Étude locale des équations aux q-différences linéaires analytiques dans le champ complexe: Classification et Théorie de Galois

J. Sauloy *

29 octobre 2009

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Devant un jury composé de Messieurs Yves André, Jose-Manuel Aroca, Daniel Bertrand, Bernard Malgrange, Jean-Pierre Ramis, Changgui Zhang.

Rapporteurs : Messieurs Yves André, Jose-Manuel Aroca, Yuri Manin.

*Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, Équipe Émile Picard, F-31062 Toulouse CEDEX 9. Mail: sauloy@math.univ-toulouse.fr

Remerciements

Vétéran motocycliste que jamais.
(Proverbe connu, version de Zorbeck le Gras.)

Mes remerciements vont tout d'abord à Yves André, Jose-Manuel Aroca et Yuri Manin, qui ont bien voulu lire ce mémoire et rédiger un rapport ; et, tout de suite après, à Yves André, Jose-Manuel Aroca, Daniel Bertrand, Bernard Malgrange, Jean-Pierre Ramis, et Changgui Zhang, qui m'ont fait le plaisir d'accepter d'être membres du jury. J'ajouterai une pensée toute spéciale pour Jean Giraud, qui nous a quittés en mars 2007. Il avait présidé mon jury de thèse, et je ressens sa présence bienveillance pour cette nouvelle étape.

L'influence de Jean-Pierre Ramis sur les travaux présentés ici est évidente, comme elle l'était pour ma thèse. La différence est que nous sommes maintenant des coauteurs, ce dont je n'aurais pas osé rêver il y a dix ans. Cette collaboration à deux pour la théorie de Galois et à trois, avec Changgui Zhang, pour la classification, a été une aventure permanente, qui n'est pas terminée. J'associerais volontiers à cette fine équipe les noms de Lucia Di Vizio (de qui j'espère encore devenir un coauteur) et de Yves André, qui ont également contribué à façonner ce monde nouveau.

L'environnement intellectuel fourni par le laboratoire Picard (et son directeur Ahmed Zeriahi) et l'Institut Mathématique de Toulouse (et son directeur Michel Boileau) ont certainement permis que La Force soit avec moi [1]. J'attribue en particulier à cet environnement favorable le public assidu du groupe de travail "Equations aux q-différences" (huit ans déjà !) et la possibilité de contribuer à la formation de jeunes chercheurs, comme Julien Roques et Anne Granier, qui sont venus renforcer la petite q-troupe. Et je suis surtout reconnaissant envers Vadim Schechtmann et Joseph Tapia pour leur disponibilité à toutes sortes de discussions mathématiques et philosophiques.

Enfin : merci à Cathy et aux enfants pour plus que je ne saurais dire.

Avertissement. Ce qui suit reproduit la version envoyée aux rapporteurs, à l'exception de corrections de détail et de remarques dûes aux rapporteurs et signalées en note.

1. L'environnement favorable dispensé par un laboratoire a des aspects bien matériels. Je remercie ici les puissances myst érieuses qui m'ont accordé *deux années de suite* un semestre sabbatique : la première fois, un CRCT (contingent de l'Université) ; la deuxième fois, une délégation CNRS. Tout enseignant-chercheur sait la douleur du travail interrompu par les changements de contexte. Ces quelques mois de liberté (deux semestres = huit mois environ) m'ont permis d'avancer des travaux en panne depuis des années faute de continuité.

Liste des travaux présentés

La liste complète de mes publications figure ci-dessous, en deux parties : articles scientifiques originaux d'une part, notes aux CRAS et articles d'exposition d'autre part. La liste des autres références bibliographiques citées dans le texte figure à la fin de ce mémoire.

Dans la première liste, les articles [1] et [2] sont essentiellement extraits de ma thèse. *Les articles [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] représentent (avec une petite partie de [2] élaborée après la thèse) les travaux présentés ici en vue de l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches.*

Articles scientifiques originaux

[1] Jacques Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[2] Jacques Sauloy. Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6) :925–968 (2004), 2003.

[3] Jacques Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(1) :181–210, 2004.

[4] Jacques Sauloy. Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations. *Astérisque*, 296 :227–251, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[5] J.-P. Ramis and J. Sauloy. The q-analogue of the wild fundamental group. I. In *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, pages 167–193. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.

[6] Jean-Pierre Ramis and Jacques Sauloy. The q-analogue of the wild fundamental group. II. In *Differential Equations and Singularities, 60th years of J.M. Aroca*, volume 323. Société Mathématique de France, 2009.

[7] J. Sauloy. Equations aux q-différences et fibrés vectoriels sur une courbe elliptique. In *Differential Equations and Singularities, 60th years of J.M. Aroca*, volume 323. Société Mathématique de France, 2009.

[8] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Local analytic classification of q-difference equations. *Article soumis*, 2009.

[9] Sauloy Jacques. Classification des modules aux différences filtrés isogradués. *Article soumis*, 2009.

Dans la liste qui suit, les notes [Sau99a, Sau99b] annoncent [1]. La note [Sau02b] annonce [3]. Les notes [RSZ04, RSZ06] annoncent [8]. Les quatre autres références sont des articles d'exposition : [Sau02a] expose les résultats de [2] ; [DVRSZ03] est un article de popularisation du domaine ; [Sau06] est un article de survol et de perspectives ; [Sau09] détaille des algorithmes élémentaires présentés différemment dans les travaux anciens, voire dans ceux de Marotte et Zhang. Notons enfin que l'article "Local Galois theory of irregular q-difference equations", cité "in preparation" dans mes premières publications n'a jamais été écrit : il correspond à une partie de [5, 6, 7].

Notes de CRAS et articles d'exposition

[DVRSZ03] L. Di Vizio, J.-P. Ramis, J. Sauloy, and C. Zhang. Équations aux q-différences. *Gaz. Math.*, 96 :20–49, 2003.

[RSZ04] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(4) :277–280, 2004.

[RSZ06] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Développement asymptotique et sommabilité des solutions des équations linéaires aux q-différences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7) :515–518, 2006.

[Sau99a] Jacques Sauloy. La classification des systèmes aux q-différences singuliers réguliers par la matrice de connexion de Birkhoff. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(1) :51–56, 1999.

[Sau99b] Jacques Sauloy. Matrice de connexion d'un système aux q-différences confluant vers un système différentiel et matrices de monodromie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(2) :155–160, 1999.

[Sau02a] Jacques Sauloy. Galois theory of q-difference equations : the "analytical" approach. In *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 277–292. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[Sau02b] Jacques Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(1) :11–14, 2002.

[Sau06] Jacques Sauloy. Isomonodromy for complex linear q-difference equations. In *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, volume 14 of *Sémin. Congr.*, pages 249–280. Soc. Math. France, Paris, 2006.

[Sau09] Jacques Sauloy. Équations aux q-différences linéaires : factorisation, résolution et théorèmes d'indices. *Article soumis*, 2009.

Résumé (et abstract)

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude locale par voie transcendante des équations aux q-différences linéaires analytiques dans le champ complexe. Cette étude se compose d'une part de la classification analytique, d'autre part de la correspondance de Riemann-Hilbert : théorie de Galois et détermination d'un q-analogue de la monodromie.
1) Le premier chapitre fournit des indications historiques et thématiques pour situer le domaine par rapport à celui des équations différentielles. Les mathématiques commencent avec l'introduction des notations générales en 1.5.
2) Le chapitre suivant décrit deux structures générales caractéristiques des équations aux q-différences : correspondance avec des *fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe elliptique* et *filtration canonique par les pentes* dans la catégorie analytique [2, 3, 7]
3) Le troisième chapitre expose la *classification analytique locale*, abordée par voie homologique (classification de modules filtrés isogradués), par voie géométrique (q-analogues des théorèmes de Birkhoff-Malgrange-Sibuya selon l'approche de Martinet-Ramis) et par voie analytique (en contournant cependant ici l'asymptotique et la sommabilité q-Gevrey) [4, 8, 9].
4) Le dernier chapitre expose, dans l'esprit de la correspondance de Riemann-Hilbert (classification par la représentation de monodromie), le *q-analogue du groupe fondamental sauvage* [4, 5, 6].

Abstract

The purpose of this work is the local study, by transcendental means, of linear analytic q-difference equations in the complex domain. This study involves on the one hand, the analytic classification, on the other hand, the Riemann-Hilbert correspondance: Galois theory and determination of a q-analogue of monodromy.
1) The first chapter provides historical and thematical indications to set our domain by comparison with that of differential equations. Mathematics begin with the introduction of general notations in 1.5.
2) The next chapter describes two general structures characteristic of q-difference equations: correspondance with *holomorphic vector bundles over an elliptic curve* and *canonical filtration by the slopes* in the analytic category [2, 3, 7]
3) The third chapter expounds the *local analytic classification*, tackled along homological lines (classification of isograded filtered modules), along geometrical lines (q-analogues of the Birkhoff-Malgrange-Sibuya theorems through the approach of Martinet-Ramis) and along analytical lines (while however avoiding here q-Gevrey asymptotics and summability) [4, 8, 9].
4) The last chapter expounds, in the spirit of Riemann-Hilbert correspondance (classification by the monodromy representation) the *q-analogue of the wild fundamental group* [4, 5, 6].

Avant-propos

L'ensemble de mes travaux depuis la thèse, c'est-à-dire pendant une décennie, a porté sur l'*étude locale des équations aux q-différences linéaires analytiques dans le champ complexe*, particulièrement sur leur *classification* et leur *théorie de Galois*. De plus, bien que je sois (de cœur et de formation) un algébriste, ces travaux s'inscrivent dans la droite ligne de l'œuvre de Ramis en ce qu'ils s'attachent à décrire des objets algébriques par voie transcendante.

Les équations aux q-différences sont mieux connues qu'il y a vingt ans, mais il ne sera peut-être pas inutile (dans un premier chapitre, puis tout au long du texte) de donner quelques indications historiques (anciennes et récentes) qui permettent de situer la nature des problèmes (par exemple, en comparaison avec la théorie des équations différentielles) et de *motiver* les solutions qui y ont été apportées.

Ce que l'on ne trouvera pas ici

Avant de décrire l'organisation du mémoire, et en guise d'excuse, je vais énumérer des thèmes qui y sont plus ou moins directement rattachés [2] mais qui n'y sont pas abordés :

1. Théories p-adique et arithmétique : voir pour cela les travaux de J.-P. Bézivin, Y. André, L. Di Vizio et A. Pulita [Béz92b, And04, DV02, DV04, ADV04, Pul08].
2. Déformations isomonodromiques et équations de Painlevé : l'école japonaise, à la suite de Jimbo et Sakai [JS96] et les physisicens ont accumulé une masse de résultats "empiriques" [DLR06, Tak07]. La théorie correspondante, basée sur une vraie définition de la monodromie, reste à faire.
3. Équations non-linéaires : la théorie est embryonnaire ; voir par exemple les travaux de F. Ménous [Men04, Men06] dans la lignée d'Ecalle. On peut espérer des retombées de l'application par A. Granier du groupoïde de Malgrange aux q-différences [Gra09].
4. Théorie de Galois différentielle par voie algébrique : voir les travaux de Z. Chatzidakis, C. Hardouin et M. Singer [CHS08, HS08].
5. Confluence lorsque $q \to 1$: ce thème est apparu dans ma thèse, où l'on voit que la matrice de connexion de Birkhoff permet, par passage à la limite, de calculer la monodromie d'une équation différentielle fuchsienne [1]. A. Duval et J. Roques ont étudié des dégénerescences analogues qui mettent en outre en jeu des équations aux différences [DR08] ; et L. Di Vizio et C. Zhang ont étudié des cas où apparaissent des opérateurs de Stokes [DVZ09].
6. Théorie analytique complexe lorsque $|q| = 1$: il n'y avait presque aucun résultat en ce sens (mais voir [Car12, Béz92b] jusqu'à la spectaculaire percée de L. Di Vizio [DV09].

2. Je n'évoque même pas la théorie cousine des équations aux différences.

Je mets de côté la question de l'étude *globale*, autrement dit de ce qui se passe entre 0 et ∞, dont je parlerai à la fin de l'introduction.

