $F'' : A \to B''$, où F est triangulaire par blocs : $F = \begin{pmatrix} F' & G \\ 0 & F'' \end{pmatrix}$. Outre les relations $(\sigma_q F')A' = B'F'$ et $(\sigma_q F'')A'' = B''F''$, la condition $(\sigma_q F)A = BF$ comporte l'égalité :

$$(\sigma_q F')U + (\sigma_q G)A'' = B'G + VF''.$$

Extensions. Supposons maintenant que $A' = B'$ et $A'' = B''$. On a donc deux extensions de $(K^{n''}, \Phi_{A''})$ par $(K^{n'}, \Phi_{A'})$. Un morphisme F d'extensions aura la même forme que ci-dessus, avec de plus $F' = I_{n'}$ et $F'' = I_{n''}$ et l'unique condition :

$$(\sigma_q G)A'' - A'G = V - U.$$

En particulier, l'extension décrite par A est scindée si, et seulement si l'on peut résoudre l'équation non homogène :

$$(\sigma_q X)A'' - A'X = U.$$

Drapeaux et gradués. Nous aurons à considérer des drapeaux $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_k = M$. Il résulte de ce qui précède qu'un tel drapeau est décrit par une matrice de la forme A (ci-dessous, à gauche) où $B_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(K)$ pour $1 \leq i \leq k$, et $U_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(K)$ pour $1 \leq i < j \leq k$.[13] Autrement dit, on identifie M à (K^n, Φ_A) et chaque $P_i := M_i/M_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ à (K^{r_i}, Φ_{A_i}). Le “gradué associé” $M_0 := P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ s'identifie alors à (K^n, Φ_{A_0}), où A_0 est ci-dessous à droite :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & U_{i,j} & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}, \quad A_0 := \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}.$$

Soit $0 = M'_0 \subset \cdots \subset M'_k = M'$ un autre drapeau de même longueur, décrit par une matrice A' similaire. Un morphisme entre ces drapeaux, *i.e.* un morphisme de M dans M' qui envoie

13. Il résulte de ce qui précède qu'un tel drapeau est décrit dans une base convenable par une matrice de la forme A (ci-dessous, à gauche) où $B_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(K)$ pour $1 \leq i \leq k$, et $U_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(K)$ pour $1 \leq i < j \leq k$.

chaque M_i dans M'_i, est décrit par une matrice $F \in \mathrm{Mat}_{n',n}(K)$ telle que $(\sigma_q F)A = A'F$, et de la forme ci-dessous à gauche, avec $F_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(K)$ pour $1 \leq i \leq j \leq k$. Chaque $F_{i,i}$ décrit un morphisme de P_i dans $P'_i := M'_i/M'_{i-1}$, et l'on a un morphisme des gradués de M_0 dans $M'_0 := P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_k$ décrit par la matrice ci-dessous à droite :

$$F := \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & F_{k,k} \end{pmatrix}, \quad F_0 := \begin{pmatrix} F_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & F_{k,k} \end{pmatrix}.$$

En particulier, un morphisme de drapeaux qui devient trivial (égal à l'identité) sur les gradués admet une matrice de la forme :

$$F := \begin{pmatrix} I_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.4. Toutes les descriptions matricielles qui précèdent utilisent une matrice A telle que $M \simeq (K^n, \Phi_A)$. Si l'on veut plutôt écrire $M = (V, \Phi)$ et utiliser la matrice de Φ dans une base de V, cela revient à considérer A^{-1}.

4.1.3 Constructions tensorielles

On vérifie que, si (V, Φ) et (W, Ψ) sont des modules aux différences, alors le K-espace vectoriel $V \otimes_K W$ peut être muni d'un unique automorphisme σ-linéaire tel que $x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)$. On notera $(V, \Phi) \otimes (W, \Psi)$ le module aux différences obtenu ("produit tensoriel"). En particulier, on définit ainsi des puissances tensorielles $M^{\otimes r}$. Si M est un module aux différences, l'automorphisme σ-linéaire $\Phi^{\otimes r}$ du module aux différences $M^{\otimes r}$ passe au quotient en un automorphisme σ-linéaire $\Lambda^r \Phi$ du K-espace vectoriel $\Lambda^r M$ et en fait donc un module aux différences. De plus, la surjection canonique $M^{\otimes r} \to \Lambda^r M$ est un morphisme de modules aux différences. Si maintenant $M' \subset M$ est un sous-module aux différences, l'injection de K-espaces vectoriels de $\Lambda^r M'$ dans $\Lambda^r M$ a une image stable par $\Lambda^r \Phi$, donc identifie $\Lambda^r \Phi$ à un sous-module aux différences de $\Lambda^r M$.

Exercice 4.5. Montrer que les classes d'isomorphismes de modules aux différences de rang 1 forment un groupe pour le produit tensoriel ; reconnaitre $\mathrm{Pic}(K, \sigma)$.

4.2 Relation avec les $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules

4.2.1 $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules à gauche de longueur finie

Soit (V, Φ) un module aux différences sur le corps aux différences (K, σ). On munit le groupe V d'une structure d'un $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module à gauche en définissant la multiplication externe par la formule :

$$\left(\sum a_i \sigma^i\right).x := \sum a_i \Phi^i(x).$$

Le fait que l'on obtienne bien un $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module est directement lié à la σ-linéarité de Φ :

$$\left(\left(\sum a_i \sigma^i\right)\left(\sum b_j \sigma^j\right)\right).x = \left(\sum a_i \sigma^i(b_j) \sigma^{i+j}\right).x = \sum a_i \sigma^i(b_j) \Phi^{i+j}(x) =$$

$$\left(\sum a_i \Phi^i\right)\left(\sum b_j \Phi^j(x)\right) = \left(\sum a_i \sigma^i\right).\left(\left(\sum b_j \sigma^j\right).x\right).$$

(La σ-linéarité justifie la troisième égalité.) Si de plus f est un morphisme de (V,Φ) dans (W,Ψ), il découle facilement de la relation $\Psi \circ f = f \circ \Phi$ que f est une application $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-linéaire du $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module V dans le $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module W :

$$f\left(\left(\sum a_i\sigma^i\right).x\right) = f\left(\sum a_i\Phi^i(x)\right) = \sum a_i(f\circ\Phi^i)(x) = \sum a_i(\Psi^i\circ f)(x) = \left(\sum a_i\sigma^i\right).f(x).$$

Réciproquement, pour toute telle application $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-linéaire, la relation $f(\sigma.x) = \sigma.f(x)$ se traduit par $\Psi \circ f = f \circ \Phi$.

Proposition 4.6. *Le foncteur qui au module aux différences (V,Φ) associe le $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module V est pleinement fidèle. Son image (essentielle) est formée des $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules qui sont, en tant que K-espaces vectoriels, de dimension finie.*

Démonstration. La pleine fidélité résume les calculs ci-dessus. Pour que le $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module V provienne d'un module aux différences, il est évidemment nécessaire que $\dim_K V < \infty$. Réciproquement, si $\dim_K V < \infty$, en posant $\Phi(x) := \sigma.x$, on obtient bien alors un module aux différences (V,Φ). (Puisque le centre de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est K^σ, on retrouve ainsi la proposition 4.3.) □

On peut caractériser autrement l'image essentielle :

Proposition 4.7. *Les $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules à gauche qui sont, en tant que K-espaces vectoriels, de dimension finie, sont les $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules à gauche de longueur finie.*

Démonstration. Si M est de dimension finie sur K, il est de longueur finie et inférieure ou égale à cette dimension : en effet, tout sous-module est en particulier un sous K-espace vectoriel.
Pour la réciproque, il suffit de considérer le cas des modules simples (*i.e.* de longueur 1) le cas général s'y ramenant à coups de suites exactes. Un $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module simple est nécesairement monogène, donc de la forme $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$. On ne peut avoir $P = 0$ car $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ n'est pas simple (il admet de nombreux idéaux), donc $P \neq 0$ et la dimension sur K de $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ est $\deg P$. □

4.2.2 Le lemme du vecteur cyclique

On se place maintenant dans le cas des modules aux q-différences : K est $\mathbf{C}((z))$, $\mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}(z)$, et σ est σ_q.

