

MÉTHODES ASYMPTOTIQUES EN FERROMAGNÉTISME

David SANCHEZ

Remerciements

Mes premiers remerciements iront bien entendu à Gilles Carbou et Pierre Fabrie. Ils m'ont accueilli au sein du MAB dès mon stage de maîtrise et j'ai toujours pu, dès lors, compter sur leur aide et leurs conseils.

Je tiens à remercier chaleureusement Jean-Luc Joly pour sa participation à mon jury de thèse et pour me faire l'honneur de le présider.

Ma gratitude va également à Fabrice Béthuel et François Castella pour avoir accepté de rapporter sur mes travaux et pour l'attention qu'ils y ont prêtée.

Je remercie aussi Naoufel Ben Abdallah qui a bien voulu être membre de mon jury. J'ai rencontré André Thiaville au colloque "Modélisation du micromagnétisme" et je le remercie chaleureusement pour l'intérêt qu'il a porté alors à mes travaux et pour sa présence à mon jury de thèse.

Ma reconnaissance va également à Thierry Colin pour m'avoir mis en contact avec Pierre et Gilles, ainsi que pour sa bonne humeur et sa disponibilité. Je n'oublie pas non plus Benjamin Texier, Cédric Galusinski, David Lannes, Jean Sarynkevitch, Laurent Chupin, Mathieu Colin, Mazen Saad, Thomas Alazard, Thomas Boucherès, Vincent Bruneau et Vincent Lescarret dont la porte du bureau m'a toujours été ouverte.

De façon plus générale, un grand merci à tous les membres du MAB et aux doctorants de l'institut qui m'ont permis de travailler dans une ambiance chaleureuse.

Je ne serais sans doute pas arrivé au bout de ce travail si, en dehors du laboratoire, je n'avais pas eu le soutien de ma famille et de mes amis, et particulièrement celui de mes colocataires Cédric et Lionel.

Table des matières

Introduction	7
1 Modélisation	9
2 Dérivation des modèles quasistationnaires 2D et 1D	12
2.1 Film ferromagnétique plan dans le vide	13
2.2 Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait	13
2.3 Fils ferromagnétiques	14
3 Ondes longues en ferromagnétisme	14
 Partie I Dérivation des modèles quasistationnaires 2D et 1D	 17
1 Introduction	19
1.1 Film ferromagnétique plan dans le vide	22
1.2 Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait	22
1.3 Fils ferromagnétiques	22
2 Film ferromagnétique plan dans le vide	25
2.1 Développement asymptotique	27
2.1.1 Equations des profils	27
2.1.2 Etude des profils	30
2.1.2.1 Comportement de H à l'extérieur de la couche mince	30
2.1.2.2 Existence de U^0	32
2.1.2.3 Existence de U^1	32
2.1.2.4 Existence de U^2	35
2.1.2.5 Existence de U^3	36
2.2 Injections de Sobolev et estimations d'énergie en couche mince	36
2.2.1 Injections de Sobolev anisotropes	37
2.2.2 Trace et relèvement	41
2.2.3 Quelques inégalités	42
2.3 Equations du reste - Estimations d'énergie	43
2.3.1 Le champ magnétique, existence et régularité	43
2.3.2 Le moment magnétique, équation du reste	45
2.3.3 Le moment magnétique, estimation du reste	47