Plan du mémoire

Le premier chapitre d'introduction donne de brèves indications historiques sur l'évolution de la théorie, en particulier sur la succession des théorèmes d'existence de Carmichael (1912) à Praagman (1986). On y décrit encore plus brièvement les progrès accomplis pendant les deux décennies suivantes en matière de théorie de Galois et de classification : ces résultats constituent en effet la motivation et une partie du contenu de ce mémoire. Enfin, les notations générales pour toute la suite sont précisées au paragraphe 1.5, où peut donc se rendre immédiatement le lecteur qui éprouve de l'aversion pour les généralités [3].

Le deuxième chapitre décrit deux structures caractéristiques de la théorie des équations aux q-différences (par opposition aux équations différentielles ou aux différences) : la correspondance avec des *fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe elliptique* qui explique pourquoi la théorie transcendante peut être à ce point algébrisée ; et l'existence d'une *filtration canonique par les pentes* dans la catégorie analytique, qui explique l'apparition récurrente de groupes unipotents, grâce auxquels la théorie locale est de difficulté intermédiaire entre le cadre abélien et le cadre non abélien général. Le thème "fibrés" est apparu dans mes articles à partir de [2], les propriétés de la filtration ont été développées dans [3] ; ces deux thèmes servent de paysage à toute la suite. J'ai tenté une synthèse (peut-être prématurée) de leur interaction dans [7].

Le troisième chapitre porte sur la *classification analytique locale*. L'article [8], écrit en collaboration avec Jean-Pierre Ramis et Changgui Zhang, constitue (dans notre esprit) un achèvement quasiment complet du programme de Birkhoff. Dans son aspect le plus élémentaire (algébrique !) on y reconnait le phénomène de Stokes comme une obstruction au scindage de la filtration canonique. Les outils homologiques correspondants sont élaborés dans [9]. La partie non élémentaire (q-analogues des théorèmes de Birkhoff-Malgrange-Sibuya) met en œuvre des méthodes géométriques directement inspirées de l'article de Martinet-Ramis [MR82]. Tous ces résultats sont précisés par une subtile théorie de l'asymptotique q-Gevrey et de la sommabilité mise au point par Zhang, et en partie par Ramis, ces dix dernières années. J'ai choisi ici d'exposer une approche alternative que j'ai développée dans [4], car elle est plus proche des thèmes principaux de mon travail, en particulier de la théorie de Galois.

Le quatrième chapitre porte sur la théorie de Galois locale, un travail entrepris en collaboration avec Jean-Pierre Ramis, dont on reconnaîtra le slogan "épingler des objets algébriques avec des objets transcendants". Il s'agit ici de comprendre, dans l'esprit de la correspondance

3. "The reader with a strong dislike for hot air ..."

de Riemann-Hilbert (classification par la représentation de monodromie, dont le groupe de Galois n'est qu'une approximation algébrique) la composante de Stokes du groupe de Galois comme fermeture algébrique du *q-analogue du groupe fondamental sauvage*, ce que nous avons fait dans [5, 6] en utilisant, comme substitut plus algébrique à la sommation q-Gevrey de Zhang, les outils de [4].

Table des matières

1 Introduction historique, thématique et prospective

L'acte de naissance des équations aux q-différences est généralement fixé dans le q-calcul d'Euler, et son introduction d'un paramètre supplémentaire : par exemple, pour calculer $(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots$, on peut poser $f(z) := (1+zx)(1+zx^3)(1+zx^5)\cdots$ et comparer les séries $f(qz)$ et $f(z)$, où $q := x^2$. Je ne peux cependant résister au plaisir de mentionner le calcul par Fermat de l'aire comprise sous un arc de parabole, et, plus généralement, de l'intégrale :

$$\int_1^a t^n\, dt.$$

Au lieu de diviser le segment $[1,a]$ en intervalles de longueur égale et tendant vers 0, ce qui revient à résoudre l'équation $f'(t) = t^n$ par la méthode d'Euler à pas constants, Fermat prend des pas en progression géométrique de rapport q qui tend [4] vers 1, ce qui revient à employer la méthode d'Euler à pas géométriques : il résoud donc une équation aux q-différences puis procède à une *confluence* au sens de [1]. La première équation aux q-différences "non abélienne" (ordre 2 et 3 singularités) est celle satisfaite par les séries "hypergéométriques basiques" introduites par Heine en 1848. Entre ce moment et celui où Ramanujan invente les "Mock Theta Functions", naît toute une industrie florissante de fonctions q-spéciales, de formules intégrales explicites (de type Barnes-Mellin-Watson, ou à l'aide de la "q-intégrale de Jackson") ; et, après Ramanujan, de polynômes q-orthogonaux : la bible de Gasper et Rahman donne une idée de ce foisonnement. Pour reprendre les termes de la célèbre division de l'analyse moderne par Whittaker et Watson, l'étude des *objets* ("The Transcendental Functions") a précédé, comme il se doit, la mise au point des *outils* ("The Processes of Analysis").

Dans toute la suite de ce travail, nous ne occuperons plus que de la boîte à outils [5].

1.1 Théorèmes d'existence

Sans le formaliser en une définition du corps de constantes ou en un lemme du q-Wronskien, les anciens savaient que l'on ne trouverait pas plus de n solutions "indépendantes" à une équation linéaire d'ordre n :

$$f(q^n z) + a_1(z) f(q^{n-1}z) + \cdots + a_n(z) f(z) = 0,$$

où $q \in \mathbf{C}^*$, $|q| \neq 1$. En l'absence d'un théorème de Cauchy-Lipschitz, le but était donc d'en trouver un "full complement" *i.e.* un système fondamental.

4. Fermat appelle *adéquation* la substitution $q := 1$ après élimination des facteurs $(q-1)$: ce n'est pas un passage à la limite, mais une *spécialisation* comme dans [And01].

5. J'ai rêvé d'appliquer ces outils aux "Mock Theta Functions" de Ramanujan ou à la "Real Multiplication" de Manin, mais ce sont Changgui Zhang et Lucia Di Vizio qui ont su le faire !

C'est Carmichael qui prouva en 1912 dans [Car12] l'existence d'un système fondamental de solutions convergentes pour une équation fuchsienne [6]. Dans son article fondateur de 1913 [Bir13], Birkhoff reprend sous forme matricielle cette résolution de type Fuchs-Frobenius. Les deux auteurs se placent dans le cas générique où les solutions ne comportent pas de composante logarithmique.

En 1929, Adams complète le travail de Carmichael et Birkhoff en incluant le cas logarithmique. Il démontre de plus en toute généralité l'existence d'un système fondamental de solutions formelles à l'aide d'un polygone de Newton qu'il introduit pour cela. Mais surtout, il prouve que *les solutions attachées à la première pente du polygone de Newton ne font intervenir que des séries convergentes*, phénomène sans équivalent pour les équations différentielles ou aux différences : nous appellerons *lemme d'Adams* ce résultat fondamental.

En 1941, Birkhoff et Guenter [7] itèrent le calcul d'Adams et obtiennent la *factorisation analytique de tout opérateur aux q-différences*, encore une fois un phénomène nouveau, dont ils mesurent toute l'importance : après avoir défini des formes normales analytiques (que nous appellerons *forme normale de Birkhoff-Guenter*), ils formulent le "programme de Birkhoff-Guenter" :

Up to the present time, the theory of q-difference equations has lagged noticeabely behind the sister theories of linear difference and q-difference equations. In the opinion of the authors, the use of the canonical system, as formulated above in a special case, is destined to carry the theory of q-difference equations to a comparable degree of completeness. This program includes in particular the complete theory of convergence and divergence of formal series, the explicit determination of the essential invariants (constants in the canonical form), the inverse Riemann theory both for the neighborhood of $x = \infty$ and in the complete plane (case of rational coefficients), explicit integral representations of the solutions, and finally the definition of q-sigma periodic matrices, so far defined essentially only in the case $n = 1$. Because of its extensiveness this material cannot be presented here.

Birkhoff est mort en 1944 et, à notre connaissance, ce programme ne connut pas de suite.

De Carmichael à Birkhoff, toutes les solutions construites sont multiformes, essentiellement parce que l'on résoud l'équation $f(qz) = cf(z)$ par la fonction $z^{\log_q c}$. En 1986, Praagman [Pra86] prouve l'existence d'un système fondamental de solutions méromorphes *uniformes* sur $\mathbf{C}^*$. Il utilise pour cela le fait que *le faisceau des solutions holomorphes est un fibré vectoriel holomorphe sur la courbe elliptique* $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et que tout fibré sur une surface de Riemann compacte est

6. Il y étudie également le cas où $|q| = 1$.

7. Je passe sous silence la tentative [Trj33] de Trjitzinsky en 1933 de sommer les solutions divergentes : voir là dessus les commentaires de C. Zhang dans [Zha99].

méromorphiquement trivial ; encore une fois, un phénomène sans équivalent pour les équations différentielles. Le travail de Praagman concerne également les équations aux différences, pour lesquelles il dispose d'un fibré sur le cylindre $\mathbf{C}^* \simeq \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, mais nous verrons l'avantage d'avoir affaire à une surface compacte.

1.2 Correspondance de Riemann-Hilbert

Le programme de classification a été formulé par Birkhoff en 1913 : dans [Bir13], il propose de traiter de manière unifiée la classification globale des équations différentielles, aux différences et aux q-différences sur la sphère de Riemann. L'outil essentiel pour le passage du local au global est la *factorisation de Birkhoff* [8] des matrices analytiques, que Rohrl interprétera plus tard en termes de fibrés vectoriels holomorphes pour en tirer une solution concise au problème de Riemann-Hilbert. Cependant, le travail de Birkhoff ne donne pas la classification en termes de représentations de groupes : c'est bien un "problème de Riemann" plutôt qu'un "problème de Riemann-Hilbert".

Pendant longtemps, la seule tentative "galoisienne" a été celle de Franke [Fra63], qui adapte la théorie de Picard-Vessiot. Cependant, selon [vdPS97], ces résultats ne s'appliquent pas à toutes les équations. En 1995, Etingof [Eti95] montre que la matrice de connexion P de Birkhoff peut jouer le rôle de la monodromie pour les équations *régulières* en 0 et ∞ (donc pour une classe beaucoup plus restreinte que celle considérée par Birkhoff) : il n'y a alors pas de monodromie locale et les valeurs $P(a)$ jouent le rôle de "formules de connexion" ; les $P(a)^{-1}P(b)$ engendrent le groupe de Galois (défini à la Picard-Vessiot). En 1996, Baranovsky et Ginzburg [BG96] calculent à l'opposé la monodromie locale pour les équations fuchsiennes. Dans le cadre de l'étude des groupes de lacets, ils prouvent que la classification formelle des équations fuchsiennes en 0 équivaut à celle des fibrés plats sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$; ils en déduisent le calcul (par Kontsevich) du groupe de Galois local correspondant.

Enfin, en 1997, van der Put et Singer [vdPS97] mettent au point une théorie de Galois [9] valable en toute généralité. Ils doivent pour cela définir l'extension de Picard-Vessiot universelle comme un anneau non intègre en général. Pour des raisons que nous verrons plus loin, ils font appel à des solutions *symboliques*. Mais surtout, ils donnent une version tannakienne de leur construction susceptible de généralisation. Leurs résultats contiennent en particulier ceux de Birkhoff, de Etingof et de Baranovsky-Ginzburg.

8. La factorisation de Birkhoff a été récemment utilisée par Connes, Kreimer et Marcolli dans leur approche galoisienne de la renormalisation.

9. Leur livre concerne surtout les équations aux différences.

1.3 Approche transcendante à l'aide de solutions uniformes

Dans [Ram90], Ramis reprend une suggestion de Birkhoff d'utiliser des fonctions uniformes pour obtenir une matrice de connexion elliptique ; mais, alors que Birkhoff préconise l'usage de la fonction σ de Weierstrass, Ramis étudie l'usage de la fonction Theta pour obtenir des solutions méromorphes *uniformes*.