Théorème 4.8 (Lemme du vecteur cyclique)**.** *Tout module aux q-différences est cyclique.*

Démonstration. Nous reproduisons la démonstration donnée dans [DV02]. Soit (V,Φ) un module aux q-différences de rang n. Soient $x \in V$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que :

$$x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) \neq 0,$$

avec m maximal ; c'est possible puisqu'un tel m est *a priori* majoré par n. On va supposer que $m < n$ et en déduire une contradiction : il s'ensuivra que $m = n$, donc que les vecteurs $x, \Phi(x), \ldots, \Phi^{n-1}(x)$ sont linéairement indépendants, donc qu'ils engendrent V, *i.e.* que x est un *vecteur cyclique*.

Pour tous $\lambda \in \mathbf{C}$, $s \in \mathbf{Z}$ et $x' \in V$, notant $y := x + \lambda z^s x'$, on a :

$$y \wedge \Phi(y) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(y) = 0.$$

Le membre gauche de cette égalité est un polynôme en λ, dont le terme de degré 1 a pour coefficient :

$$\sum_{i=0}^{m} q^{si} x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{i-1}(x) \wedge \Phi^i(x') \wedge \Phi^{i+1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(x),$$

qui est donc nul. Comme c'est vrai pour tout s et que q n'est pas racine de l'unité, ce polynôme en q^s admet une infinité de racines distinctes, donc ses coefficients sont nuls :

$$\forall i \in \{0, \ldots, m\} \ , \ x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{i-1}(x) \wedge \Phi^i(x') \wedge \Phi^{i+1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^m(x) = 0.$$

De l'égalité $x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) \wedge \Phi^m(x') = 0$ valable pour tout $x' \in V$, on déduit alors que $x \wedge \Phi(x) \wedge \cdots \wedge \Phi^{m-1}(x) = 0$, qui est la contradiction cherchée. □

Ce théorème fondamental signifie d'abord que *tout système aux q-différences est équivalent au système provenant d'une équation.* Noter que cela n'est pas tautologique (il faut faire intervenir le dual du module associé, voir [Sau04]). Il nous indique ensuite le chemin (détourné) dans l'étude théorique d'une équation $L.f = 0$: la vectorialiser en un système $\sigma_q X = AX$; puis représenter le module $(\mathbf{C}((z))^n, \Phi_A)$ sous la forme $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$.

Exemple 4.9. Soit $L := \sigma_q - u \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$. La matrice associée est (u), et le module aux q-différences est $(\mathbf{C}((z)), \Phi_u)$, où $\Phi_u(x) = u^{-1}\sigma_q x$, qui admet $e := 1$ comme vecteur cyclique. Comme $\Phi_u(e) = u^{-1}e$, le morphisme surjectif $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q} \to \mathbf{C}((z))$ défini par $1 \mapsto e$ a pour noyau $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q} L^\vee$, où $L^\vee := \sigma_q - u^{-1}$.

Exercice 4.10. Faire le même chemin à partir de $L \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ quelconque. (Réponse dans [Sau04].)

4.2.3 Suites exactes de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules cycliques

Le module aux différences (V, Φ) est *cyclique*, autrement dit, il existe $x \in V$ tel que les $\Phi^i(x), i \in \mathbf{Z}$ engendrent le K-espace vectoriel V, si, et seulement si, le $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module V est monogène, autrement dit (puisque $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est principal à gauche) de la forme $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ ou bien $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ avec P standard unitaire. Le premier cas ne peut se produire puisque $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est de dimension infinie sur K. En revanche, pour tout P standard unitaire, le K-espace vectoriel $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P$ est bien de dimension finie $\deg P$.
Les suites exactes de tels modules sont nécessairement (à isomorphisme près) de la forme :

$$0 \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}QR \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R \to 0,$$

l'injection étant induite par l'application $X \mapsto XR$. En effet, pour tout morphisme surjectif $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P \to V$, le $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module V est monogène et de dimension finie sur K, et la surjection s'identifie à $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}P \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R$ avec $\mathcal{D}_{K,\sigma}P \subset \mathcal{D}_{K,\sigma}R$, *i.e.* $P = QR$ pour un certain Q ; et l'on peut supposer P, Q, R standards unitaires. Le noyau de cette surjection est $\mathcal{D}_{K,\sigma}R/\mathcal{D}_{K,\sigma}QR$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$, l'isomorphisme étant induit par $X \mapsto XR$.

Remarque 4.11. Ne pas croire pour autant que l'unique extension de $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R$ par $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q$ est l'extension $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}QR$ décrite ci-dessus : pour tout inversible u de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$, on a $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R = \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}uR$, d'où une extension $\mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}QuR$ qui est en général distincte de la première.

De la description des suites exactes, on déduit une description des drapeaux : à $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_k = M$ on peut associer une factorisation $P = R_1 \cdots R_k$ telle que, notant $Q_i := R_1 \cdots R_{i-1}$ et $P_i := M_i/M_{i-1}$, la suite exacte $0 \to M_{i-1} \to M_i \to P_i \to 0$ s'identifie à la suite exacte $0 \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q_i \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}Q_iR_i \to \mathcal{D}_{K,\sigma}/\mathcal{D}_{K,\sigma}R_i \to 0$.

4.3 Le polygone de Newton d'un module aux q-différences

On se place dans le cas des modules aux q-différences, *i.e.* K est $\mathbf{C}((z))$, $\mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}(z)$, et σ est σ_q. Nous allons construire les outils de base pour la classification. Les résultats sont démontrés pour $K = \mathbf{C}((z))$, ils s'appliquent *a fortiori* aux deux autres corps.

4.3.1 Le polygone de Newton est un invariant formel

Théorème 4.12. *Le module aux q-différences M étant donné, tous les opérateurs $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ tels que $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$ ont la même fonction de Newton.*

Démonstration. (i) Supposons d'abord M de rang 1. À inversible près (ce qui ne change pas la fonction de Newton), on peut supposer que $P = \sigma_q - f$. Mais nous savons déjà que, si $Q = \sigma_q - g$, l'isomorphie de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}Q \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$ entraine $g = f\sigma_q u/u$ avec u inversible, donc $r_P = r_Q$.
(ii) Supposons ensuite M à pentes entières et soit $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ tel que $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$. On peut factoriser $P = P_1 \cdots P_n$ en produits de facteurs de degré 1 (théorème 3.28) et l'on a $r_P = \sum r_{P_i}$ (théorème 3.20). Par ailleurs, des suites exactes décrites au 4.2.3, on déduit que M admet une tour de sous-modules :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

telle que $S_i := M_i/M_{i-1} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P_i$. Mais les modules S_i sont de rang 1, donc simples, donc, d'après le théorème de Jordan-Hölder, déterminés à l'ordre près. Il en est donc de même des $r_{S_i} := r_{P_i}$ d'après le premier cas ci-dessus.
(iii) Prenons enfin M arbitraire. Quitte à ramifier, *i.e.* à remplacer $\mathbf{C}((z))$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ par des extensions convenables $K' := \mathbf{C}((z))[z^{1/\ell}]$ et $\mathcal{D}' := K' \otimes \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$, on se ramène au cas précédent. □

Définition 4.13. La *fonction de Newton r_M du module aux q-différences M* est la fonction de Newton r_P de n'importe quel $P \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ tel que $M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}P$. Par abus de langage, nous appellerons *polygone de Newton N(M) de M* est tout polygone de Newton associé à r_M (ils ne sont définis qu'à translation près). Nous noterons $S(M)$ l'ensemble des pentes de M (support de r_M). Enfin, nous appellerons fonction, resp. polygone de Newton de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$ la fonction r_M, resp. "le" polygone $N(M)$ associés à $M := (\mathbf{C}((z))^n, \Phi_A)$.

Par sa construction même (à base de suites exactes), la fonction de Newton admet de nombreuses propriétés "abéliennes" dont la plus importante est la suivante :

Théorème 4.14 (Additivité de la fonction de Newton). *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de modules aux q-différences. Alors :*

$$r_M = r_{M'} + r_{M''}.$$

Démonstration. Cela découle, au choix, des propriétés des tours de Jordan-Hölder relativement aux suites exactes ; ou bien du théorème 3.20 joint à la description des suites exactes au 4.2.3. □

Remarque 4.15. Les deux théorèmes d'additivité 3.20 et 4.14 sont nettement différents des théorèmes correspondants pour les équations différentielles, voir [And09].

4.3.2 Propriétés abéliennes et conséquences

Il y a d'abord une série de conséquences immédiates du théorème 4.14.

Définition 4.16. On dit que M est *pur isocline de pente μ* si sa seule pente est μ, *i.e.* si $S(M) = \{\mu\}$.