3	Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait	57
3.1	Formalisme géométrique	59
3.2	Développement asymptotique	62
3.2.1	Equations des profils	63
3.2.2	Etude des profils	66
3.2.2.1	Existence de U^0	66
3.2.2.2	Existence de U^1	66
3.2.2.3	Existence de U^2	67
3.2.2.4	Existence de U^3	68
3.3	Injections de Sobolev et estimations d'énergie en couche mince	68
3.3.1	Injections de Sobolev anisotropes	68
3.3.2	Trace et relèvement	70
3.3.3	Quelques inégalités	71
3.4	Equations du reste - Estimations d'énergie	72
3.4.1	Le champ magnétique, existence et régularité	73
3.4.2	Equations	75
3.4.3	Le moment magnétique, estimation du reste	77
4	Fils ferromagnétiques	79
4.1	Développement asymptotique	81
4.1.1	Equations des profils	81
4.1.2	Etude des profils	83
4.1.2.1	Problème extérieur $2D$ pour la magnétostatique	83
4.1.2.2	Existence de U^0	86
4.1.2.3	Existence de U^1	87
4.1.2.4	Existence de U^2	88
4.1.2.5	Existence de U^3	89
4.2	Injections de Sobolev et estimations d'énergie dans les fils	90
4.2.1	Injections de Sobolev anisotropes	90
4.2.2	Trace et relèvement	91
4.2.3	Quelques inégalités	92
4.3	Equations du reste - Estimations d'énergie	93
4.3.1	Le champ magnétique, existence et régularité	93
4.3.2	Equations	95
4.3.3	Le moment magnétique, estimation du reste	97
5	Conclusion et perspectives	99
 Partie II Ondes longues en ferromagnétisme		101
6	Introduction	103
7	Ondes longues pour un système hyperbolique général	109
7.1	Quelques propriétés du système	109
7.1.1	Energie du système	109
7.1.2	Formulation vectorielle	110

7.1.3	Quelques propriétés	111
7.2	Une équation plus générale	111
7.2.1	Développement asymptotique	112
7.2.2	Estimations asymptotiques	115
7.2.2.1	Existence des profils	115
7.2.2.2	Estimation du reste	118
7.2.2.3	Stabilité de l'approximation KZ	120
8	Ondes longues : le cas des équations de Landau-Lifschitz-Maxwell	123
8.1	Equations à l'ordre 0	123
8.2	Equations à l'ordre 1	124
8.3	Equations à l'ordre 2	124
8.3.1	Choix des coordonnées	124
8.3.2	Solution de l'équation (8.3.6)	125
8.4	Equations à l'ordre 3	126
8.4.1	Représentation en coordonnées	126
8.5	Equations à l'ordre 4	127
8.5.1	Représentation en coordonnées	128
8.5.2	Solution de l'équation (8.5.6)	129
9	Etude numérique	131
9.1	Discrétisation spatiale	131
9.2	Discrétisation temporelle	132
9.2.1	Schéma semi-implicite	132
9.2.2	Splitting	133
9.2.2.1	Splitting et énergie	133
9.2.2.2	Un premier schéma	134
9.2.2.3	Quelques améliorations	135
9.3	Résultats numériques	136
9.3.1	Comparaison entre les schémas	136
9.3.1.1	Comparaison entre les schémas $1D$	136
9.3.1.2	Comparaison entre les schémas $2D$	140
9.3.2	Vitesses et influence de φ	142
10	Conclusion et perspectives	145
11	Annexe	147
11.1	Invariance dans l'épaisseur de la couche mince	147
11.2	Expression de F^ε au chapitre 3	151
11.3	Résidus pour le développement asymptotique tronqué (chapitre 7)	153

Introduction

Les matériaux ferromagnétiques ont la particularité de présenter une aimantation rémanente : même sans excitation magnétique extérieure, l'aimantation totale d'un échantillon est non nulle. Cette propriété leur donne des applications dans de nombreux secteurs d'activité industrielle comme la protection radar, le stockage des informations, la gestion de l'énergie et le matériel de télécommunication. Son étude et la compréhension de son comportement (formation de domaines magnétiques, retournement de l'aimantation, évolution temporelle,...) se retrouvent ainsi au coeur de nombreux problèmes industriels.

1 Modélisation

L'aimantation est décrite par le moment magnétique M , un champ de vecteurs défini sur le domaine Ω dans lequel est confiné le matériau ferromagnétique, et de norme constante M_s :

$$M(t, x) = M_s u(t, x) \text{ où } u : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Le moment magnétique relie l'induction magnétique au champ magnétique par la relation

$$B = \mu_0 (H + \overline{M}),$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, et $\overline{M}$ est l'extension par 0 de M hors de Ω , le champ et l'induction magnétiques étant définis dans l'espace tout entier.