Pour la théorie de Galois, van der Put et Singer avaient évité les solutions multiformes des anciens, qui peuvent conduire dans certains cas à des ambigüités (voir [vdPS97, p. 165].) D'un autre côté, le choix de solutions uniformes pose le problème des constantes. En effet, quelque soit le choix des "caractères" :

$$e_c \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^* \text{ tel que } \sigma_q e_c = c e_c \,,\ c \in \mathbf{C}^*,$$

il est impossible de trivialiser le cocycle de fonctions elliptiques :

$$\frac{e_c e_d}{e_{cd}} \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}).$$

Il y a donc nécessairement un "gros" corps des constantes, et il faut un certain travail pour obtenir une classification avec des invariants sur $\mathbf{C}$, et encore plus pour un groupe de Galois sur $\mathbf{C}$; c'est, dans le cas fuchsien (celui envisagé par Birkhoff dans[Bir13]), le contenu de ma thèse en 1999. Un autre problème est qu'il n'est plus question de prolongement analytique et qu'il n'est pas facile de deviner ce qui tiendra lieu de représentation de monodromie. Cependant, l'avantage d'utiliser de "vraies solutions" (fonctions méromorphes uniformes) plutôt que des solutions symboliques est double :

1. Lors de la "confluence" $q \to 1$ d'une famille d'équations aux q-différences vers une équation différentielle, la matrice de connexion de Birkhoff permet, à la limite, de récupérer la monodromie (la vraie, celle des solutions multiformes de l'équation différentielle) : voir [1].
2. Une fois déterminé le groupe de Galois sur $\mathbf{C}$, on peut y définir un sous-groupe Zariski-dense de présentation finie, qui tient lieu de groupe de monodromie : voir [2].

À vrai dire, ce dernier point a été complètement réalisé pour le groupe local fuchsien, mais pas pour le groupe global fuchsien : pour ce dernier, seul le cas abélien a été traité ; il se ramène à théorie géométrique du corps de classes, ici, sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

1.4 Perspectives

Ces dix dernières années, j'ai complètement abandonné le thème de la confluence (mais il a été repris par A. Duval, J. Roques, L. Di Vizio et C. Zhang). Il me semble que ce thème est important pour la raison suivante. Des trois familles : équations différentielles, aux différences et aux q-différences, ce sont ces dernières qui sont les moins dégénérées. (Arguments : σ_q a deux points fixes distincts ; le quotient est une surface de Riemann compacte ; on a une factorisation analytique.) On peut penser que “déployer” une équation différentielle ou aux différences en une famille d’équations aux q-différences est une sorte de désingularisation.

J’ai également abandonné la théorie de Galois globale (mais les résultats de ma thèse ont été efficacement exploités par Julien Roques dans [Roq08]). En particulier, je n’ai pas trouvé d’équivalent aux résultats de Krichever [Kri04] pour les équations aux différences : je ne sais toujours pas, dans le cas non abélien, “localiser le groupe de Galois aux q-spirales singulières”.

À mon avis, les principales avancées ont été les suivantes :

1. Ramis et Zhang ont mis au point une théorie de l’asymptotique et de la sommation q-Gevrey.
2. Ramis, Sauloy et Zhang ont défini le phénomène de Stokes et essentiellement achevé la classification analytique locale.
3. Ramis et Sauloy ont défini le q-analogue du groupe fondamental sauvage, qui permet d’étendre la correspondance de Riemann-Hilbert au cas irrégulier.

Les problèmes ouverts qui me semblent à la fois abordables et logiquement conséquence de ces progrès sont les suivants :

1. Un travail en cours avec J.-P. Ramis devrait achever l’identification du “groupe de Stokes”, et permettre de préciser l’analogie avec la composante unipotente du “groupe de Galois cosmique” de Connes-Marcolli. Le même travail devrait permettre d’attaquer le problème inverse local, peut-être même global.
2. Nous avons deux objets classifiants où vivent les opérateurs de Stokes : le H^1 d’un certain faisceau de groupes unipotents sur la courbe elliptique ; et l’algèbre de Lie du groupe de Stokes. Pour cette dernière, nous avons utilisé un nouveau mode de calcul d’invariants, que j’appelle “dualité de Ramis” (par analogie avec la dualité de Serre). Je pense que ces techniques permettent d’étudier directement les H^1 de certains faisceaux de groupes non abéliens, donc d’avancer dans la théorie du corps de classes géométrique.
3. Enfin, les techniques évoquées ci-dessus ajoutées à celles de Connes-Marcolli me donnent l’espoir d’attaquer enfin le problème global dans le cas non abélien.

1.5 Notations générales.

On fixe une fois pour toutes $q \in \mathbf{C}$ tel que $|q| > 1$ et l’on note σ_q l’opérateur de dilatation correspondant

$$\sigma_q f(z) := f(qz).$$

C’est un automorphisme de chacun des anneaux $\mathbf{C}[z]$ (polynômes), $\mathbf{C}\{z\}$ (séries convergentes) et $\mathbf{C}[[z]]$ (séries formelles), et donc de leurs corps des fractions respectifs $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{C}(\{z\})$ et $\mathbf{C}((z))$. Le corps des constantes est toujours $\mathbf{C}$. L’opérateur σ_q agit également sur les vecteurs, matrices ... sur ces anneaux et corps.

On note $\mathbf{E}_q$ le tore complexe (ou la courbe elliptique) :

$$\mathbf{E}_q := \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$$

et $p : \mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$ la projection naturelle. L'opérateur σ_q agit sur le corps $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ des fonctions méromorphes ; le corps des constantes s'identifie au corps des fonctions elliptiques :

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbf{E}_q),$$

Une équation aux q-différences lineaire analytique, resp. formelle (implicitement : en $0 \in \mathbf{C}$) a la forme :

$$\sigma_q^n f + a_1 \sigma_q^{n-1} f + \cdots + a_n f = 0, \tag{1}$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}(\{z\})$, resp. $\mathbf{C}((z))$ et où $a_n \neq 0$. On peut la vectoriser en un système aux q-différences :

$$\sigma_q X = AX, \tag{2}$$

où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$, resp. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$. Les systèmes $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$ sont dits analytiquement, resp. formellement équivalent si l'on a :

$$B = F[A] := (\sigma_q F) A F^{-1},$$

avec $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$, resp. $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$. Le lemme du vecteur cyclique (dû à Birkhoff) implique que tout système analytique, resp. formel, est analytiquement, resp. formellement équivalent au système provenant d'une équation. Le lemme du wronskien garantit que les solutions dans un corps K où opère σ_q forment un espace vectoriel sur le corps des constantes K^{σ_q}, de dimension $\leq n$. D'après Praagman [Pra86], si $K = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$, la dimension est n.

Nous aurons besoin de la fonction Theta de Jacobi sous la forme suivante :

$$\theta_q(z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{-n(n+1)/2} z^n.$$

Elle est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$; ses zéros sont les $-q^n, n \in \mathbf{Z}$ et ils sont simples ; et l'on a $\sigma_q \theta_q = z\theta_q$.

Un module aux q-différences sur (K, σ_q) est un couple (V, Φ) formé d'un K-espace vectoriel V de dimension finie n et d'un automorphisme σ_q-linéaire de V :

$$\Phi(fv) = (\sigma_q f)\Phi(v).$$

De manière équivalente, c'est un module à gauche de longueur finie sur l'anneau des opérateurs aux q-différences $\mathcal{D}_{q,K} := K < \sigma_q, \sigma_q^{-1} >$ (un anneau de polynômes de Laurent non commutatifs). Par choix d'une base, on peut se ramener à un module (K^n, Φ_A), où $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et où :

$$\Phi_A(X) := A^{-1} \sigma_q X.$$

Les "vecteurs horizontaux" (*i.e.* Φ-invariants) de ce module sont les solutions de $\sigma_q X = AX$, et l'on peut considérer (K^n, Φ_A) comme un modèle de ce système.

Les modules aux q-différences forment une catégorie tannakienne K^{σ_q}-linéaire, *i.e.* $\mathbf{C}$-linéaire dans tous les cas qui nous intéressent. Par exemple, pour la catégorie des modules sur $\mathbf{C}(\{z\})$, on peut prendre pour foncteur fibre le foncteur des solutions dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$, mais le groupe de Galois correspondant est alors défini sur $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ et non sur $\mathbf{C}$. Cependant, dans les cas qui nous intéressent, on a bien des foncteurs fibres définis sur $\mathbf{C}$ et une catégorie tannakienne neutre : mais *ces foncteurs fibres ne sont pas des foncteurs de solutions* [10]. Notant $\underline{1} = (K, \sigma_q)$ l'unité, on introduit le "foncteur des solutions" :

$$\Gamma(M) = \mathrm{Hom}(\underline{1}, M) = \{X \mid \Phi(X) = X\}.$$

Il est exact à gauche et son premier dérivé droit est :

$$\Gamma^1(M) = \mathrm{Ext}(\underline{1}, M).$$

De l'identité $\mathrm{Hom}(M,N) = \Gamma(M^\vee \otimes N) = \Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(M,N))$, on déduit plus généralement :

$$\mathrm{Ext}(M,N) = \Gamma^1(M^\vee \otimes N) = \Gamma^1(\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)).$$

Convention : Pour simplifier, nous dirons (abusivement) "tannakienne" pour "tannakienne neutre" et "fibré" pour "fibré vectoriel holomorphe".

10. Comme remarqué par Yves André, ceci n'est pas exact : selon [And01], tout foncteur fibre est un foncteur de solutions. Mais, ici, ce ne sont pas des solutions fonctionnelles, *i.e.* dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$.

2 Fibrés et filtrations

2.1 Équations aux q-différences et fibrés vectoriels holomorphes sur $\mathbf{E}_q$

2.1.1 Le cas des équations fuchsiennes

En général, la matrice de connexion de Birkhoff d'une équation aux q-différences fuchsienne sur la sphère de Riemann ne produit pas d'éléments du groupe de Galois . Il faut la "tordre" par des contributions liées aux monodromies locales en 0 et ∞. C'est essentiellement dû au fait que le produit tensoriel des "solutions canoniques" e_c, e_d aux équations $\sigma_q e_c = c e_c$, $\sigma_q e_d = d e_d$ n'est pas la solution canonique e_{cd} à l'équation $\sigma_q e_{cd} = cd e_{cd}$. La matrice de connexion tordue est un outil efficace dans les calculs [Roq08], mais elle n'est ni élégante ni intrinsèque. Pour la comprendre mieux, j'ai été conduit à remplacer les solutions canoniques, *dont le choix n'est pas canonique*, par les *sections d'un fibré vectoriel*, ici un fibré en droite. Ce qui suit représente la partie des résultats de [2] qui ne figure pas dans ma thèse [11].

Dans le cas d'une équation à coefficients constants, de matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, la construction est la suivante : on quotiente le fibré trivial équivariant $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n$ par l'action $(z,X) \mapsto (qz,AX)$; le résultat est un fibré plat sur $\mathbf{E}_q$. Dans le cas général, on interprète le lemme classique d'équivalence locale d'un système fuchsien avec un système à coefficients constants comme une équivalence de catégories tannakiennes (en particulier, $\otimes$-compatible). On obtient alors le théorème 2.3.2.1 de [2] :

Théorème 1 *La catégorie tannakienne des équations aux q-différences fuchsiennes sur $\mathbf{C}(\{z\})$ est $\otimes$-équivalente à la catégorie des fibrés plats sur $\mathbf{E}_q$.*

Dans l'esprit de la correspondance de Weil [Wei38], elle est donc équivalente avec la catégorie des représentations de $\pi_1(\mathbf{E}_q) = \mathbf{Z}^2$, mais il faut y compter tout les morphismes équivariants de représentations et non seulement les morphismes constants [7]. Son groupe de Galois $G_f^{(0)}$ est donc un sous-groupe de l'enveloppe proalgébrique de $\mathbf{Z}^2$. Rappelons que cela découle du fait que tout fibré sur $\mathbf{E}_q$ définit par pullback au revêtement universel $\mathbf{C}$ de $\mathbf{E}_q$ un fibré trivial équivariant $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. En fait, en remarquant qu'un tel fibré se trivialise déjà sur le revêtement intermédiaire $\mathbf{C}^*$ (car c'est une surface de Riemann ouverte), on voit que $G_f^{(0)}$ est un sous-groupe de l'enveloppe proalgébrique de $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}^{alg} = \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbf{C}^*, \mathbf{C}^*) \times \mathbf{C},$$

où la composante semi-simple $\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbf{C}^*, \mathbf{C}^*)$ est le groupe de tous les morphismes de groupes "abstraits". On comprend ainsi le calcul [2, 2.2.2.2] (voir aussi [BG96]) du groupe de Galois local :

$$G_f^{(0)} = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbf{Z}^{alg} \,|\, \gamma(q) = 1\}.$$

11. J'ignorais à l'époque l'usage des fibrés dans [Pra86] et dans [BG96].

Remarques.