Corollaire 4.17. *(i) Si M est pur isocline de pente μ, il en est de même de ses sous-modules et de ses quotients.*
(ii) Une extension (en particulier une somme directe) de modules purs isoclines de pente μ est

un module pur isocline de pente μ.
(iii) La somme de deux sous-modules purs isoclines de pente μ d'un même module est un module pur isocline de pente μ.
(iv) Tout module M admet un plus grand sous-module pur isocline de pente μ.
(v) Soit $f : M' \to M''$ un morphisme. Alors l'image par f d'un sous-module pur isocline de pente μ de M' est un sous-module pur isocline de pente μ de M''.

Corollaire 4.18. *(i) Si M', M'' sont des sous-modules de M tels que $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$, alors $M' \cap M'' = \{0\}$.*
(ii) Plus généralement, si les M_i sont des sous-modules de M tels que les $S(M_i)$ sont deux à deux disjoints, alors les M_i sont en somme directe.
(iii) Soit $f : M' \to M''$ un morphisme. Si $S(M') \cap S(M'') = \emptyset$, alors $f = 0$.

Corollaire 4.19. *Si $A \in GL_n(\mathbf{C})$, le module $M := (K^n, \Phi_{z^\mu A})$ est pur isocline de pente μ.*

Démonstration. En effet, si $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est une triangularisation de A, M est isomorphe à $(K^n, \Phi_{z^\mu T})$. Ce dernier admet un dévissage par les (K, Φ_{cz^μ}), les $c \in \mathbf{C}^*$ étant les coefficients diagonaux de T (donc les valeurs propres de A). Le module (K, Φ_{cz^μ}) est isomorphe à $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}(\sigma_q - c^{-1}z^{-\mu})$. D'après l'exemple 4.9, son unique pente est donc μ. On conclut en appliquant le théorème 4.14. □

Corollaire 4.20. *Soient $A_1, \dots, A_k$ des matrices inversibles complexes de rangs $r_1, \dots, r_k$ et soient $\mu_1, \dots, \mu_k$ des entiers. Soit $M = (K^n, \Phi_A)$, où A est la matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} z^{\mu_1}A_1 & * & \dots & * \\ 0 & z^{\mu_2}A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\mu_k}A_k \end{pmatrix}$. Le polygone de Newton de M est alors formé des pentes $\mu_1, \dots, \mu_k$ avec les multiplicités $r_1, \dots, r_k$.*

Remarque 4.21 (Puissances extérieures)**.** On a vu au paragraphe 4.1.3 la définition du module aux différences $M^{\otimes r}$ et de son quotient $\Lambda^r M$. Il est démontré dans [Sau04] que, si M est un module aux q-différences pur isocline de pente μ, alors $M^{\otimes r}$ est pur isocline de pente $r\mu$. Il en est donc de même de $\Lambda^r M$. Supposons que $M = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$, où P_i est pur isocline de pente μ_i et où $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. Alors :

$$\Lambda^r M = \sum_{i_1 + \cdots + i_k = r} \Lambda^{i_1} P_1 \otimes \cdots \otimes \Lambda^{i_k} P_k.$$

D'après le calcul des pentes des produits tensoriels dans [Sau04], chacun de ces facteurs directs est pur isocline, le facteur direct $\Lambda^r P_1$ ayant sa pente $r\mu_1$ strictement majorée par toutes les autres et le facteur direct $\Lambda^r P_k$ ayant sa pente $r\mu_k$ strictement minorée par toutes les autres.

5 Modules aux q-différence irréguliers

Dans cette section nous démontrons l'existence de sous-modules purs isoclines dans différents cas (formel, analytique avec $|q| \neq 1$ et analytique avec $|q| = 1$). Nous ne rentrerons pas dans les détails de la classifications des modules irréguliers (c'est-à-dire des modules tels que $\mathrm{card} S(M) \geq 2$), mais nous énoncerons quelques résultats dans cette direction. Le lecteur intéressé pourra approfondir le sujet dans les papiers originaux (*cf.* par exemple [Sau04], [RSZ04], [vdPR07], [DV09], [RSZ09]).

5.1 Cas formel

Nous avons vu que tout module M admet un plus grand sous-module pur isocline de pente μ (*cf.* Corollaire 4.17). De l'additivité de la fonction de Newton, il découle que celui-ci est de rang $\leq r_M(\mu)$. Le théorème suivant dit quand le rang maximum est atteint.

Théorème 5.1. *Pour tout module aux q-différences M sur $\mathbf{C}((z))$ et pour toute pente $\mu \in S(M)$, le plus grand sous-module pur isocline de pente μ de M est de rang $r_M(\mu)$.*

Démonstration. Les détails de la démonstration se trouvent dans [Sau04], théorème 3.1.1 p. 202, avec malheureusement une (petite) erreur qui sera rectifiée ci-dessous. Le principe est le suivant. Si toutes les pentes de M sont entières, cela découle du théorème de factorisation 3.27 et de la description des suites exactes au 4.2.3. Dans le cas où les pentes de M ne sont pas toutes entières, on ramifie, *i.e.* on remplace le corps K par une extension cyclique de degré ℓ convenable $K' := K[z']$, où $z' = z^{1/\ell}$, munie de l'automorphisme $z' \mapsto q'z'$, où q' est une racine ℓ-ème de q. Le module $M' := K' \otimes_K M$ admet un sous-module N' pur isocline de pente μ de rang maximum. Il s'agit de le "redescendre", autrement dit, de trouver $N \subset M$ tel que $N' := K' \otimes_K N$. C'est un problème de "descente galoisienne" : notant $\gamma_j : z' \mapsto jz'$ les éléments du groupe de Galois de K' sur K (j parcourt donc les racines k^{es} de l'unité dans $\mathbf{C}$), et $\Gamma_j := \gamma_j \otimes \mathrm{Id}_M$, l'existence d'un tel N est équivalente à la stabilité de N' sous les Γ_j. Comme les γ_j commutent avec $\sigma_{q'}$, les Γ_j commutent avec l'automorphisme semi-linéaire de M'. Mais ils ne sont pas K'-linéaires, et ce ne sont donc pas des automorphismes du module aux q'-différences M', contrairement à ce qui est affirmé dans [Sau04]. En revanche, ils sont évidemment K-linéaires, et ce sont donc des automorphismes du module aux q-différences M'. Or, dans ce dernier, N' est encore un sous-module pur isocline maximal, mais bien entendu pour la pente $\ell\mu$. D'après les deux premiers corollaires du 4.3.2, tout automorphisme du module aux q-différences M' laisse N' stable, en particulier les Γ_j. La conclusion s'ensuit. $\square$

L'absence d'hypothèses sur la pente μ dans le théorème précèdent, combinée avec le Théorème 4.14 et les résultats de 4.3.2, implique immédiatement le corollaire suivant (*cf.* [Sau04]. Pour une autre preuve de ce résultat voir aussi [SV03, Thm. 3.14]) :

Corollaire 5.2. *Soit M un module aux q-différences sur $\mathbf{C}((z))$, de pentes $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Alors M admet une unique décomposition en somme directe de modules purs isoclines, de pentes distinctes. Les pentes de ces derniers sont les μ_i et leurs rangs sont les $r_M(\mu_i)$.*

Remarque 5.3. Pour tout $\mu \in \mathbf{Q}$, notons $M^{(\mu)}$ la composante de pente μ de M : donc 0 si $\mu \notin S(M)$. On a alors des foncteurs exacts de la catégorie de modules aux q-différences sur $\mathbf{C}((z))$ dans elle même :

$$F^{(\mu)} : M \rightsquigarrow M^{(\mu)}.$$

5.2 Cas analytique, avec $|q| \neq 1$

On suppose comme d'habitude que $|q| > 1$.

Théorème 5.4. *Pour tout module aux q-différences M sur $\mathbf{C}(\{z\})$ et pour sa* plus grande pente $\mu := \max S(M)$, *le plus grand sous-module pur isocline de pente μ de M est de rang $r_M(\mu)$.*

Remarque 5.5. La preuve du théorème ci-dessus est analogue a celle du Théorème 5.1, en particulier en ce qui concerne la descente galoisienne, sauf que l'on utilise le théorème 3.31 au lieu du théorème 3.27. Nous renvoyons le lecteur à [Sau04] pour les détails.