L'évolution du moment magnétique est décrite par un modèle introduit par L. Landau et E. Lifschitz en 1935 :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \left(M \wedge \mathcal{H}_{eff} - \frac{\gamma}{M_s} M \wedge (M \wedge \mathcal{H}_{eff}) \right),$$

où γ et α sont deux constantes strictement positives, le premier terme correspondant à un mouvement de type précession de Larmor, le second étant le terme correctif dissipatif qu'ils ont introduit, et où $\mathcal{H}_{eff}$ est le champ magnétique effectif à l'intérieur du matériau. Ce champ effectif se décompose en plusieurs termes :

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_{anis}(M) + \mathcal{H}_{ech}(M) + H,$$

où

- $\mathcal{H}_{anis}$ est le champ engendré par l'anisotropie du matériau ; il provient de l'existence d'axes préférentiels de magnétisation dûs à la structure cristalline du matériau ferromagnétique et dérive d'une énergie interne d'anisotropie par la relation :

$$\mathcal{H}_{anis} = -\frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\partial E_{anis}}{\partial M}.$$

Cette énergie s'écrit dans certains modèles sous la forme d'un terme quadratique en le moment magnétique :

$$E_{anis}(M) = \mu_0 K_a \int_{\Omega} (M_s^2 - (M \cdot \mathbf{u})^2) dx,$$

où K_a est la constante d'anisotropie et $\mathbf{u}$ est un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$ de module 1 donnant la direction de l'anisotropie en chaque point du matériau.

- $\mathcal{H}_{ech}$ est le champ magnétique d'échange, il provient du modèle d'interaction entre deux spins d'Heisenberg : $\mathcal{H}_{ech}(M) = K_e \Delta M$ avec des conditions aux limites de type Neumann homogène, et est associé à l'énergie interne d'échange

$$E_{ech} = \mu_0 K_e \int_{\Omega} |\nabla M|^2 dx.$$

- H est le champ magnétique total. Selon la taille de l'échantillon et les conditions de l'expérience, plusieurs modèles sont en concurrence :

Dans un échantillon suffisamment grand pour que l'on doive tenir compte de la propagation du champ électromagnétique, nous nous plaçons dans le cadre d'un **modèle instationnaire** où le champ magnétique est déterminé par les équations de Maxwell où l'on a remplacé l'induction magnétique B par $\mu_0 (H + \overline{M})$:

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H + \overline{M}) + \operatorname{rot} E = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{rot} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Si au contraire l'échantillon est suffisamment petit pour que les phénomènes propagatifs soient négligeables, nous nous plaçons dans le cadre d'un **modèle quasistationnaire** où le champ et l'induction magnétiques satisfont les équations de la magnétostatique. Dans ce cas, nous procédons usuellement à un découplage formel du champ magnétique au moyen de la décomposition de Hodge : $H = \mathcal{H}_{ext} + \mathcal{H}_d(M)$, où $\mathcal{H}_{ext}$ est appelé le champ magnétique extérieur ou appliqué et vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{H}_{ext} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} \mathcal{H}_{ext} = j_{ext} & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

et $\mathcal{H}_d$ est appelé le champ démagnétisant ; il correspond à une contribution globale du matériau (contrairement aux contributions d'anisotropie, d'échange et extérieure) et vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mathcal{H}_d(M) + \overline{M}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} \mathcal{H}_d(M) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

L'énergie associée, aussi appelée énergie démagnétisante, peut alors s'écrire

$$E_d(M) = \frac{\mu_0}{2} \|\mathcal{H}_d(M)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Remarque 1

Contrairement aux notations introduites par Gilbert, nous avons noté ici γ l'amortissement et α la précession dans l'équation de Landau-Lifschitz.

Avant de poursuivre, nous fixons les constantes physiques M_s et α à 1 et nous notons ε^2 le coefficient d'échange K_e , ce petit coefficient étant destiné à tendre vers zéro dans notre étude.