1. On déduit de la dualité tannakienne l'existence d'un groupoïde de base le schéma $\mathbf{E}_q$, mais nous préférons travailler avec des points bases sur $\mathbf{C}^*$ pour ne pas perdre de l'information transcendante.
2. Dans le cas fuchsien local, les morphismes galoisiens commutent tous et le choix d'un point base (foncteur fibre) est inessentiel.

2.1.2 Le cas des équations irrégulières

L'extension de la correspondance précédente (entre équations fuchsiennes et fibrés plats sur $\mathbf{E}_q$) à des équations aux q-différences générales s'est faite progressivement dans [4, 7] (voir aussi [Sau06]). Il y a finalement deux constructions équivalentes. On part de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ et l'on considère un disque épointé D de centre 0 sur lequel A et A^{-1} sont holomorphes.

1. Le fibré trivial $D \times \mathbf{C}^n$ est équivariant sous l'action du semi-groupe $q^{-\mathbf{N}}$, d'où une relation d'équivalence telle que $(z,X) \sim (qz, A(z)X)$. Le quotient est un fibré sur $D/q^{-\mathbf{N}} = \mathbf{E}_q$. (Le fait que $p_D : D \to \mathbf{E}_q$ n'est pas un revêtement n'a pas d'importance.) Le fibré obtenu ne dépend pas du disque D.
2. Le faisceau sur $\mathbf{E}_q$ défini par :
$$\mathcal{F}(V) := \{X \in O(p_D^{-1}(V))^n \,|\, \sigma_q X = AX\}$$
est localement libre de rang n. (C'est l'argument de Praagman.)

On définit ainsi un foncteur $M \rightsquigarrow \mathcal{F}_M$ de la catégorie des modules aux q-différences sur $\mathbf{C}(\{z\})$ vers la catégorie des fibrés sur $\mathbf{E}_q$. La relation entre solutions et sections s'exprime par un isomorphisme fonctoriel :
$$\Gamma(M) = H^0(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_M),$$
d'où l'on déduit :
$$\Gamma^1(M) = H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_M).$$
Plus généralement :
$$\mathrm{Ext}(M,N) = \Gamma^1(M^\vee \otimes N) = H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M^\vee \otimes N}) = H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_M^\vee \otimes \mathcal{F}_N).$$

Le foncteur $M \rightsquigarrow \mathcal{F}_M$ est $\otimes$-compatible, exact et fidèle [7], donc idéal pour la théorie de Galois : il fournit autant de foncteurs fibres définis sur $\mathbf{C}$ que l'on veut, et l'on en déduit un groupoïde de Galois de base $\mathbf{C}^*$ (nous y reviendrons au chapitre 4).

Mais ce foncteur n'est pas pleinement fidèle. En effet, si les modules M, M' correspondent aux matrices $A, A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$, un morphisme de $\mathcal{F}_M$ vers $\mathcal{F}_{M'}$ se remonte en une matrice F telle que $(\sigma_q F)A = A'F$, et F est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, mais on ne sait rien en général sur son comportement en 0. (Si A, A' sont fuchsiennes, F admet un prolongement méromorphe en 0.) Nous y reviendrons en 2.2.3.

2.1.3 Constructions globales

Pour l'étude globale, c'est-à-dire sur le corps $\mathbf{C}(z)$, le théorème de classification de Birkhoff prend la forme suivante : la catégorie des équations aux q-différences fuchsiennes entre 0 et ∞ est équivalente (en tant que catégorie tannakienne) à la catégorie des triplets $\mathcal{X} := (\mathcal{F}^{(0)}, \phi, \mathcal{F}^{(\infty)})$, où ϕ est un isomorphisme méromorphe entre les fibrés plats $\mathcal{F}^{(0)}$ et $\mathcal{F}^{(\infty)}$ sur $\mathbf{E}_q$. Les groupoïdes de Galois locaux en 0 et ∞ ont chacun pour base $\mathbf{C}^*$, et, pour chaque paire de foncteurs fibres $\omega_a^{(0)}$, $\omega_a^{(\infty)}$, $a \in \mathbf{C}^*$ un morphisme galoisien les relie :

$$\mathcal{X} \rightsquigarrow F(a) : \omega_a^{(0)}(\mathcal{X}) \to \omega_a^{(\infty)}(\mathcal{X}),$$

où F relève ϕ sur $\mathbf{C}^*$. On montre que, avec les groupes locaux, ces morphismes engendrent le groupe de Galois global. On sait isoler dans les groupes de Galois locaux des groupes de monodromie Zariski-denses. Le problème est d'extraire la famille continue des $\phi(a)$ une famille raisonnable de morphismes galoisiens qui suffisent à engendrer le groupe. C'est ce qui est fait dans [2] dans le cas abélien : on peut *localiser* la "composante de connexion" du groupe de Galois en les singularités "intermédiaires" (*i.e.* autres que 0 et ∞).

Dans le cas général, on a la construction suivante [7]. On fixe un système de matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(z))$ et l'on note $Sing(A)$ le lieu des pôles de A et de A^{-1}. Pour chaque ouvert $U \subset \mathbf{C}^*$ tel que la restriction $p : U \to \mathbf{E}_q$ est surjective et tel que de plus : $U \cap q^{-1}U \cap Sing(A) = \emptyset$, on peut définir un fibré trivial équivariant $U \times \mathbf{C}^n$ et, par passage au quotient, un fibré $\mathcal{F}_{U,A}$ sur $\mathbf{E}_q$. Ces fibrés sont tous méromorphiquement isomorphes entre eux. En découpant $\mathbf{C}^*$ en deux disques épointés en 0 et ∞, et, entre les deux, des couronnes topologiques contenant chacune un seul point de $Sing(A)$, on factorise ϕ en des composantes ayant chacune une seule singularité. On définit ainsi un groupoïde de Galois pour chacun des deux disques (ce sont les groupoïdes locaux en $0, \infty$) et un pour chaque couronne ; et des morphismes galoisiens reliant chaque paire de groupoïdes consécutifs. Mais je n'ai pas encore trouvé comment aller au delà.

2.2 La filtration canonique par les pentes

Le lemme d'Adams avait été exhumé par Marotte et Zhang [MZ00] après un long sommeil. Ils l'utilisent comme outil de factorisation d'opérateurs aux q-différences, alors que Birkhoff et Guenter [BG41] préfèrent trigonaliser des systèmes. La version la plus intrinsèque s'exprime en termes de filtrations.

Attention. Depuis les articles [5, 6, 7, 8], nous avons changé de convention en ce qui concerne les pentes : les nouvelles sont les opposées des anciennes. Dans ce mémoire, les résultats de [3, 4] sont présentés sous une forme adaptée aux nouvelles conventions.

2.2.1 Le polygone de Newton

C'est le premier invariant formel. Notons pour simplifier $\mathcal{D}$ l'anneau $\mathcal{D}_{q,\mathbf{C}((z))}$ des opérateurs aux q-différences formels. Le *polygone de Newton* de $P := \sum a_i \sigma_q^i f \in \mathcal{D}$ est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble $\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \mid j \geq v_0(a_i)\}$, où v_0 désigne la valuation z-adique de $\mathbf{C}((z))$. On le considère comme défini à une translation près (effet de la multiplication de P par un inversible). Si l'on note $(r_1,d_1),\ldots,(r_k,d_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$ les vecteurs qui composent la frontière inférieure, de pentes $\mu_1 := \dfrac{d_1}{r_1} < \cdots < \mu_k := \dfrac{d_k}{r_k} \in \mathbf{Q}$, il est plus commode de manier la *fonction de Newton*

$$r_P : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}, \mu_i \mapsto r_i \text{ (et nulle ailleurs).}$$

Les théorèmes 2.2.5 et 2.3.1 de [3] nous disent :

Théorème 2 *(i) On peut mettre tout module aux q-différences sous la forme $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ (lemme du vecteur cyclique et euclidianité de $\mathcal{D}$) et $N(P)$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de M : c'est le polygone de Newton de M, noté $N(M)$. On note r_M la fonction de Newton associée.*
(ii) Pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, on a $r_M = r_{M'} + r_{M''}$.
(iii) Si $M = M_1 \otimes M_2$, on a $r_M(\mu) = \sum\limits_{\mu_1+\mu_2=\mu} r_{M_1}(\mu_1) r_{M_2}(\mu_2)$. Si $M' = M^\vee$ (dual), on a $r_{M'}(\mu) = r_M(-\mu)$.

Modules purs. Un module aux q-différences est dit *pur isocline* s'il n'a qu'une seule pente et *pur* s'il est somme directe de modules purs isoclines. Un module pur isocline de pente nulle est simplement un module fuchsien : nous connaissons donc leur classification et leur théorie de Galois, qui sont les mêmes sur $\mathbf{C}(\{z\})$ et sur $\mathbf{C}((z))$.

Un module pur isocline de pente μ entière est de la forme $(K^n, \Phi_{z^\mu A})$, où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Leur classification en découle immédiatement (c'est la même sur $\mathbf{C}(\{z\})$ et sur $\mathbf{C}((z))$). Par exemple, ils forment une catégorie tannakienne de groupe de Galois :

$$G_{p,1}^{(0)} = \mathbf{C}^* \times G_f^{(0)}.$$

(L'indice $p,1$ signifie "pur de pente entière".) La composante $\mathbf{C}^*$ traduit la graduation par les pentes.

Les modules purs de pentes rationnelles arbitraires ont été classifiés par M. van der Put et M. Reversat dans [vdPR07]. Leur classification s'apparente à celle des fibrés vectoriels sur une courbe elliptique par Atiyah, qu'elle permet de retrouver de manière simple et élégante. Il serait utile d'utiliser ce travail pour compléter nos résultats sur la classification et la théorie de Galois - mais cela n'a pas encore été fait à ma connaissance.

2.2.2 La filtration

Son existence repose sur le lemme d'Adams. En principe, il permet d'extraire des facteurs $z^\mu \sigma_q - u$ où μ est rationnel, et exige donc une ramification de la variable, mais on se débarrasse *a posteriori* de ce problème par un argument de descente galoisienne. Nous réunissons ici en un seul énoncé les cas formel et analytique (théorèmes 3.1.6 et 3.1.7 de [3]).

Théorème 3 *(i) Tout module aux q-différences M sur* $\mathbf{C}(\{z\})$ *admet une unique* filtration par les pentes *:*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M,$$

telle que les $P_i := M_i/M_{i-1}$ sont purs isoclines de pentes μ_i strictement croissantes.
(ii) Tout module aux q-différences M sur $\mathbf{C}((z))$ *admet une unique décomposition en somme directe de modules P_i purs isoclines de pentes μ_i strictement croissantes.*

Naturellement, les μ_i sont les pentes du polygone de Newton et le rang de P_i est r_i. De plus, la filtration (resp. la graduation) est fonctorielle. On peut donc définir un foncteur gradué associé $M \rightsquigarrow \mathrm{gr} M$. L'énoncé suivant condense les théorèmes 3.3.3 et 3.3.4 de [3]).

Théorème 4 *(i) Le foncteur gradué associé est* $\mathbf{C}$*-linéaire exact de la catégorie des modules aux q-différences sur* $\mathbf{C}(\{z\})$ *dans la catégorie des modules purs. C'est une rétraction de l'inclusion.*
(ii) Il est fidèle et $\otimes$-compatible.

(Naturellement, l'extension de gr à la catégorie formelle est isomorphe au foncteur identité.) Ces propriétés sont similaires à celles axiomatisées par Saavedra dans "Catégories tannakiennes" et opposées à celles étudiées par Y. André dans [And02]. Depuis, ce dernier a systématisé dans [And08] la taxonomie des filtrations par les pentes. En fait, une fois démontré (à l'aide du lemme d'Adams) que tout module non pur est instable (terminologie de *loc.cit.*), tout le reste peut s'en déduire par des arguments formels.