Une application itérée du Théorème 5.4, combinée avec le Théorème 4.14 et les résultats de 4.3.2, permet de démontrer le résultat suivant (*cf.* [Sau04]) :

Corollaire 5.6. *Soit M un module aux q-différences sur $\mathbf{C}(\{z\})$, de pentes $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. Il existe alors une unique tour de sous-modules : $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ telle que, pour $1 \leq i \leq k$, le module quotient $P_i := M_i/M_{i-1}$ soit pur isocline, et que les pentes des P_i croissent strictement. Les pentes et les rangs des P_i sont alors les μ_i et les $r_M(\mu_i)$.*

5.7. Le module gradué associé. Soit $\mu \in \mathbf{Q}$ quelconque (pas nécessairement une pente de M). On note $M^{\leq \mu}$, resp. $M^{<\mu}$ le plus grand sous-module de M dont toutes les pentes sont $\leq \mu$ (resp. $< \mu$). On a alors des foncteurs de "filtration canonique par les pentes" $F^{\leq \mu} : M \rightsquigarrow M^{\leq \mu}$ et $F^{<\mu} : M \rightsquigarrow M^{<\mu}$. Posant $F^{(\mu)}M := F^{\leq \mu}M/F^{<\mu}M$, on en déduit le foncteur "gradué associé" :

$$M \rightsquigarrow \mathrm{gr}M := \bigoplus F^{(\mu)}M.$$

En fait, non seulement les morphismes de modules aux q-différences respectent la filtration, mais ils sont stricts. Autrement dit, si f est un morphisme de M dans N, non seulement il envoie $M^{\leq \mu}$ dans $N^{\leq \mu}$, mais l'image de $M^{\leq \mu}$ est $f(M) \cap N^{\leq \mu}$. En conséquence, le foncteur gr est exact et fidèle.

5.8. Classification analytique isoformelle. Connaitre la classe formelle d'un module aux q-différences analytique M revient à connaitre son gradué. On peut donc poser le problème de classification analytique *isoformelle* suivant.

On fixe une classe formelle sous la forme d'un module de la forme $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$, où chaque P_i est pur isocline de pente μ_i et de rang $r_i \geq 1$; on suppose que $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. Tous les modules analytiques M formellement isomorphes à M_0 auront donc même polygone de Newton $N(M) = N(M_0)$ et même gradué $\mathrm{gr}M \simeq M_0$.

Les "paires marquées" sont les couples (M, u) formés d'un module analytique M et d'un isomorphisme u de $\mathrm{gr}M$ sur M_0. Les paires marquées (M, u) et (M', u') sont dites équivalentes s'il existe un morphisme f de M dans M' tel que $u = u' \circ \mathrm{gr}f$; un tel f est automatiquement un isomorphisme puisque $\mathrm{gr}f$ l'est. Le problème est alors de décrire l'ensemble $\mathcal{F}(M_0)$ des classes d'isomorphie de paires marquées. On peut démontrer que $\mathcal{F}(M_0)$ est une variété affine complexe de dimension $\sum_{1 \leq i<j \leq k} r_{M_0}(\mu_i) r_{M_0}(\mu_j)(\mu_j - \mu_i)$ (voir [RSZ09]).

5.3 Cas analytique, avec $|q| = 1$

Soit q un nombre complexe de norme 1, non racine de l'unité. Nous allons supposer que la série q-exponentielle $e_q(x)$ converge (*cf.* Hypothèse 3.35).

Considérons un module aux q-différences $M = (V, \Phi)$ sur le corps $\mathbf{C}(\{z\})$. Nous noterons $\widehat{M} = (\widehat{V}, \Phi) := (V \otimes_{\mathbf{C}(\{z\})} \mathbf{C}((x)), \Phi \otimes \sigma_q)$ le module aux q-différences sur $\mathbf{C}((x))$ obtenu à partir de M par extension de scalaire de $\mathbf{C}(\{z\})$ à $\mathbf{C}((x))$. Comme nous l'avons remarqué dans les sections précédentes, le polygone de Newton est un invariant formel des modules aux q-différences. Ceci veut dire que $S(M) = S(\widehat{M})$ et que $r_M = r_{\widehat{M}}$. Nous avons, donc, l'analogue du Théorème 5.1 :

Théorème 5.9. *Pour tout module aux q-différences M sur $\mathbf{C}(\{z\})$ et pour toute pente $\mu \in S(M)$, le plus grand sous-module pur isocline de pente μ de M est de rang $r_M(\mu)$.*

Le théorème ci-dessus est banal si $k = 1$. Pour le démontrer, nous allons exclure ce cas et procéder par étapes :

Lemme 5.10. *Le théorème 5.9 est vrai si $\mu = \mu_k$ est la pente maximal de M.*

Démonstration. On peut déduire du Théorème 3.27 que si $r_M(\mu_k) = 1$, M a un sous-module M_k pur isocline de pente μ_k et rang 1.

Nous allons procéder par récurrence sur $r_k := r_M(\mu_k)$. Supposons, donc $r_k > 1$ et considérons le module aux q-différences $\wedge^{r_k} M = (\wedge^{r_k} V, \Phi)$. Pour simplifier les notations on notera Φ tout opérateur aux q-différences induit par la structure aux q-différences de M. La pente maximale de $\wedge^{r_k} M$ est $r_k\mu_k$ et $r_{\wedge^{r_k} M}(r_k\mu_k) = 1$ (*cf.* Remarque 4.21). L'hypothèse de récurrence nous assure qu'il existe un sous-module aux q-différences $M_{r_k\mu_k} = (V_{r_k\mu_k}, \Phi)$ de $\wedge^{r_k} M$ de dimension 1 et de pente $r_k\mu_k$.

Puisque le polygone de Newton est un invariant formel, le module $\widehat{M}_{r_k\mu_k} := M_{r_k\mu_k} \otimes_{\mathbf{C}(\{z\})} \mathbf{C}((z))$ est le sous-module maximal de $\widehat{M}$ de pente $r_k\mu_k$. Par ailleurs, le théorème 5.1 garantit qu'il est décomposable, *i.e.* il existe $m_1, \dots, m_r \in \widehat{M}$, qui engendrent les sous-modules de $\widehat{M}$ de pente μ_k et rang r_k et tels que $m_1 \wedge \dots \wedge m_{r_k}$ engendre $\widehat{M}_{r_k\mu_k}$. En d'autres termes, cela signifie que, étant donné $w \in V_{r_k\mu_k}$, le morphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\alpha}_w : & \widehat{V} & \longrightarrow & \wedge^{r_k+1}\widehat{V} \\ & m & \longmapsto & w \wedge m \end{array} .$$

a un noyau de dimension r_k. Comme il est obtenu par extension des scalaires de $\mathbf{C}(\{z\})$ à $\mathbf{C}((z))$ à partir du morphisme de $\mathbf{C}(\{z\})$-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rccc} \alpha_w : & V & \longrightarrow & \wedge^{r_k+1} V \\ & m & \longmapsto & w \wedge m \end{array} ,$$

on peut conclure que le noyau de α_w est aussi de dimension r_k. Donc, il existe $m_1, \dots, m_{r_k} \in M$ tels que $w \wedge m_1 \wedge \dots \wedge m_{r_k} = 0 \in \wedge^{r_k+1} M$. En tensorisant par $\mathbf{C}((z))$, on prouve que $m_1, \dots, m_{r_k}$ engendrent le sous-module de $\widehat{M}$ de pente μ_k et de dimension r_k. Toujours parce que le polygone de Newton est un invariant formel, $m_1, \dots, m_{r_k}$ engendrent le sous-module maximal M_k de M de pente μ_k et de dimension r_k. □

Lemme 5.11. *Soient M, μ_k, r_k, M_k comme dans la preuve du lemme précédent. Si $r_k = 1$, alors il existe un sous-module aux q-différences N de M tel que $M = N \oplus M_k$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'hypothèse $r_k = 1$ force μ_k à être entier. Il existe donc $\alpha \in \mathbf{C}^*$, uniquement determiné modulo $q^{\mathbf{Z}}$, et une base e de M_k tels que

$$\Phi e = e\alpha z^{\mu_k} .$$

Soit $\mathcal{B} = (e, e_1, \dots, e_{\nu-1})$ une base de M sur $\mathbf{C}(\{z\})$; alors :

$$\Phi\mathcal{B} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \alpha z^{\mu_\kappa} & D(z) \\ 0 & B(z) \end{pmatrix} .$$

Les pentes du polygone de Newton de M/M_k sont plus petites que μ_k, donc on peut choisir $e_1, \dots, e_{\nu-1}$, de façon que $z^{-\mu_k} B(z)$ ait un pole en 0 (par exemple en choisissant une base cyclique).