Remarque 2

Cela revient à adimensionner les équations en effectuant les changements de variables

$$t' = |\alpha| M_s t, \quad x' = \frac{x}{R},$$

où R est la taille caractéristique de l'échantillon de matériau ferromagnétique, et en prenant comme nouvelles inconnues :

$$M' = \frac{M}{M_s}, \quad E' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E}{M_s}, \quad H' = \frac{H}{M_s},$$

(voir [16, 31, 34, 53]). Dans la suite, nous noterons toujours E et H les champs électriques et magnétiques adimensionnés. Dans les équations adimensionnées, les seuls coefficients dont on tient compte sont les coefficients d'échange ε^2 et la vitesse $\frac{1}{\eta^2}$ dans les équations de Maxwell, où

$$\varepsilon^2 = \frac{K_e}{R^2}, \quad \eta = R \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} M_s |\alpha|.$$

Nous négligerons dans toute la suite les termes dûs à l'anisotropie :

$$\mathcal{H}_{eff} = \varepsilon^2 \Delta M + H$$

Les équations adimensionnées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{Landau-Lifschitz : } & \frac{\partial M}{\partial t} = M \wedge \mathcal{H}_{eff} - \gamma M \wedge (M \wedge \mathcal{H}_{eff}), \\ \text{Maxwell : } & \begin{cases} \eta \frac{\partial}{\partial t} (H + \overline{M}) + \text{rot } E = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \eta \frac{\partial E}{\partial t} - \text{rot } H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \end{aligned}$$

Ces modèles reposent sur l'équation aux dérivées partielles proposée par L. Landau et E. Lifschitz en 1935 et sur la théorie du micromagnétisme élaborée dans les années 40 par W.F. Brown [11, 12] pour expliquer le comportement de matériaux ferromagnétiques non-linéaires comme les ferromagnétiques. Ces modèles, de part leur nature non-linéaire, avaient été peu étudiés à l'époque, mais leurs nombreux domaines d'application et l'émergence de moyens de calculs adaptés ont motivé de nombreuses études récemment comme celles A. Thiaville [57] avec D. Tomás et J. Miltat [60] qui s'intéressent à l'influence de la géométrie et de la structure du domaine, ainsi qu'aux problèmes dynamiques qui y sont liés (A. Thiaville, J.M. García, J.Miltat [58], A. Thiaville, J. Miltat, J. Ben Youssef [59]) ou celles de H. Leblond et M. Manna [38] s'intéressant aux perturbations d'états stables.

Les propriétés mathématiques de ce système ont déjà été traitées sous différents angles, en considérant tout ou partie du champ magnétique effectif $\mathcal{H}_{eff}$. A. Visintin [64] s'est intéressé à l'existence de solutions régulières dans un domaine borné en tenant compte des termes d'échange et d'anisotropie. G. Carbou et P. Fabrie [18] ont traité dans le même cadre le cas de l'existence de solutions faibles. D'un autre côté, P. Joly et O. Vacus ont montré l'existence et l'unicité de solutions fortes, sans termes d'échange, en dimension 1 [33, 63], et J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch s'y sont intéressés dans le cas d'un domaine infini pour un champ composé uniquement de la partie sans terme d'échange [32]. Dans le même cadre, T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper ont étudié le comportement de petites perturbations 1d d'états d'équilibres stables [23].

Pour les équations avec terme d'échange, G. Carbou, P. Fabrie et F. Jochmann [21] s'intéresse à l'ensemble ω -limite, et G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès montrent dans le même cas le phénomène de formation d'une couche limite quand le coefficient d'échange tend vers zéro [20]. Des études portent aussi sur les effets de la géométrie, et plus particulièrement des couches minces : H. Haddar s'est intéressé à la réponse numérique à une excitation extérieure, d'une couche mince de matériau ferromagnétique [31]; M. Tilioua s'est intéressé à la détermination des modèles limites et au passage à la limite dans des domaines minces de matériaux ferromagnétiques [61].

Le couplage entre l'équation de Landau-Lifschitz et les équations de Maxwell permet de prendre en compte les phénomènes de propagation d'ondes. Lorsque ceux-ci sont négligeables ($\eta \rightarrow 0$), nous pouvons nous ramener au modèle quasistationnaire dans lequel les équations de Landau-Lifschitz sont couplées aux équations de la magnétostatique (G. Carbou et P. Fabrie [18], J. Starynkevitch [53]).