Remarques.

1. La différence entre la catégorie analytique et la catégorie formelle tient au scindage d'une filtration. On peut dès à présent prévoir que le phénomène de Stokes se lira dans les Ext (chapitre 3).
2. Le dernier théorème permet de prévoir la structure du groupe de Galois comme produit semi-direct du groupe pur par le "groupe de Stokes" (chapitre 4).

2.2.3 Filtration et fibrés

Le fibré associé à un module pur isocline de pente entière $(K^n, \Phi_{z^\mu A})$, où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, est le produit tensoriel d'un fibré en droite de degré μ par un fibré plat. Appelons *élémentaire* un tel fibré. Le fibré associé à un module M à pentes entières admet donc une filtration :

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_M,$$

telle que chaque quotient $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ est un fibré élémentaire. De tels fibrés filtrés forment de manière évidente une catégorie, et l'on prouve [7, 2.4] :

Théorème 5 *Le foncteur* $M \rightsquigarrow (0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_M)$ *est exact,* $\otimes$*-compatible et pleinement fidèle.*

La plénitude vient du fait que l'on relève maintenant des matrices holomorphes sur $\mathbf{C}^*$ dont la structure triangulaire par blocs traduit des propriétés asymptotiques en 0 qui impliquent la méromorphie. Ces propriétés s'apparentent à celles utilisées dans [4, 8].

Remarque. Dans [vdPR07], van der Put et Reversat munissent $\mathcal{F}_M$ d'une connexion ∇_M construite de manière *ad hoc* à partir de la filtration de M. Malheureusement, le foncteur $M \rightsquigarrow (\mathcal{F}_M, \nabla_M)$ n'est pas pleinement fidèle.

Lien avec la filtration de Harder-Narasimhan. C'est une question naturelle, mais je n'ai pas encore de réponse très claire, sinon que ces filtrations ne se correspondent pas [12]. Les calculs suivants sont dûs à A. Granier [Gra05].

Exemples.

1. Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & z \end{pmatrix}$, où $u \in \mathbf{C}(\{z\})$. Le module $M := (\mathbf{C}(\{z\})^2, \Phi_A)$ admet les pentes $0, 1$, donc une filtration à deux crans. Il y a deux cas : soit M est pur et $\mathcal{F}_M$ décomposé (si $u \in \mathbf{C}$, cela équivaut à $u = 0$) ; soit M est indécomposable et $\mathcal{F}_M$ stable (et sa filtration n'a qu'un cran, contrairement à celle de M).
2. Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}$, où $u \in \mathbf{C}(\{z\})$. Le module $M := (\mathbf{C}(\{z\})^2, \Phi_A)$ admet les pentes $0, 2$, donc une filtration à deux crans. Il y a deux cas : soit M est pur et $\mathcal{F}_M$ décomposé ; soit M est indécomposable et $\mathcal{F}_M$ semi-stable.

Des calculs menés avec L. Di Vizio sont en cours pour tenter de tirer cela au clair. On peut cependant remarquer que l'on ne compare pas vraiment deux objets analogues. En effet, si l'on adopte les conventions de Y. André dans [And08], on doit conserver la définition des pentes du côté des fibrés, mais prendre la définition opposée du côté des modules aux q-différences (les polygones de Newton de *loc. cit.* sont concaves). Une comparaison significative serait donc celle-ci : on prend la définition opposée des pentes du côté des q-différences [13], et l'on cherche à déterminer quelle est la filtration correspondante (*i.e.* quels sont les objets stables). J'ignore la réponse.

12. Comme me l'a fait remarquer Yves André, elles se correspondent tout de même dans le cas de modules purs ; par ailleurs, les fibrés sur une courbe elliptique sont (non canoniquement) purs pour la filtration de Harder-Narasimhan.
13. On ne peut pas le faire du côté des fibrés, car on sortirait de l'axiomatique de [And08].

3 Classification analytique locale

Après l'article programmatique [BG41] de Birkhoff et Guenter, apparemment tombé dans l'oubli jusqu'à ce que C. Zhang l'exhume, le premier progrès dans la direction de la classification analytique a été l'obtention de théorèmes d'indice par J.-P. Bézivin [Béz92a] et J.-P. Ramis [Ram92], qui nous serviront d'ailleurs pour le cas de base de deux pentes.

Nous avons vu que la classification formelle se ramène à celle des modules purs ; et que, pour ces derniers, classifications formelle et analytique coïncident. Notre formulation du problème de la classification analytique à l'intérieur d'une classe formelle est inspirée du livre Babbitt et Varadarajan [BV89] : on se donne un module $\hat{M}_0$ sur $\mathbf{C}((z))$ et l'on veut classifier les couples (M,ϕ), où M est un module sur $\mathbf{C}(\{z\})$ et ϕ un isomorphisme du formalisé $\hat{M}$ sur $\hat{M}_0$. (La raison en est que la structure ainsi enrichie est plus rigide et donne lieu à un meilleur espace de modules, voir l'exemple donné en 3.1.1.)

Nous savons que la connaissance de la classe formelle de M est équivalente à celle du module pur gr$M$. Notant $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$, où $P_1,\ldots,P_k$ sont purs isoclines de pentes $\mu_1 < \cdots < \mu_k \in \mathbf{Q}$ et de rangs $r_1,\ldots,r_k \in \mathbf{N}^*$, on posera :

$$\mathcal{F}(M_0) = \mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k) := \frac{\{(M,u) \,|\, u : \mathrm{gr}M \simeq M_0\}}{(M,u) \sim (M',u') \Leftrightarrow \exists f : M \to M' \ : \ u = u' \circ \mathrm{gr} f}.$$

Dans [8], avec Jean-Pierre Ramis et Changgui Zhang, nous avons attaqué ce problème de trois manières : algébrique, géométrique et analytique. Je présenterai les deux premières approches, mais, à la place de la troisième, je montrerai une alternative développée dans [4].

Remarque. Comme dans les articles cités de Bézivin et Ramis, notre travail comporte des précisions sur l'*interpolation q-Gevrey* des espaces de modules obtenus, mais je ne les énoncerai pas ici.

3.1 L'espace affine des classes analytiques isoformelles

Je ne connais pas de référence pour le problème général de la classification d'objets filtrés isogradués dans une catégorie abélienne : c'est pourtant un problème naturel d'algèbre homologique. Le cas "linéaire" ou "abélien" de filtrations à deux crans se ramène au calcul des extensions (et à des théorèmes d'indice) ; au delà, le problème n'est plus linéaire. Ainsi, l'espace $\mathcal{F}(P_1,P_2,P_3)$ est en bijection naturelle avec un ensemble de "classes d'extensions panachées" étudié par Daniel Bertrand [Ber01] : cet espace n'est pas simple, mais il est très structuré par des actions de groupes Ext.

3.1.1 Le cas “abélien” de deux pentes

Il est immédiat que $\mathcal{F}(P_1,P_2)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}(P_2,P_1)$, calculé au choix dans la catégorie des modules aux q-différences sur $\mathbf{C}(\{z\})$ ou dans celle des $\mathcal{D}_{q,\mathbf{C}(\{z\})}$-modules à gauche [14]. Comme dans le cas des modules différentiels, on l'obtient à l'aide d'un complexe des solutions : [9, théorème 2.1] et [8, théorème 2.10].

Théorème 6 *Soient $M := (E,\Phi)$, $N := (V,\Psi)$, deux modules aux q-différences, $\mathcal{L}(E,F)$, resp. $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$, les espaces d'applications linéaires, resp. σ_q-linéaires. On définit :*

$$t_{\Phi,\Psi} : \begin{cases} \mathcal{L}_K(E,F) \to \mathcal{L}_\sigma(E,F), \\ f \mapsto \Psi \circ f - f \circ \Phi \end{cases}$$

Cette application $\mathbf{C}$-linéaire a pour conoyau $Ext(M,N)$. (Son noyau est bien entendu $Hom(M,N)$.)

On est donc ramené à des calculs d'indice. À l'aide de [Béz92a], ou par des calculs directs basés sur la transformation de q-Borel (voir l'exemple plus loin), on obtient [8, théorème 2.15] :

Théorème 7 *L'espace vectoriel $\mathcal{F}(P_1,P_2) = Ext(P_2,P_1)$ est de dimension $r_1 r_2(\mu_2-\mu_1)$.*

Exemple. Si M_0 est décrit par la matrice $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & az \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{C}^*$, tout module analytique qui lui est formellement équivalent peut être sont décrit par une matrice de la forme $A_u := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & az \end{pmatrix}$, où $u \in \mathbf{C}(\{z\})$. Notons M_u ce module. Cette écriture intègre le choix d'un isomorphisme de $\mathrm{gr} M_u$ sur M_0. Les modules M_u, M_v sont isomorphes au sens rigide ci-dessus si, et seulement s'il existe $f \in \mathbf{C}(\{z\})$ tel que $F := \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $F[A_u] = A_v$, c'est-à-dire :

$$az\sigma_q f - f = v - u =: w.$$

Cette équation admet une unique solution formelle $\hat{f}$. Posant $w = \sum w_n z^n$, $f = \sum f_n z^n$, on voit que $\hat{f}$ est analytique si, et seulement si $\mathcal{B}_{q,1} w(c^{-1}) = 0$, où l'on a introduit la *transformée de q-Borel* :

$$\mathcal{B}_{q,1} f(\xi) := \sum q^{-n(n-1)/2} f_n \xi^n$$

On en déduit que M_u est isomorphe à un unique M_v tel que $v \in \mathbf{C}$, obtenu en prenant $v := \mathcal{B}_{q,1} u(a^{-1})$: ici, l'espace des classes analytiques isoformelles est $\mathbf{C}$.
D'autrepart, pour que M_u, M_v soient isomorphes au sens non rigide, il faut, et il suffit, que l'on puisse résoudre l'équation $az\sigma_q f - f = \beta v - \alpha u$, avec $f \in \mathbf{C}(\{z\})$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*$: l'espace des classes analytiques dans cette classe formelle est donc le quotient de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}^*$.

14. Tous les $\mathrm{Ext}^i, i \geq 2$ sont nuls, nous noterons $\mathrm{Ext} = \mathrm{Ext}^1$.

Transformation de q-Borel et dualité de Serre. La détermination de $\mathrm{Ext}(P_2,P_1)$ à l'aide du complexe des solutions revient à trouver un supplémentaire explicite à l'image, par un calcul de transformées de q-Borel qui généralise celui de l'exemple. On obtient ainsi un système de coodonnées sur $\mathrm{Ext}(P_2,P_1)$.
Mais l'on sait par ailleurs que $\mathrm{Ext}(P_2,P_1)$ s'identifie à $H^1(\mathbf{E}_q,\mathcal{F}_P)$, où $P := P_2^\vee \otimes P_1$. Un système de coordonnées sur ce H^1 est fourni par la dualité de Serre dès que l'on connait une base du H^0 (le fibré canonique est ici trivial). Or, on construit très facilement à l'aide de fonctions Theta une telle base explicite de $H^0(\mathcal{F}_P) = \mathrm{Hom}(P_2,P_1)$. Le calcul du système de coordonnées ainsi obtenu montre qu'il est directement lié au précédent ; les formules de passage sont données dans [7, lemme 3.6].

3.1.2 Le cas "unipotent" de k pentes

Il se dévisse en des cas à deux pentes selon le principe suivant. On a une surjection naturelle :

$$\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k) \to \mathcal{F}(P_1,\ldots,P_{k-1}),$$

dans laquelle la fibre en la classe de (M',u') s'identifie naturellement à $\mathrm{Ext}(P_k,M')$. On en déduit facilement une bijection non canonique :

$$\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k) \to \prod_{1\leq i<j\leq k} \mathrm{Ext}(P_j,P_i),$$

d'où le calcul heuristique de la dimension $\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} r_i r_j(\mu_j-\mu_i)$ de $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$. Pour rendre ce calcul plus naturel, il y a deux voies.