Démontrer que le sous-module M_k admet un supplementaire équivaut à démontrer l'existence de $U(z) = (u_1(z), \dots, u_{\nu-1}(z)) \in \mathbf{C}(\{z\})^{\nu-1}$, tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & U(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z^{\mu_\kappa} & D(z) \\ 0 & B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z^{\mu_\kappa} & 0 \\ 0 & B(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & U(qz) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et donc que

$$\alpha U(qz) - z^{-\mu_\kappa} U(z) B(z) = z^{-\mu_\kappa} D(z) .$$

Puisque $z^{-\mu_k} B(z)$ a un pôle en 0, cet équation peut-être résolue par récurrence sur les coefficients de $U(z)$, sans l'apparition de petits diviseurs dans les dénominateurs. □

Exercice 5.12. Le lemme précèdent est vrai sans hypothèse sur $r_k \geq 1$.
(Suggestion : considérer une base $m_1, \ldots, m_{r_k}$ de M_k et la compléter par $n_1, \ldots, n_{\nu-r_k}$, où $\nu = \dim_{\mathbf{C}(\{z\})} M$, en une base de M. Prendre soin de choisir les n_j tels que $n_j \wedge m_1 \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge m_k$ sont contenus dans un sous-module aux q-différences $\widehat{N}$ de $\widehat{M}$ tel que $\widehat{M} = \widehat{N} \oplus \widehat{M}_k$, pour tout $i = 1, \ldots, r_k$. On déduit le résultat du fait que $m_1 \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge m_k$, pour $i = 1, \ldots, r_k$, est une base du module aux q-différences $\wedge^{r_k - 1} M$ et du lemme précédent.)

Démonstration du Théorème 5.9. On a prouvé le théorème dans le cas où $\mu = \mu_k$ est la pente maximale. Si $\mu = \mu_{k-1}$ on répète le raisonnement pour le supplémentaire N de M_k construit plus haut et ainsi de suite. □

On remarquera que l'on a en fait démontré l'énoncé suivant :

Corollaire 5.13. *Soit q un nombre complexe de norme 1, non racine de l'unité, tel que $e_q(x)$ converge. Alors tout module aux q-différences M sur $\mathbf{C}(\{z\})$, de pentes $\mu_1, \ldots, \mu_k$ admet une unique décomposition en somme directe de modules purs isoclines. Les pentes de ces derniers sont les μ_i et leurs rangs sont les $r_M(\mu_i)$.*

6 Modules fuchsiens et modules purs

Nous n'aborderons pas les aspects globaux de la fuchsianité : voir pour cela [Sau00], [Bir13] ou [vdPS97]. L'étude étant ici locale, nous supposerons que $K := \mathbf{C}((z))$ ("cas formel") ou $K := \mathbf{C}(\{z\})$ ("cas analytique") et, bien entendu, $\sigma := \sigma_q$. Rappelons que les modules purs isoclines ont été introduits par la définition 4.16.

Définition 6.1. (i) Un module pur isocline de pente 0 est dit *fuchsien*.
(ii) Un module *pur* est une somme directe de modules purs isoclines.

La propriété d'être pur isocline, resp. d'être fuchsien, resp. d'être pur, est évidemment inchangée par ramification *i.e.* passage à l'extension $K' := K[z^{1/\ell}]$. Notre but, dans ce chapitre, est d'obtenir une classification raisonnablement complète (formelle et analytique) des modules purs.

Dans tous les cas nous allons supposer que q n'est pas une racine de l'unité. Nous dirons qu'un module aux q-différences M sur le corps K vérifie les hypothèses ($\mathfrak{D}$) si nous nous trouvons dans l'un des cas suivants :

($\mathfrak{D}_1$) Si $K = \mathbf{C}((z))$, q est quelconque (non nul, non racine de l'unité) et M est arbitraire.

($\mathfrak{D}_2$) Si $K = \mathbf{C}(\{z\})$ et $|q| \neq 1$, M est arbitraire.

($\mathfrak{D}_3$) Si $K = \mathbf{C}(\{z\})$ et $|q| = 1$, nous supposerons que la série $e_q(x)$ converge et que le modules M a la propriété que pour tout sous-module pur isocline $N \subset M$ la série

$$\sum_{N \geq 0} \frac{z^n}{\prod_{\lambda_i/\lambda_j \notin q^{\mathbf{Z}}} (\lambda_i/\lambda_j; q)_n},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont ses exposants de N, converge.

Si $K = \mathbf{C}(z)$, nous dirons que M vérifie ($\mathfrak{D}$), si $M \otimes_K \mathbf{C}(\{z\})$ vérifie ($\mathfrak{D}$). De plus, si $|q| \neq 1$, on choisira la convention $|q| > 1$. On appelle $\mathcal{C}_q$ un système de représentants du quotient $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Dans le cas $|q| > 1$, on choisit (voir le §2.2)

$$C_q := \{z \in \mathbf{C} \,|\, 1 \leq |z| < |q|\}.$$

6.1 Caractérisation des modules fuchsiens

6.1.1 Trois caractérisations équivalentes

Les critères suivants sont valables indifféremment dans les cas formel et analytique.

Lemme 6.2. *(i) Le module $M := (K, \Phi_u)$, où $u \in K^*$, est pur isocline de pente $v(u)$.*
(ii) On suppose $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte. Alors, pour que M soit pur isocline de pente μ, il faut, et il suffit, que M' et M'' le soient.

Démonstration. (i) découle de l'exemple 4.9 et du calcul (facile) du polygone de Newton de $\sigma_q - u^{-1}$.
(ii) découle immédiatement du théorème 4.14. □

Remarque 6.3. On remarquera que les module aux q-différences vérifiant $(\mathfrak{D}_3)$ ne sont pas stables par extension et donc ne vérifient pas la deuxième assertion du lemme ci-dessus.

Proposition 6.4. *Pour que le module M soit fuchsien, il faut, et il suffit, que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*
(i) Il existe $P := a_0 + \cdots + a_n{\sigma_q}^n \in \mathcal{D}$ tel que $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}P$, $v(a_0), \ldots, v(a_n) \geq 0$ et $v(a_0) = v(a_n) = 0$.
(i') Pour tout $Q \in \mathcal{D}$ tel que $M \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}Q$, on a $Q = a{\sigma_q}^{\ell}P$ pour un $a \in K^*$, un $\ell \in \mathbf{Z}$, et un P de la forme indiquée en (i).
Si de plus le module M vérifie les hypothèses $(\mathfrak{D})$ alors (i) et (i') sont équivalentes aux conditions suivantes :
(ii) Il existe $A \in GL_n(K)$ tel que et $M \simeq (K^n, \Phi_A)$ et $A(0) \in GL_n(\mathbf{C})$ i.e. *A, A^{-1} définis en 0.*
(iii) Il existe $A \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $M \simeq (K^n, \Phi_A)$.

Notons que, si $M \simeq (K^n, \Phi_A)$ est fuchsien, on n'a pas d'information claire sur la forme de A. (Il en est d'ailleurs de même dans la théorie des équations et systèmes différentiels.)

Démonstration. Le fait que la fuchsianité équivaut aux conditions (i) et (i') est conséquence directe de la définition du polygone de Newton et du théorème 4.12. Le fait que (i) implique (ii) se voit facilement en prenant pour A la matrice "compagnon" de P obtenue par vectorialisation au 4.1.1. Le fait que (ii) implique (iii) fait l'objet d'une étude à part, voir le 6.1.2. Le fait que (iii) implique la fuchsianitude découle par exemple du corollaire 4.19. □

Remarque 6.5. Le critère (ii) n'est autre que la définition utilisée par Birkhoff dans [Bir13], alors que l'utilisation du polygone de Newton est dûe à Adams [Ada29]. Dans le cas analytique, il existe de plus un critère portant sur la croissance et la décroissance des solutions méromorphes du système $\sigma_q X = AX$ au voisinage de 0 dans les "secteurs" $\mathbf{C}^* \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}q^{-\mathbf{N}}$ où elles sont définies.