De nombreuses études portent sur ce modèle : dans le cas d'un champ uniquement composé de la partie d'échange, F. Alouges et A. Soyeur ont montré l'existence et la non-unicité de solutions faibles en temps et en espace [6]; G. Carbou et P. Fabrie prouvent dans le même cadre l'existence locale, l'unicité et l'existence globale pour des données initiales petites de solutions régulières [17].

Dans sa thèse, S. Labbé [34] étend les résultats de F. Alouges et A. Soyeur au cas d'un champ effectif prenant en compte toutes les contributions et s'intéresse à la détermination numérique des configurations d'équilibre.

Pour un champ composé de la partie d'échange et du champ démagnétisant, G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès ont étudié le comportement asymptotique des équations de Landau-Lifschitz lorsque le coefficient d'échange ε^2 tend vers zéro, mettant en évidence la formation d'une couche limite au bord du matériau [19]. Suivant cette étude, le même phénomène a été démontré pour un champ composé du terme d'échange et du terme d'anisotropie (D.S. [47]).

De nombreuses études portent plus particulièrement sur l'influence du domaine sur la configuration et les états d'équilibre : T. Rivière et S. Serfaty [45] avec F. Alouges [5] s'intéressent par exemple à la description des murs de Néel, G. Carbou [14] montre par des méthodes de minimisation d'énergie que le champ magnétique se localise et devient orthogonal à la surface dans des couches minces, A. Desimone, R.V. Kohn, S. Müller et F. Otto [25] et F. Alouges et S. Labbé [4] proposent des modèles de configuration pour des plaques minces et des schémas numériques pour les obtenir.

2 Dérivation des modèles quasistationnaires 2D et 1D

Dans la première partie de cette thèse, nous nous plaçons dans le cadre du modèle quasistationnaire avec coefficient d'échange :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + H^\varepsilon) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + H^\varepsilon)) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(t=0, x) = u_0(x) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où u^ε est le moment magnétique, ω_ε est un domaine variable et ν est la normale unitaire sortante à $\partial\omega_\varepsilon$ et H^ε est le champ démagnétisant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (H^\varepsilon + \overline{u}^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} H^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ H^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Comme l'ont prouvé G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès [19], le terme d'échange $\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon$ engendre quand ε tend vers zéro un terme de couche limite au bord du domaine, d'épaisseur caractéristique ε . Dans cette étude, nous nous intéressons au comportement de l'équation de Landau-Lifschitz dans des domaines de petite taille, c'est-à-dire dans des couches minces dont l'épaisseur est d'ordre ε ou des fils de diamètre d'ordre ε . En prenant en compte l'interaction entre le phénomène de couche limite et le phénomène de couche mince, nous effectuons un développement asymptotique de la solution ainsi qu'un changement d'échelle pour obtenir le modèle limite vers lequel tendent les équations de Landau-Lifschitz couplées aux équations de la magnétostatique quand le petit paramètre ε tend vers zéro.

Nous considérons trois types de domaines :

- un domaine plan périodique d'épaisseur 2ε , $\omega_\varepsilon =]0, 1[\times] -\varepsilon, \varepsilon[$,
- une couche mince d'épaisseur ε à la surface d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ de bord Γ ,

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\},$$

- un fil ferromagnétique rectiligne $\omega_\varepsilon = \varepsilon \Sigma \times \mathbb{R}$, 1-périodique, où Σ , la section du fil, est un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$ et étoilé en zéro.

Pour obtenir le modèle limite vérifié par les équations de Landau-Lifschitz, nous procédons en trois étapes

(méthode BKW) :

Etape 1 : nous effectuons un changement d'échelle à l'intérieur du domaine ferromagnétique pour nous ramener à un domaine indépendant de ε et nous recherchons la solution du problème sous forme de développement asymptotique.