L'espace $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ est un schéma affine. La reformulation algébrique de la classification analytique isoformelle comme classification d'objets filtrés isogradués permet de définir un foncteur en $\mathbf{C}$-algèbres commutatives :

$$R \rightsquigarrow \mathcal{F}(P_1\otimes R,\ldots,P_k\otimes R);$$

(Cette ruse vient de [BV89], où elle est cependant bien plus difficile à mettre en œuvre !) On prouve alors [9, théorème 4.1], [8, théorème 2.19] :

Théorème 8 *Ce foncteur est représenté par un schéma affine de dimension* $\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} r_i r_j(\mu_j-\mu_i)$.

Coordonnées sur l'espace $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ Leur détermination repose sur une description matricielle. On représente respectivement M_0 et $(M,u : \mathrm{gr}M \simeq M_0)$ par des matrices :

$$A_0 := \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & B_k \end{pmatrix} \text{ et } A = A_U := \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & U_{i,j} & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & B_k \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où $B_i \in GL_{r_i}(\mathbf{C}(\{z\}))$ est pure isoclinique de pente μ_i et de rang r_i et où $U_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\}))$. Chaque Ext qui compose $\mathcal{F}(M_0)$ est le conoyau de l'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $U \mapsto (\sigma_q U)B_j - B_i U$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\}))$.

Dorénavant, nous supposerons les pentes entières : $\mu_1 < \cdots < \mu_k \in \mathbf{Z}$.

(Cette convention vaut dans toute la suite de ce mémoire.)

On peut donc prendre B_i sous la forme $z^{\mu_i} A_i$, $A_i \in GL_{r_i}(\mathbf{C})$. Alors la transformationtion de q-Borel fournit une projection explicite sur le supplémentaire $\mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\})_{\mu_i,\mu_j})$ de l'image, où l'on note $\mathbf{C}(\{z\})_{\mu_i,\mu_j}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\sum\limits_{\mu_i \leq d < \mu_j} \mathbf{C} z^d$. On en déduit [8, théorème 2.23] :

Théorème 9 *Tout élément de $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ admet un unique représentant $(\mathbf{C}(\{z\})^n, \Phi_{A_U})$, où $U_{i,j} \in Mat_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\})_{\mu_i,\mu_j})$. C'est la* forme normale de Birkhoff-Guenter.

Remarques.

1. Il découle de notre choix des intervalles pour les exposants que l'on obtient une sous-catégorie tannakienne (essentielle) de la catégorie des modules à pentes entières sur $\mathbf{C}(\{z\})$. Cette sous-catégorie joue un rôle analogue à la sous-catégorie des équations à coefficients constants dans la preuve du théorème 1.
2. Si l'on ne suppose pas les pentes entières, la classification de van der Put et Reversat [vdPR07] permet tout de même de définir des formes normales pour les B_i, mais je n'ai pas su en déduire des descriptions explicites des $\mathrm{Ext}(P_j,P_i)$.

3.2 Les q-analogues des théorèmes de Birkhoff-Malgrange-Sibuya

Les théorèmes classiques de Birkhoff-Malgrange-Sibuya auxquels il est fait allusion viennent sous deux espèces : une version "abstraite" qui exprime en termes cohomologiques l'obstruction à recoller des développements asymptotiques sectoriels d'une série formelle arbitraire ; une version "concrète" adaptée aux solutions formelles d'une équation différentielle. Nous nous inspirons ici de la démonstration qu'en ont donné J. Martinet et J.-P. Ramis dans [MR82]. Nous surnommerons “théorèmes de q-BMS” leurs q-analogues.

Rappelons que les pentes sont supposés entières : $\mu_1 < \cdots < \mu_k \in \mathbf{Z}$. La classe formelle étant fixée (avec son polygone de Newton), on peut donc représenter respectivement M_0 et $(M, u : \mathrm{gr}M \simeq M_0)$ par des matrices :

$$(4) \qquad A_0 := \begin{pmatrix} z^{\mu_1}A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k}A_k \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} z^{\mu_1}A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & U_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k}A_k \end{pmatrix},$$

où $A_i \in GL_{r_i}(\mathbf{C})$ et où $U_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}(\{z\})_{\mu_i,\mu_j})$. D’après 2.2.2, il existe un unique isomorphisme formel de A_0 dans A de la forme :

$$(5) \qquad \hat{F} := \begin{pmatrix} I_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_{r_k} \end{pmatrix}, \text{ avec } (F_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k} \in \prod_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{Mat}_{r_i,r_j}(\mathbf{C}((z))),$$

ce que nous abrègerons en $\hat{F} \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z)))$. (Donc, $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe algébrique unipotent de GL_n.) Nous noterons $\hat{F}_A$ cet isomorphisme formel. Si de plus $(M', u' : \mathrm{gr}M' \simeq M_0)$ est représenté par A', la relation d’équivalence se traduit ainsi :

$$A \sim A' \Longleftrightarrow (\hat{F}_A)^{-1}\hat{F}_{A'} \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\})).$$

On en déduit une bijection naturelle :

$$\mathcal{F}(M_0) \simeq \mathfrak{G}^{A_0}(\mathbf{C}((z)))/\mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\})), \text{ où } \mathfrak{G}^{A_0}(\mathbf{C}((z))) := \{\hat{F} \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z))) \,|\, \hat{F}[A_0] \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\}))\}.$$

On voit donc poindre un problème de resommation.

3.2.1 Asymptotique de Poincaré q-adaptée

Selon une idée de J.-L. Martins [Mar02], une théorie asymptotique est liée à l’action d’un semi-groupe agissant sur un espace, et donne lieu à un faisceau sur l’horizon, *i.e.* le quotient : classiquement, le semi-groupe $\Sigma := e^{\mathbf{R}_-}$ agit sur $\mathbf{C}^*$ avec pour horizon $\mathbf{C}^*/\Sigma = S^1$ (le cercle des directions). Pour nous, le semi-groupe est $\Sigma := q^{-\mathbf{N}}$ et l’horizon est $\mathbf{C}^*/\Sigma = \mathbf{E}_q$, *dont les points peuvent donc être considérés comme des directions*. J. Roques a étudié en détail dans [Roq07] l’espace obtenu en recollant $\mathbf{C}^*$ avec ses horizons en 0 et ∞.

Soient $V \subset \mathbf{E}_q$ un ouvert et $U := p^{-1}(V) \subset \mathbf{C}^*$ son image réciproque. Appelons *sous-ensemble strict de* U tout $q^{-\mathbf{N}}K \subset U$, où K est compact. Nous noterons :

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(V) &:= \{f \in O(U) \,|\, f \text{ est bornée sur tout sous-ensemble strict de } U\},\\
\mathscr{A}(V) &:= \{f \in O(U) \,|\, \exists \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbf{C}[[z]] \;:\; \forall N \in \mathbf{N}\,,\; z^{-N}(f - \sum_{0\leq n<N} a_n z^n) \in \mathscr{B}(V)\}.
\end{aligned}$$

Ce sont des faisceaux sur $\mathbf{E}_q$. Si le développement asymptotique $\sum a_n z^n$ de $f \in O(U)$ existe (au sens ci-dessus), il est unique, et nous avons un morphisme surjectif de faisceaux :

$$\mathscr{A} \twoheadrightarrow \mathbf{C}[[z]], \text{ (faisceau constant).}$$

La surjectivité est le q-analogue du théorème de Borel-Ritt, [8, théorème 3.4]). Le noyau de ce morphisme est le faisceau $\mathscr{A}_0$ des fonctions plates.

3.2.2 Le premier théorème de q-BMS

Nous introduisons maintenant un faisceau de groupes sur $\mathbf{E}_q$, le faisceau des matrices infiniment tangentes à l'identité :

$$\Lambda_I := (I_n + \mathrm{Mat}_n(\mathscr{A}_0)) \cap \mathrm{GL}_n(\mathscr{A}).$$

D'après le q-analogue de Borel-Ritt, tout $\hat{g} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}[[z]])$ admet des représentants g_V sur $p^{-1}(V)$ pour des ouverts V recouvrant $\mathbf{E}_q$, et les $g_V^{-1} g_{V'}$ forment alors un cocycle de Λ_I pour ce recouvrement. On démontre alors le premier théorème de q-BMS [8, théorème 3.14] :

Théorème 10 *La construction ci-dessus fournit un isomorphisme :*

$$GL_n(\mathbf{C}[[z]])/GL_n(\mathbf{C}\{z\}) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I).$$

Plus généralement, pour tout sous-groupe algébrique G de GL_n, on a un isomorphisme :

$$G(\mathbf{C}[[z]])/G(\mathbf{C}\{z\}) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I^G), \textit{ où l'on note } \Lambda_I^G := \Lambda_I \cap G(\mathscr{A}).$$

La méthode est celle de [MR82]. Elle utilise le théorème de Newlander-Niremberg, et, pour cela, l'existence d'un lien entre l'asymptotique q-adaptée et les conditions de Whitney [8, proposition 3.3].

3.2.3 Le deuxième théorème de q-BMS

On fixe A_0, M_0 comme ci-dessus. Il n'est pas difficile de voir que $\mathfrak{G}^{A_0}(\mathbf{C}((z)))/\mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\})) = \mathfrak{G}^{A_0}(\mathbf{C}[[z]])/\mathfrak{G}(\mathbf{C}\{z\})$. Pour appliquer le premier théorème de q-BMS, on introduit le *faisceau des automorphismes de M_0 infiniment tangents à l'identité* :

$$\Lambda_I(M_0) := \Lambda_I^{\mathfrak{G}} \cap \mathrm{Aut}(M_0).$$

On démontre alors le deuxième théorème de q-BMS [8, théorème 3.15] :

Théorème 11 *L'isomorphisme précédent induit un isomorphisme :*

$$\mathcal{F}(M_0) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M_0)).$$

Par cela, il faut renforcer le q-analogue de Borel-Ritt en un théorème d'existence des solutions asymptotiques. Dans notre article commun, c'est le théorème 4.38, et il est déduit d'une théorie fine de l'asymptotique et de la sommation q-Gevrey développée par C. Zhang ces dix dernières années [Zha99, Zha02, Zha05, Zha06]. En effet, écrivant $F \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z)))$ avec les notations de (5), tout coefficient $\sum f_m z^m$ de $F_{i,j}$ vérifie l'estimation q-Gevrey :

$$\exists C, D > 0 \;:\; \forall m\,,\; |f_m| \leq BC^m\, |q|^{m^2/2(\mu_j - \mu_i)}\,.$$

(Ce type d'estimation est déjà présent dans [Béz92a, Ram92].)

3.2.4 Sommation algébrique

Cependant, j'ai mis au point dans [4] une approche alternative, moins puissante mais plus simple, que je vais exposer dans le reste de ce chapitre. Elle fournit un outil efficace pour comprendre le faisceau de Stokes et aussi la théorie de Galois, et se rattache plus directement à l'ensemble de mon travail. Je vais d'abord l'illustrer sur un exemple. L'idée est d'utiliser une "fausse variation des constantes" (idée et terminologie dûes à C. Zhang) [15].

Exemple. Soient M_0, M_u décrits par les matrices $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & az^d \end{pmatrix}$ et $A_u := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & az^d \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{C}^*$, $d \in \mathbf{N}^*$ et $u \in \mathbf{C} + \cdots + \mathbf{C}z^{d-1}$. Les modules M_0, M_u sont isomorphes (au sens rigide) si, et seulement s'il existe $f \in \mathbf{C}(\{z\})$ tel que :

$$az^d \sigma_q f - f = u.$$

Comme A_u est en forme normale de Birkhoff-Guenter, cela n'est possible que si $u = 0$ et l'on a alors $f = 0$. Dans tous les cas, il existe une unique solution formelle $\hat{f} \in \mathbf{C}[[z]]$. Mais il existe des solutions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$. En effet, posant $f = \dfrac{g}{\theta_c^d}$, où l'on a noté $\theta_c(z) := \theta(z/c)$, on est ramené à résoudre :

$$ac^d \sigma_q g - g = u\theta_c^d \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*).$$

Un développement en série de Laurent montre que cette équation admet une unique solution $g \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ pourvu que $ac^d \notin q^{\mathbf{Z}}$. Dans ce cas, il existe une unique solution f méromorphe sur $\mathbf{C}^*$, dont tous les pôles sont situés sur la q-spirale logarithmique discrète $[-c; q] := (-c)q^{\mathbf{Z}}$ et sont de multiplicité $\leq d$. Cette condition ne dépend que de l'image $\overline{c} := p(c) \in \mathbf{E}_q$, et la solution correspondante peut être notée $f = f_{\overline{c}}$ et considérée comme "resommation de $\hat{f}$ dans la direction $\overline{c}$" ;

15. Rappelons que les pentes μ_i utilisées dans ce mémoire sont les opposées de celles de [4].

et il y a un nombre fini de directions de resommation interdites.