6.1.2 Le "lemme fondamental"

Définition 6.6. On dit que la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$ est *strictement fuchsienne* si :

$$A(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \ \textit{i.e.} \ \ A, A^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}[[z]]).$$

On dit que A est *non résonnante* si de plus :

$$\forall c, d \in \mathrm{Sp}\big(A(0)\big) \ , \ d/c \notin q^{\mathbf{N}^*}.$$

Lemme 6.7. *Toute matrice strictement fuchsienne est équivalente à une matrice strictement fuchsienne non résonnante (sans hypothèse sur le module de q).*

Démonstration. (Pour les détails, voir [Sau00] 1.1.1, p. 1028.) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ strictement fuchsienne. Nous allons montrer plus précisément que A peut être rendue non résonnante à l'aide une transformation de jauge rationnelle, ce qui démontrera le lemme aussi bien dans le cas analytique que dans le cas formel. La transformation de A se réalise en alternant des transformations de jauges "constantes", *i.e.* de matrices $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et des matrices de "shearing" (cisaillement), de la forme $S_r := \begin{pmatrix} zI_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. L'algorithme est le suivant. S'il y a une résonnance, autrement dit, si $\mathrm{Sp}\big(A(0)\big)$ contient un sous-ensemble de la forme $\{c, \ldots, cq^m\}$ avec $m \geq 1$, on choisit un tel m le plus grand possible et on va le diminuer. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$Q^{-1}A(0)Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où B est triangulaire supérieure de diagonale $cq^m I_r$ (pour un $r \geq 1$) et où $cq^m \notin \mathrm{Sp}B$. Alors la matrice $A' := \big(\sigma_q(QS_r)\big)^{-1} A(QS_r) \sim A$ est telle que :

$$A'(0) = \begin{pmatrix} q^{-1}B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où B est triangulaire supérieure de diagonale $cq^{m-1}I_r$, donc $\mathrm{Sp}\big(A'(0)\big) = \mathrm{Sp}\big(A(0)\big) \setminus \{cq^m\}$. En itérant ces améliorations, on élimine toutes les résonnances. $\square$

Par la même méthode, on obtient :

Corollaire 6.8. *Dans le "cas analytique",* i.e. *si* $K = \mathbf{C}(\{z\})$*, le même algorithme permet de ramener le spectre de* $A(0)$ *dans le domaine fondamental* C_q*.*

Et maintenant, un résultat utile entre tous !

Théorème 6.9 (Le "lemme fondamental")**.** *Soit* $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ *strictement fuchsienne non résonnante. Il existe alors une unique transformation de jauge "tangente à l'identité" :*

$$F = I_n + zF_1 + \cdots \in GL_n(\mathbf{C}[[z]])$$

telle que $F[A(0)] = A$*. Si de plus* $A \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ *et* $(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_A)$ *vérifie* $(\mathfrak{D})$*, alors* $F \in GL_n(\mathbf{C}\{z\})$*.*

Démonstration. (Pour les détails, voir [Sau00] 1.1.3, p. 1033.) On écrit $F = \sum\limits_{k \geq 0} z^k F_k$ (donc $F_0 = I_n$) et $A = \sum\limits_{k \geq 0} z^k A_k$ (donc $A_0 = A(0)$). La relation $F[A(0)] = A$, c'est-à-dire $(\sigma_q F)A_0 = AF$, équivaut à :

$$\forall k \geq 0 \;,\; q^k F_k A_0 = \sum_{i+j=k} A_i F_j.$$

Pour $k = 0$, cette égalité est garantie par les hypothèses. Pour $k \geq 1$, elle prend la forme :

$$\Phi_{A_0, q^k A_0}(F_k) = A_1 F_{k-1} + \cdots + A_k F_0,$$

où l'on a noté $\Phi_{B,C}(X) := XC - BX$: si $B, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, c'est un endomorphisme de $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$, et si les spectres de B et C sont disjoints, c'en est même un automorphisme dont le spectre est l'ensemble $\{\gamma - \beta \,|\, \gamma$ dans le spectre de C et β dans le spectre de $B\}$ (exercice classique d'algèbre linéaire). L'hypothèse de non résonnance dit exactement que, si $k \geq 1$, les spectres de A_0 et $q^k A_0$ sont disjoints. Les F_k sont donc entièrement déterminés par la relation de récurrence :

$$F_0 := I_n \text{ et } \forall k \geq 1 \;,\; F_k := \left(\Phi_{A_0, q^k A_0}\right)^{-1} (A_1 F_{k-1} + \cdots + A_k F_0).$$

Supposons maintenant $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$. On choisit une norme matricielle sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. L'hypothèse d'analyticité de A nous dit qu'il existe $C, D > 0$ tels que :

$$\forall i \geq 0 \ , \ \|A_i\| \leq CD^i$$

On choisit sur $\mathrm{End}\big(\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})\big)$ une norme subordonnée à la norme matricielle choisie sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. Si $|q| > 1$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \left(\Phi_{A_0,q^kA_0}\right)^{-1} = 0 \Longrightarrow \exists C' > 0 \ : \ \forall k \geq 1 \ , \ \left\|\left(\Phi_{A_0,q^kA_0}\right)^{-1}\right\| \leq C'.$$

De la relation de récurrence trouvée en (i), on déduit alors :

$$\|F_k\| \leq C' \sum_{i=0}^{k-1} \|A_{k-i}\| \, \|F_i\| \leq CC' \sum_{i=0}^{k-1} D^{k-i} \, \|F_i\| \Longrightarrow D^{-k} \, \|F_k\| \leq CC' \sum_{i=0}^{k-1} D^{-i} \, \|F_i\| \, .$$

Posant $a_0 := 1$ et $a_k := CC' \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i$, on voit par récurrence : d'une part que $D^{-k} \, \|F_k\| \leq a_k$; d'autre part que $a_k = (1 + CC')^k$, d'où enfin :

$$\|F_k\| \leq D^k (1 + CC')^k.$$

Si par contre $|q| = 1$, nous avons :

$$\left\|\left(\Phi_{A_0,q^kA_0}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|\left(\Phi_{A_0,q^kA_0}\right)\right\|^{n-1}}{\prod_{\alpha,\beta\in Sp(A_0)} |\alpha - q^k\beta|} \, .$$

L'hypothèse diophantienne $(\mathfrak{D}_3)$ permet de contrôler les petits diviseurs qui peuvent apparaître parmi les termes $\alpha - q^k\beta$. Il n'est alors pas difficile de démontrer la convergence de F, comme nous l'avons fait dans le cas $|q| > 1$. □

Exercice 6.10. En utilisant la relation $\sigma_q F = AFA_0^{-1}$, prédire le rayon de convergence de F. De même, si A est rationnelle, en déduire que F admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier.

6.2 Classifications formelle et analytique des modules fuchsiens

6.2.1 Classification formelle = classification analytique

Proposition 6.11. *(i) Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{C})$ et soit $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ une transformation de jauge telle que $F[A] = B$. Alors F est un polynôme de Laurent.*
(ii) Si l'on suppose de plus que $SpA, SpB \subset C_q$, alors cette transformation de jauge est une similitude : $F \in GL_n(\mathbf{C})$.

Démonstration. (i) Écrivant $F = \sum z^k F_k$, on doit avoir : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $q^k F_k A = BF_k$. Dès que k est assez grand (positif ou négatif), les spectres $\mathrm{Sp}(q^kA) = q^k\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(B)$ sont disjoints ; par le même argument que dans la preuve du théorème 6.9 (injectivité de Φ_{B,q^kA}), on a donc $F_k = 0$.
(ii) On a ici $\mathrm{Sp}(q^kA) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$ pour tout $k \neq 0$, donc $F = F_0$. □

Corollaire 6.12. *Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ des matrices de modules fuchsiens analytiques vérifiant les hypothèses $(\mathfrak{D})$ et soit $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ une transformation de jauge telle que $F[A] = B$. Alors F est analytique : $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$. Autrement dit, pour les modules analytiques fuchsiens qui vérifient $(\mathfrak{D})$, la classification formelle et la classification analytique sont identiques.*

6.2.2 Quatre catégories équivalentes

Soit $|q| > 1$. Dans chacune des catégories abéliennes :

$$DiffMod(\mathbf{C}(z), \sigma_q) \subset DiffMod(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q) \subset DiffMod(\mathbf{C}((z)), \sigma_q),$$

la sous-catégorie pleine dont les objets sont fuchsiens est elle-même abélienne d'après le lemme 6.2. Nous noterons temporairement $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}'_f \subset \mathcal{E}''_f$ ces trois sous-catégories fuchsiennes. Soit $\mathcal{P}$ la catégorie pleine de $DiffMod(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ dont les objets sont les (K^n, Φ_A) tels que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. D'après la proposition 6.11, c'est une sous-catégorie de $DiffMod(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$ (les morphismes sont tous rationnels). D'autre part, d'après le théorème 6.9, c'est une sous-catégorie essentielle de chacune des catégories $\mathcal{E}'_f, \mathcal{E}''_f$. Les inclusions : $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}'_f \subset \mathcal{E}''_f$ sont donc des équivalences de catégories. La classification formelle ou analytique des modules fuchsiens formels, analytiques ou rationnels se ramène donc à la classification des (K^n, Φ_A) tels que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Chacun de ceux-ci est à son tour équivalent à un (K^n, Φ_A) tel que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset C_q$ (corollaire 6.8). Enfin, pour ces derniers, l'équivalence se confond avec la similitude (proposition 6.11).