Dans le cas général, reprenant les notations (4), toute solution F de $F[A_0] = A_U$ vérifie $\sigma_q F = A_U F A_0^{-1}$; si F est méromorphe au voisinage de 0, ses pôles s'organisent donc en (germes de) q-spirales, et cela a un sens de parler de "diviseur polaire de $F_{i,j}$ sur $\mathbf{E}_q$" ; la notation $\operatorname{div}_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -d[\overline{-c}]$ signifie que tous les pôles de $F_{i,j}$ sont situés sur la q-spirale $[-c;q]$ et sont de multiplicité $\leq d$. On démontre alors [4, théorème 3.7] :

Théorème 12 *Il existe un ensemble fini explicite $\Sigma_{A_0} \subset \mathbf{E}_q$ tel que, pour tout $\overline{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$, et pour toute matrice A_U :*

$$\exists ! F \in \mathfrak{G}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*, 0)) \; , \; \Big(F[A_0] = A_U \text{ et, pour } 1 \leq i < j \leq k, div_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)[\overline{-c}] \Big).$$

Notons $F_{\overline{c}}$ cette solution, que l'on peut considérer comme "resommation de $\hat{F}_A$ dans la direction $\overline{c}$". Les $F_{\overline{c},\overline{d}} := F_{\overline{c}}^{-1} F_{\overline{d}}$ forment un cocycle de $\Lambda_I(M_0)$ pour le recouvrement $\mathfrak{U}_{A_0}$ de $\mathbf{E}_q$ formé des ouverts de Zariski $V_{\overline{c}} := \mathbf{E}_q \setminus \{\overline{c}\}$, $\overline{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$. De plus :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{E}_q}((F_{\overline{c},\overline{d}})_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)([\overline{-c}] + [\overline{-d}]).$$

Appelons *privilégié* un tel cocycle et notons $Z^1_{pr}(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(M_0))$ l'espace des cocycles privilégiés. La proposition 3.17 et le théorème 3.18 de *loc. cit.* disent alors :

Théorème 13 *Le calcul des cocycles privilégiés par "sommation algébrique" fournit des isomorphismes :*

$$\mathcal{F}(M_0) \simeq Z^1_{pr}(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(M_0)) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M_0)).$$

Remarques.

1. Les $F_{\overline{c}}$ forment une famille d'isomorphismes locaux de $\mathcal{F}_{M_0}$ sur $\mathcal{F}_M$ et le cocycle correspondant à $\mathcal{F}_M$ envoie (par torsion) les éléments de $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M_0))$ sur ceux de $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M))$.
2. Toutes les "sommations" sont faites ici avec diviseurs polaires concentrés en un point. En fait, aussi bien la "sommation algébrique" de [4] que la sommation q-Gevrey de [8] sont possibles avec des diviseurs polaires beaucoup plus généraux, mais nous n'avons pas encore réussi à tirer parti de cette flexibilité.

3.2.5 Dévissage du faisceau de Stokes

La preuve complète du deuxième théorème de q-BMS par voie algébrique passe par un argument de cohomologie non abélienne, qui fonctionne parce que le faisceau $\Lambda_I(M_0)$ peut être dévissé par des fibrés (ce qui explique sans doute *a posteriori* le succès de ce type de calcul simple). Pour être précis, remarquons d'abord que tout automorphisme de M_0 de la forme (5) est infiniment tangent à l'identité : en effet, la composante $F_{i,j}$ vérifie $\sigma_q F_{i,j} = z^{-t} A_i F_{i,j} A_j^{-1}$, où $t := \mu_j - \mu_i \in \mathbf{N}^*$.

Elle décroit donc comme θ^{-t} (mais pas plus vite) sur tout ouvert $q^{-\mathbf{N}}$-invariant où elle est holomorphe. Nous dirons qu'elle est *t-plate*.

Notons $\Lambda_I^t(M_0)$ le sous-faisceau de $\Lambda_I(M_0)$ formé des automorphismes F tels que $F - I_n$ est t-plat. Il revient au même de dire que les $F_{i,j}$ tels que $\mu_j - \mu_i < t$ (donc assez proches de la diagonale) sont nuls. On a donc un faisceau de sous-groupes invariants. De plus (propositions 4.1 et 4.2 de *loc. cit.*) :

Théorème 14 *(i) L'algèbre de Lie $\lambda_I(M_0)$ de $\Lambda_I(M_0)$ est la somme directe des $\lambda_I^{(t)}(M_0)$, qui sont les fibrés associés aux modules purs isoclines $\bigoplus_{\mu_j - \mu_i = t} Hom(P_j, P_i)$.*
(ii) On a des isomorphismes :

$$\frac{\Lambda_I^t(M_0)}{\Lambda_I^{t+1}(M_0)} \simeq \lambda_I^{(t)}(M_0).$$

Ainsi, $\Lambda_I(M_0)$ peut être reconstruit par une suite d'extensions centrales par des fibrés élémentaires :

$$0 \to \lambda_I^{(t)}(M_0) \to \frac{\Lambda_I(M_0)}{\Lambda_I^{t+1}(M_0)} \to \frac{\Lambda_I(M_0)}{\Lambda_I^t(M_0)} \to 1.$$

Remarque. Il serait alors naturel de reproduire *ici* la "ruse" déjà évoquée de Babbitt et Varadarajan [BV89, II §2] (que ces derniers attribuent à Deligne).

4 Théorie de Galois et correspondance de Riemann-Hilbert

4.1 Structure du groupe de Galois

Notons $\mathscr{E}^{(0)}$ la catégorie des équations (ou modules) aux q-différences sur $\mathbf{C}(\{z\})$: c'est une catégorie tannakienne neutre. Pour tout M de $\mathscr{E}^{(0)}$, notons $\mathcal{F}_M$ le fibré associé sur $\mathbf{E}_q$ et $\tilde{F}_M := p^*\mathcal{F}_M$ son pullback sur $\mathbf{C}^*$, un fibré trivial équivariant. Pour tout point-base $a \in \mathbf{C}^*$, on a un foncteur fibre :

$$\omega_a^{(0)} : M \rightsquigarrow (\tilde{F}_M)_a.$$

Pratiquement, on se restreindra à la sous-catégorie tannakienne $\mathscr{E}_1^{(0)}$ des modules à pentes entières. On peut alors se restreindre à la sous-catégorie équivalente des modules décrits par une matrice A en forme normale de Birkhoff-Guenter, et notre foncteur admet la description suivante :

$$(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))) \rightsquigarrow \mathbf{C}^n, \text{ et } (F : A \to B) \rightsquigarrow F(a),$$

qui a un sens car un morphisme entre deux matrices en forme normale de Birkhoff-Guenter est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$.

Soit $\mathscr{E}_p^{(0)}$ la sous-catégorie tannakienne des modules purs. Des propriétés du foncteur gr (théorème 4), on déduit une nouvelle famille de foncteurs fibres $\hat{\omega}_a^{(0)} := \omega_a^{(0)} \circ \mathrm{gr}$. On fixe un point-base $a \in \mathbf{C}^*$ arbitraire, et l'on définit le groupe de Galois comme :

$$G^{(0)} := Gal(\mathscr{E}^{(0)}) := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\hat{\omega}_a^{(0)}).$$

La difficulté n'est pas tant de trouver des foncteurs fibres que des éléments explicites du groupe de Galois. Nous produirons, par "sommation algébrique", de nombreux éléments de $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\hat{\omega}_a^{(0)}, \omega_a^{(0)})$, mais en restriction aux sous-catégories $\mathscr{E}_1^{(0)}$ et $\mathscr{E}_{p,1}^{(0)} := \mathscr{E}_p^{(0)} \cap \mathscr{E}_1^{(0)}$.

Rappelons que le groupe de Galois de $\mathscr{E}_{p,1}^{(0)}$ est :

$$G_{p,1}^{(0)} = \mathbf{C}^* \times G_f^{(0)}, \text{ où } G_f^{(0)} = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbf{Z}^{alg} \,|\, \gamma(q) = 1\} \simeq \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}, \mathbf{C}^*) \times \mathbf{C}.$$

La structure du groupe de Galois $G_1^{(0)}$ de $\mathscr{E}_1^{(0)}$ telle qu'elle découle des propriétés de la filtration par les pentes est donnée par [5, corollaire 3.4] :

Théorème 15 *Le noyau de $G_1^{(0)} \to G_{p,1}^{(0)}$ est un groupe prounipotent $\mathfrak{St}$, le* groupe de Stokes*, et l'on a une décomposition :*

$$G_1^{(0)} = \mathfrak{St} \rtimes G_{p,1}^{(0)}.$$

Plus précisément, si M et $M_0 := grM$ sont décrits par les matrices A, A_0 de (4)*, et si $\mathfrak{G}$ est le groupe décrit par* (5)*, on a :*

$$\mathfrak{St}(M) = \mathfrak{St}(A) \subset \mathfrak{G}(\mathbf{C}) \subset GL_n(\mathbf{C}).$$

Notant $\mathfrak{st}$ *l'algèbre de Lie de* $\mathfrak{St}$ *et* $\mathfrak{g}$ *celle de* $\mathfrak{G}$*, on a de même :*

$$\mathfrak{st}(M) = \mathfrak{st}(A) \subset \mathfrak{g}(\mathbf{C}) \subset Mat_n(\mathbf{C}).$$

4.2 Des opérateurs de Stokes galoisiens

On a défini au début de 3.2 l'isomorphisme formel $\hat{F}_A \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z)))$ et les isomorphismes méromorphes $F_{\overline{c}} \in \mathfrak{G}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ de A_0 vers A. Conformément à notre interprétation en termes de "resommation dans la direction $\overline{c} \in \mathbf{E}_q$", notons :

$$S_{\overline{c}}\hat{F}_A := F_{\overline{c}};$$

notons de plus :

$$S_{\overline{c},\overline{d}}\hat{F}_A := (S_{\overline{c}}\hat{F}_A)^{-1} S_{\overline{d}}\hat{F}_A,$$

donc un automorphisme méromorphe de A_0. Dans [5, §4.1], on montre que la formation de $S_{\overline{c}}\hat{F}_A$ est, sous certaines conditions de "non-résonnance" (que je ne détaillerai pas ici) fonctorielle et $\otimes$-compatible. On définit une partie dénombrable explicite $\tilde{\Sigma}(A_0) \subset \mathbf{E}_q$, liée à ces résonnances, et l'on prouve [5, théorème 4.3, corollaire 4.4] :

Théorème 16 *(i) Quels que soient* $\overline{c}, \overline{d} \in \mathbf{E}_q \setminus \tilde{\Sigma}(A_0)$ *et de plus distincts de* $\overline{-a}$ *(rappelons que a est un point-base arbitraire fixé), on a :*

$$S_{\overline{c},\overline{d}}\hat{F}_A \in \mathfrak{St}(A).$$

(ii) Fixons $\overline{c}_0 \in \mathbf{E}_q \setminus \tilde{\Sigma}(A_0)$ *distinct de* $\overline{-a}$ *et posons :*

$$LS_{\overline{c},a}\hat{F}_A := \log S_{\overline{c}_0,\overline{c}}\hat{F}_A.$$

Alors :

$$LS_{\overline{c},a}\hat{F}_A \in \mathfrak{st}(A).$$

En fait, on a plus : quitte à se restreindre à une certaine sous-catégorie tannakienne (encore définie par des conditions de résonnance), le foncteur $A \rightsquigarrow S_{\overline{c}}\hat{F}_A$ est élément de $\text{Iso}^{\otimes}(\hat{\omega}_a^{(0)}, \omega_a^{(0)})$, et le foncteur $A \rightsquigarrow LS_{\overline{c},a}\hat{F}_A$ est un élément "Lie-like" de $\text{End}^{\otimes}(\hat{\omega}_a^{(0)})$.