Théorème 6.13. *Tout module fuchsien (formel, analytique ou rationnel) vérifiant $(\mathfrak{D})$ est équivalent sur $K = \mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}((z))$ à un (K^n, Φ_A) tel que $A \in GL_n(\mathbf{C})$ et $Sp(A) \subset C_q$, où A est unique à similitude près.*

6.3 Classifications formelle et analytique des modules purs

On sait *a priori* que deux modules purs sont isomorphes si, et seulement si, leurs composantes pures isoclines de mêmes pentes sont isomorphes deux à deux (cela découle du 4.3.2).

6.3.1 Modules purs isoclines de pente entière

Lemme 6.14. *(i) Soient $A, A', F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ et $u \in \mathbf{C}((z))^*$. Alors $F[A] = A' \Leftrightarrow F[uA] = uA'$.*
(ii) Soient $M := (K^n, \Phi_A)$ et $M' := (K^n, \Phi_{A'})$, où $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ et $A' = uA$, $u \in \mathbf{C}((z))^*$. Alors les pentes de M' sont celles de M augmentées de $\lambda := v(u)$: pour tout $\mu \in \mathbf{Q}$, on a $r_{M'}(\mu) = r_M(\mu - \lambda)$.

Démonstration. La première assertion est évidente. La deuxième est facile dans le cas de modules de rang 1, donc aussi dans le cas de matrices triangulaires (additivité de la fonction de Newton pour les suites exactes). D'après (i), la propriété est vraie pour A, A' si, et seulement si, elle l'est pour $F[A], F[A']$. Enfin, quitte à ramifier (ce qui n'affecte pas les conclusions) le théorème de factorisation formelle permet de se ramener (modulo isomorphisme) à une matrice triangulaire. □

Théorème 6.15. *(i) Soit $\mu \in \mathbf{Z}$. Le module de matrice $A \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ est pur isocline de pente μ si, et seulement si, le module de matrice $z^{-\mu}A$ est fuchsien.*
(ii) Tout module pur isocline de pente μ vérifiant $(\mathfrak{D})$ est de la forme $(K^n, \Phi_{z^\mu A})$ où $A \in GL_n(\mathbf{C})$.
(iii) Soit q un nombre complexe tel que $e_q(z)$ converge. L'application $A \mapsto (K^n, \Phi_{z^\mu A})$ induit une bijection entre :

1. *l'ensemble des classes de similitude des matrices $A \in GL_n(\mathbf{C})$ telles que $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset C_q$ et que*

   (6.15.1) $$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\prod_{\lambda_i/\lambda_j \notin q^{\mathbf{Z}}} (\lambda_i/\lambda_j; q)_n}$$

   converge. [14]

14. On remarquera que, si $|q| > 1$ les hypothèses de convergence de $e_q(x)$ et de la série (6.15.1) sont automatiquement vérifiées. Elles n'ont d'intérêt que dans le cas $|q| = 1$.

2. l'ensemble des classes d'isomorphie de modules purs isoclines de pente μ (formels, analytiques ou rationnels) vérifiant $(\mathfrak{D})$.

Démonstration. Cela découle du lemme ci-dessus et du théorème 6.13. $\square$

6.3.2 Modules purs isoclines arbitraires

La classification des modules purs de pente rationnelle arbitraire a été obtenue par van der Put et Reversat [vdPR07] dans le cas $|q| \neq 1$ et par Di Vizio [DV09] dans le cas $|q| = 1$. Nous ne faisons ici que l'esquisser.

Lemme 6.16. *Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ deux matrices de modules pures isoclines vérifiant $(\mathfrak{D})$, et soit $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ une transformation de jauge telle que $F[A] = B$. Alors $F \in GL_n(\mathbf{C}(\{z\}))$.*

Démonstration. Ramifier ne change ni l'hypothèse ni la conclusion car, si $F(z'^{\ell})$ converge, alors $F(z)$ converge. On peut donc se ramener au cas des pentes entières, traité plus haut. (Noter que la pente de A est celle de B sont nécessairement égales.) $\square$

Il découle de ce lemme que, si $|q| > 1$, *pour les modules purs de pentes arbitraires, les classifications analytique et formelle coïncident.* Nous nous placerons donc sur $\mathbf{C}((z))$, sans hypothèses sur q, en se souvenant que la classification obtenue est valable tel quelle pour les modules sur $\mathbf{C}(\{z\})$, lorsque $|q| \neq 1$. Les cas analytique avec $|q| = 1$ sera traite plus tard.

Modules irréductibles sur $\mathbf{C}((z))$. Un module aux q-différences est dit *irréductible* s'il est non nul et s'il n'admet pas de sous-module autre que lui-même et 0. Il est immédiat qu'un module M est irréductible si, et seulement si tout élément non nul de M est un vecteur cyclique ; et aussi que tout module aux q-différences irréductibles est un $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$-module à gauche simple. En fait, la réciproque est vraie d'après la preuve de la proposition 4.7. Suivant [vdPR07], la première étape de la classification des modules purs consiste à déterminer les modules irréductibles (théorème 6.18).

Un module aux q-différences irréductible M est, d'après le théorème 5.1, nécessairement pur isocline . Soient μ sa pente, $r = r_M(\mu)$ son rang et $d := r\mu$ son degré. Si μ est entier, le théorème de factorisation formelle entraine que M est de rang 1 (car il peut être dévissé par des modules de rang 1). Réciproquement, un module de rang 1 est simple et pur isocline ; nous savons déjà classer ces modules. On suppose donc que $r \geq 2$ et l'on note $K' := K[z^{1/r}] = K[z']$, q' une racine r-ième de q, et $\mathcal{D}'$ l'anneau des opérateurs aux q'-différences sur K'. Le module aux q'-différences $M' := K' \otimes_K M$ est pur isocline de pente $r\mu = d$ et de rang r. Sa pente étant entière, il admet un dévissage : $0 = M'_0 \subset \cdots \subset M'_r = M'$ tel que chaque quotient M'_i/M'_{i-1} est de rang 1. Considérons (par restriction des scalaires de $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}$) ces modules comme des modules aux q-différences. L'inclusion $M \subset M'$ (qui vient de l'inclusion $K \subset K'$) est un morphisme dans $DiffMod(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$. Du dévissage ci-dessus et de la simplicité de M, il découle que M est un sous-module de l'un des M'_i/M'_{i-1}, donc lui est égal puisqu'ils ont même rang r sur K. On a donc prouvé que M provient par restriction des scalaires d'un module aux q'-différences de rang 1 sur K'. Ce dernier est isomorphe à $(K', \Phi_{cz'^d})$ pour un unique $c \in \mathbf{C}^*$ tel que $1 \leq |c| < |q'|$.

Lemme 6.17. *Soit M le module aux q'-différences provenant par restriction des scalaires de $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}$ de $(K', \Phi_{cz'^d})$. Pour que M soit un module aux q-différences irréductible, il faut, et il suffit, que d et r soient premiers entre eux. Dans ce cas :*

$$M \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}\left(\sigma_q{}^r - q'^{-dr(r-1)/2}c^{-r}z^{-d}\right).$$

Démonstration. Nous noterons pour simplifier $\Phi := \Phi_{cz'^d}$. On a donc :

$$\forall m \in \mathbf{Z}\ ,\ \forall x \in K'\ ,\ \Phi^m(x) = {q'}^{-dm(m-1)/2} c^{-m} {z'}^{-dm} \sigma^m(x).$$

Supposons d'abord que d et r sont premiers entre eux. Les ${z'}^{-dm}$ pour $0 \leq m \leq r-1$ sont alors linéairement indépendants sur $\mathbf{C}((z))$, et il en est donc de même des $\Phi^m(1)$ pour $0 \leq m \leq r-1$, de sorte que 1 est un vecteur cyclique pour M. Comme $\Phi^r(1) = {q'}^{-dr(r-1)/2} c^{-r} z^{-d}$, on voit que M est isomorphe à $\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q}/\mathcal{D}_{\mathbf{C}((z)),\sigma_q} P$, où $P := {\sigma_q}^r - {q'}^{-dr(r-1)/2} c^{-r} z^{-d}$. Le polygone de Newton de P a pour unique vecteur frontière (r,d) qui n'est pas somme de deux vecteurs qui lui sont proportionnels : le polygone ne peut être cassé, P ne peut être factorisé et M est irréductible.
Si au contraire $r = r'\delta$ et $d = d'\delta$ avec $\delta > 1$, les $\Phi^m(1)$ avec $0 \leq m < r'$ engendrent sur $\mathbf{C}((z))$ un sous-espace de rang r' et 1 n'est pas cyclique : M n'est donc pas irréductible. $\square$

Si $a := c^r$, nous noterons $E(r,d,a)$ le module irréductible ci-dessus.

Théorème 6.18. *(i) Les modules aux q-différences irréductibles sont les $E(r,d,a)$ où $r \in \mathbf{N}^*$ et $d \in \mathbf{Z}$ sont premiers entre eux et où $a \in \mathcal{C}_q$.*
(ii) Les modules $E(r,d,a)$ et $E(r',d',a')$ sont isomorphes si, et seulement si, $(r',d',a') = (r,d,a)$.

Démonstration. Seul (ii) reste à démontrer. Si $E(r,d,a)$ et $E(r',d',a')$ sont isomorphes, la comparaison des pentes et des rangs montre que $r' = r$ et $d' = d$. Reprenons les mêmes notations que ci-dessus. Par extension des scalaires, on a l'isomorphisme de modules aux q'-différences :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - {q'}^{-dr(r-1)/2} a^{-1} {z'}^{-dr}) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - {q'}^{-dr(r-1)/2} {a'}^{-1} {z'}^{-dr}).$$

La transformation de jauge $P \mapsto P^{[{z'}^{-d}]}$ donne alors :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - a^{-1}) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma^r - {a'}^{-1}).$$

Par décomposition de chacun de ces modules en somme directe de r modules simples, on a des isomorphismes de la forme :

$$\mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma - b) \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{D}'(\sigma - b'),$$

où b est une racine r-ème de a^{-1} et b' une racine r-ème de ${a'}^{-1}$. Il existe donc un entier m tel que :

$$b' = {q'}^m b \Longrightarrow {a'}^{-1} = q^m a^{-1} \Longrightarrow a' = a,$$

puisque a et a' sont dans la couronne fondamentale. $\square$

Exercice 6.19. Donner une description de $E(r,d,a)$ sous la forme (K^r, Φ_A).

Modules indécomposables sur $\mathbf{C}((z))$. Toujours suivant [vdPR07], la seconde étape consiste à déterminer les modules aux q-différences purs *indécomposables*, *i.e.* qui ne sont pas somme directe de deux sous-modules non nuls. Leur conclusion est que tout module pur indécomposable s'obtient par extensions successives non scindées de m copies d'un même module irréductible $E(r,d,a)$, et ceci, de manière "essentiellement unique". Autrement dit, notant $E(r,d,a,m)$ le module ainsi obtenu :

Théorème 6.20. *Tout module pur indécomposable est de la forme $E(r,d,a,m)$ pour un unique quadruplet (r,d,a,m). Tout module pur est somme directe de modules purs indécomposables.*

Modules analytiques irréductibles et indécomposables, dans le cas $|q| = 1$. Nous nous limitons a énoncer les résultat connus dans ce cas. Les démonstrations sont en effet très proches de celle du cas $|q| \neq 1$ (*cf.* [DV09]).

Théorème 6.21. *(i) Les modules aux q-différences irréductibles vérifiant* $(\mathfrak{D}_3)$ *sont les* $E(r, d, a)$ *où* $r \in \mathbf{N}^*$ *et* $d \in \mathbf{Z}$ *sont premiers entre eux et où* $a \in \mathcal{C}_q$.
(ii) Si $e_q(z)$ *converge, les modules* $E(r, d, a)$ *et* $E(r', d', a')$ *sont isomorphes si, et seulement si,* $(r', d', a') = (r, d, a)$.
(iii) Tout module pur indécomposable vérifiant $(\mathfrak{D}_3)$ *est de la forme* $E(r, d, a, m)$ *pour un unique quadruplet* (r, d, a, m). *Tout module pur est somme directe de modules purs indécomposables.*

Références

[Ada29] C. R. Adams. On the linear ordinary q-difference equation. *Annals of Mathematics. Second Series*, 30(1-4) :195–205, 1928/29.

[And00a] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2) :705–740, 2000.

[And00b] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2) :741–756, 2000.

[And09] Y. André. Slope filtrations. *Confluentes Mathematici*, 1(1) :1–85, 2009.

[Bir13] G. D. Birkhoff. The generalized riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. *Proc. Amer. Acad.*, 49 :521–568, 1913.

[BR01] B. C. Berndt et R. A. Rankin, editors. *Ramanujan : essays and surveys*, volume 22 of *History of Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[CM00] T. Carletti et S. Marmi. Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of $(\mathbf{C}, 0)$. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :69–85, 2000.

[DLPS91] K. A. Driver, D. S. Lubinsky, G. Petruska, et P. Sarnak. Irregular distribution of $\{n\beta\}$, $n = 1, 2, 3 \cdots$, quadrature of singular integrands, and curious basic hypergeometric series. *Indagationes Mathematicae. New Series*, 2(4) :469–481, 1991.

[DV02] L. Di Vizio. Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Inventiones Mathematicae*, 150(3) :517–578, 2002. arXiv :math.NT/0104178.

[DV04] L. Di Vizio. Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 615–675. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004. arXiv :math.NT/0211217.

[DV09] L. Di Vizio. Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. *Journal of Noncommutative Geometry*, 3(1) :125–149, 2009. arXiv :0802.4223.

[DVRSZ03] L. Di Vizio, J.-P. Ramis, J. Sauloy, et C. Zhang. Équations aux q-différences. *Gazette des Mathématiciens*, (96) :20–49, 2003.

[DVZ09] L. Di Vizio et C. Zhang. On q-summation and confluence. *Annales de l'Institut Fourier*, 59(1) :347–392, 2009.

[GR90] G. Gasper et M. Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990. With a foreword by Richard Askey.

[HL46] G. H. Hardy et J. E. Littlewood. Notes on the theory of series. XXIV. A curious power-series. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 42 :85–90, 1946.

[HW88] G.H. Hardy et E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, Oxford, 1988.

[Lan95] S. Lang. *Introduction to Diophantine approximations.* Springer-Verlag, second edition, 1995.

[Lub98] D. S. Lubinsky. On q-exponential functions for $|q| = 1$. *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, 41(1) :86–97, 1998.

[Man04] Yu. I. Manin. Real multiplication and noncommutative geometry (ein Alterstraum). In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 685–727. Springer, Berlin, 2004.

[Mar00] S. Marmi. An introduction to small divisors. arXiv :math.DS/0009232, 2000.

[MZ00] F. Marotte et C. Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(6) :1859–1890, 2000.

[Ore33] O. Ore. Theory of non-commutative polynomials. *Annals of Mathematics. Second Series*, 34(3) :480–508, 1933.

[Pet92] G. Petruska. On the radius of convergence of q-series. *Indagationes Mathematicae. New Series*, 3(3) :353–364, 1992.

[RSZ04] J.-P. Ramis, J. Sauloy, et C. Zhang. La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 338(4) :277–280, 2004.

[RSZ09] J.-P. Ramis, J. Sauloy, et C. Zhang. Local analytic classification of $q-$difference equations, 2009. Soumis.

[Sau00] J. Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[Sau04] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé. *Annales de l'Institut Fourier*, 54(1) :181–210, 2004.

[Sau09] J. Sauloy. Équations aux q-différences linéaires : factorisation, résolution et théorèmes d'indices. Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, 2009. arXiv :0812.1983.

[SV03] Y. Soibelman et V. Vologodsky. Noncommutative compactifications and elliptic curves. *International Mathematics Research Notices*, (28) :1549–1569, 2003.

[vdPR07] M. van der Put et M. Reversat. Galois theory of q-difference equations. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6*, 16(3) :665–718, 2007.

[vdPS97] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois theory of difference equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Yoc95] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231) :3–88, 1995. Petits diviseurs en dimension 1.

[Zhaa] C. Zhang. Mordell's integral and summability of q-series. En préparation.

[Zhab] C. Zhang. On mock theta functions. En préparation.