Il n'est pas très difficile de voir que les éléments ci-dessus, avec le groupe pur, engendrent le groupe de Galois. Mais il y en a beaucoup trop. Pour extraire l'information pertinente, on remarque que $LS_{\overline{c},a}\hat{F}_A$ est une fonction méromorphe de $\mathbf{E}_q$ dans $\mathfrak{st}(A)$, dont les pôles sont les directions de sommation interdites. Pour tout $\overline{c} \in \Sigma_{A_0}$, on note :

$$\dot{\Delta}_{\overline{c}}(A)$$

le résidu en $\overline{c}$ de cette fonction : en première approximation, nous le considérons comme une *q-dérivée étrangère*. On prouve alors [5, théorèmes 4.5 et 4.6] :

Théorème 17 *On a $\dot{\Delta}_{\overline{c}}(A) \in \mathfrak{st}(A)$. Plus précisément, $A \rightsquigarrow \dot{\Delta}_{\overline{c}}(A)$ (restreint à une catégorie convenable) est un élément "Lie-like" de $End^{\otimes}(\hat{\omega}_a^{(0)})$.*

La suite et fin de l'article [5] contient la preuve que, dans le cas de deux pentes, les $\dot{\Delta}_{\overline{c}}(A)$ forment un jeu complet d'invariants analytiques dans la classe formelle [5, théorèmes 4.8 et 4.9] : cela se fait par comparaison avec les invariants calculés par transformation de q-Borel.

Remarque. Si le calcul de résidu de la dualité de Serre est très proche du calcul de q-Borel, les invariants ci-dessus, calculés par résidus *en le paramètre $\overline{c}$* semblent nouveaux.

4.3 Génération du groupe de Stokes

Dans l'article [6] nous prouvons que les éléments trouvés sont générateurs et abordons le problème de leur "libération". On fait agir la composante $\mathbf{C}^*$ de $G_{p,1}^{(0)}$ (le "tore Theta", par analogie avec les "tores exponentiels") sur $\mathfrak{St}$ et donc sur $\mathfrak{st}$ par conjugaison. On a des décompositions :

$$\mathfrak{st} = \bigoplus_{\delta \geq 1} \mathfrak{st}^{\delta}, \quad \dot{\Delta}_{\overline{c}} = \bigoplus_{\delta \geq 1} \dot{\Delta}_{\overline{c}}^{\delta}.$$

De plus, pour A_0 donné, $\mathbf{C}^*$ agit sur $\mathfrak{G}$ et sur $\mathfrak{g}$ avec le poids $\mu_j - \mu_i$ sur chaque bloc (i, j). On a alors une décomposition :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\delta \geq 1} \mathfrak{g}^{\delta},$$

et :

$$\dot{\Delta}_{\overline{c}}^{\delta}(A) \in \mathfrak{st}^{\delta}(A) \subset \mathfrak{g}^{\delta}(\mathbf{C}).$$

Appelons *groupe de monodromie sauvage* le groupe engendré par les $\dot{\Delta}_{\overline{c}}$. La première forme du théorème de densité est la suivante [6, théorème 3.5] :

Théorème 18 *Le groupe de monodromie sauvage et $G_{p,1}^{(0)}$ engendrent $G_1^{(0)}$ en tant que groupe algébrique.*

Une variante plus fonctorielle est la suivante. On considère la catégorie $\mathscr{E}'$ dont les objets sont les couples $\left(A_0, (D_{\overline{c}}^{\delta})_{\delta,\overline{c}}\right)$, où la famille des $D_{\overline{c}}^{\delta} \in \mathfrak{g}^{\delta}(\mathbf{C})$ est indexée par $\mathbf{N}^* \times \mathbf{E}_q$. Les morphismes et les constructions tensorielles sont définis de façon naturelle. Alors [6, théorème 3.8] :

Théorème 19 *Le foncteur $A \rightsquigarrow \left(A_0, (\dot{\Delta}_{\overline{c}}^{\delta}(A))_{\delta,\overline{c}}\right)$ de $\mathscr{E}_1^{(0)}$ dans $\mathscr{E}'$ est exact, $\otimes$-compatible et pleinement fidèle.*

On donne ensuite [6, théorème 3.16, corollaire 3.17] une description de l'image essentielle et un algorithme de reconstruction. Mais ces derniers énoncés, pas très satisfaisants, sont transitoires Dans un article en préparation avec J.-P. Ramis, nous montrons comment utiliser l'action de la composante semi-simple de $G_f^{(0)}$ pour décomposer les dérivées étrangères en des facteurs libres. La description obtenue est beaucoup plus claire et donne l'espoir de pouvoir attaquer le problème inverse.

Références

[Ada31] C. R. Adams. Linear q-difference equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37(6) :361–400, 1931.

[Ada29] C. Raymond Adams. On the linear ordinary q-difference equation. *Ann. of Math. (2)*, 30(1-4) :195–205, 1928/29.

[ADV04] Yves André and Lucia Di Vizio. q-difference equations and p-adic local monodromy. *Astérisque*, 296 :55–111, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[And01] Yves André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(5) :685–739, 2001.

[And02] Yves André. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :285–317, 2002.

[And04] Yves André. Galois representations, differential equations, and q-difference equations : sketch of a p-adic unification. *Astérisque*, 296 :43–53, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[And08] Yves André. Slope filtrations. *preprint*, arXiv :0812.3921, 2008.

[Ber01] Daniel Bertrand. Extensions panachées et dualité, 2001.

[Béz92a] Jean-Paul Bézivin. Convergence des solutions formelles de certaines équations fonctionnelles. *Aequationes Math.*, 44(1) :84–99, 1992.

[Béz92b] Jean-Paul Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Math.*, 43(2-3) :159–176, 1992.

[BG41] George D. Birkhoff and Paul E. Guenther. Note on a canonical form for the linear q-difference system. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27 :218–222, 1941.

[BG96] Vladimir Baranovsky and Victor Ginzburg. Conjugacy classes in loop groups and G-bundles on elliptic curves. *Internat. Math. Res. Notices*, 15 :733–751, 1996.

[Bir13] George D. Birkhoff. The generalized riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. *Proc. Amer. Acad.*, 49 :521–568, 1913.

[BV89] D. G. Babbitt and V. S. Varadarajan. Local moduli for meromorphic differential equations. *Astérisque*, 169-170 :217, 1989.

[Car12] R.D. Carmichael. The general theory of linear q-difference equations. *Am. Jour. Math.*, 34 :147–168, 1912.

[CHS08] Zoé Chatzidakis, Charlotte Hardouin, and Michael F. Singer. On the definitions of difference Galois groups. In *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 1*, volume 349 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 73–109. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[DLR06] Éric Delabaere and Michèle Loday-Richaud, editors. *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, volume 14 of *Séminaires et Congrès [Seminars and Congresses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2006. Papers from the meeting held at the Université d'Angers, Angers, June 1–5, 2004.

[DMR07] Pierre Deligne, Bernard Malgrange, and Jean-Pierre Ramis. *Singularités irrégulières*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 5. Société Mathématique de France, Paris, 2007. Correspondance et documents. [Correspondence and documents].

[DR08] Anne Duval and Julien Roques. Familles fuchsiennes d'équations aux (q-)différences et confluence. *Bull. Soc. Math. France*, 136(1) :67–96, 2008.

[Duv03] Anne Duval. Séries de q-factorielles, opérateurs aux q-différences et confluence. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 12(3) :335–374, 2003.

[Duv04] Anne Duval. Confluence q-différence vers différence pour un système fuchsien. *Pacific J. Math.*, 217(2) :221–245, 2004.

[DV02] Lucia Di Vizio. Arithmetic theory of q-difference equations : the q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Invent. Math.*, 150(3) :517–578, 2002.

[DV04] Lucia Di Vizio. Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 615–675. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[DV08] Lucia Di Vizio. An ultrametric version of the Maillet-Malgrange theorem for nonlinear q-difference equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(8) :2803–2814, 2008.

[DV09] Lucia Di Vizio. Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$. *J. Noncommut. Geom.*, 3(1) :125–149, 2009.

[DVZ09] Lucia Di Vizio and Changgui Zhang. On q-summation and confluence. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(1) :347–392, 2009.

[Eti95] Pavel I. Etingof. Galois groups and connection matrices of q-difference equations. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 1(1) :1–9 (electronic), 1995.

[Fra63] Charles H. Franke. Picard-Vessiot theory of linear homogeneous difference equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :491–515, 1963.

[GR04] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 96 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by Richard Askey.

[Gra05] Anne Granier. Fibrés vectoriels et équations aux q-différences, 2005.

[Gra09] Anne Granier. *Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2009.

[HS08] Charlotte Hardouin and Michael F. Singer. Differential Galois theory of linear difference equations. *Math. Ann.*, 342(2) :333–377, 2008.

[JS96] Michio Jimbo and Hidetaka Sakai. A q-analog of the sixth Painlevé equation. *Lett. Math. Phys.*, 38(2) :145–154, 1996.

[Kri04] I. M. Krichever. Analytic theory of difference equations with rational and elliptic coefficients and the Riemann-Hilbert problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 59(6(360)) :111–150, 2004.

[Mar02] Jose-Luis Martins. *Lemme de Watson en dimension supérieure*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2002.

[Men04] Frédéric Menous. An example of nonlinear q-difference equation. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 13(3) :421–457, 2004.

[Men06] Frédéric Menous. An example of local analytic q-difference equation : analytic classification. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 15(4) :773–814, 2006.

[MR82] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 55 :63–164, 1982.

[MZ00] F. Marotte and C. Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(6) :1859–1890, 2000.

[Pra86] C. Praagman. Fundamental solutions for meromorphic linear difference equations in the complex plane, and related problems. *J. Reine Angew. Math.*, 369 :101–109, 1986.

[Pul08] Andrea Pulita. p-adic confluence of q-difference equations. *Compos. Math.*, 144(4) :867–919, 2008.

[Ram90] Jean-Pierre Ramis. Fonctions θ et équations aux q-différences. *Unpublished, Strasbourg*, 1990.

[Ram92] Jean-Pierre Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1) :53–94, 1992.

[Ram93] Jean-Pierre Ramis. Séries divergentes et théories asymptotiques. *Bull. Soc. Math. France*, 121(Panoramas et Syntheses, suppl.) :74, 1993.

[Roq07] Julien Roques. *Équations aux (q-)différences*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007.

[Roq08] Julien Roques. Galois groups of the basic hypergeometric equations. *Pacific J. Math.*, 235(2) :303–322, 2008.

[RZ02] Jean-Pierre Ramis and Changgui Zhang. Développement asymptotique q-Gevrey et fonction thêta de Jacobi. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :899–902, 2002.

[Tak07] Yoshitsugu Takei, editor. *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu [Series of Lecture Notes from RIMS], B2. Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto, 2007.

[Trj33] W. J. Trjitzinsky. Analytic theory of linear q-difference equations. *Acta Math.*, 61(1) :1–38, 1933.

[vdPR07] Marius van der Put and Marc Reversat. Galois theory of q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 16(3) :665–718, 2007.

[vdPS97] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Wei38] A. Weil. Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. Pures et Appl.*, 17 :47–87, 1938.

[Zha99] Changgui Zhang. Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(1) :vi–vii, x, 227–261, 1999.

[Zha01] Changgui Zhang. Sur la fonction q-gamma de Jackson. *Aequationes Math.*, 62(1-2) :60–78, 2001.

[Zha02] Changgui Zhang. Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples. In *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 309–329. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[Zha03] Changgui Zhang. Sur les fonctions q-Bessel de Jackson. *J. Approx. Theory*, 122(2) :208–223, 2003.

[Zha05] Changgui Zhang. Remarks on some basic hypergeometric series. In *Theory and applications of special functions*, volume 13 of *Dev. Math.*, pages 479–491. Springer, New York, 2005.

[Zha06] Changgui Zhang. Solutions asymptotiques et méromorphes d'équations aux q-différences. In *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, volume 14 of *Sémin. Congr.*, pages 341–356. Soc. Math. France, Paris, 2006.