Par exemple, dans le cas d'un revêtement ferromagnétique ω_ε d'un conducteur parfait, nous posons :

- dans $\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$, en posant $\sigma = P_\Gamma(x)$ le projeté orthogonal de x sur Γ et $z = \text{dist}(x, \Gamma)$,

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon H^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

- hors de ω_ε ,

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, x) + \varepsilon H^1(t, x) + \dots$$

En reportant le développement asymptotique de H^ε dans les équations de la magnétostatique, nous obtenons les équations formelles satisfaites par le champ démagnétisant à l'intérieur et à l'extérieur de ω_ε , équations que nous couplons grâce à des conditions de transmission déduites elles aussi des équations de la magnétostatique. De même, nous utilisons l'équation de Landau-Lifschitz pour obtenir formellement les équations vérifiées par les profils du moment magnétique.

Etape 2 : En supposant la donnée initiale suffisamment régulière, nous démontrons l'existence et la régularité des différents profils.

Etape 3 : Pour justifier l'existence du développement asymptotique, nous estimons indépendamment de ε les termes de reste de u^ε et H^ε sur l'espace ω_ε . Pour cela, nous introduisons des espaces de Lebesgue et de Sobolev anisotropes $\mathbb{L}_\varepsilon^p$ et $\mathbb{H}_\varepsilon^p$ qui prennent en compte la petite taille du domaine, et nous procédons à des estimations d'énergie sur l'approximation de Galerkin du reste r^ε .

En appliquant ce procédé aux trois types de domaines qui nous intéressent, nous obtenons les modèles suivants :

2.1 Film ferromagnétique plan dans le vide

Au chapitre 2, nous étudions le cas des couches minces planes périodiques $\omega_\varepsilon =]0, 1[^2 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ placées dans le vide. Après une étude des équations de la magnétostatique dans le demi-espace, nous montrons que le champ magnétique, à l'ordre 0, est un opérateur local, orthogonal à la surface et que, si la donnée initiale du profil principal U^0 du moment magnétique ne varie pas dans l'épaisseur de la couche mince, celui-ci vérifie l'équation différentielle ordinaire formellement obtenue en prenant $\varepsilon = 0$ dans l'équation de Landau-Lifschitz :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans }]0, 1[^2, \\ H^0 = -(U^0 \cdot e_3) e_3, \\ U^0(t = 0, \sigma, z) = U_0^0(\sigma) & \text{dans }]0, 1[^2 \times]-1, 1[. \end{cases}$$

Nous prouvons ensuite que les autres profils vérifient des équations du type équation de la chaleur et nous obtenons leur existence et régularité par des méthodes classiques. Après avoir défini les espaces de Sobolev anisotropes adaptés au problème, nous effectuons les estimations des restes des champ et moment magnétiques et établissons ainsi l'existence du développement asymptotique.

2.2 Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait

Au chapitre 3, nous étudions un cas géométriquement plus compliqué de couches minces : la couche mince $\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$ de matériau ferromagnétique est placée à la surface d'un domaine parfait

tement conducteur, lui-même placé dans le vide. Nous détaillons alors un paramétrage de la couche mince et un formalisme géométrique permettant de simplifier les opérateurs différentiels, et ainsi l'étude du développement asymptotique. Au travers des différentes étapes, nous retrouvons en particulier les résultats marquants du chapitre 2, à savoir le caractère local et orthogonal à la surface du champ magnétique à l'ordre 0 d'une part, d'autre part, le fait que le profil principal vérifie l'équation limite formellement obtenue en prenant $\varepsilon = 0$.

2.3 Fils ferromagnétiques

Suite à une suggestion d'A. Thiaville et J. Miltat dont les travaux et expériences portent sur les plaques minces et les nanofils [57, 58], nous nous intéressons dans le chapitre 4 au cas de fils ferromagnétiques rectilignes et 1-périodiques $\omega_\varepsilon = \varepsilon\Sigma \times \mathbb{R}$ placés dans le vide. La géométrie du domaine nous amène alors à effectuer un changement d'échelle dans l'espace tout entier au lieu de nous limiter au domaine ferromagnétique. L'étude du champ magnétique se fait alors globalement dans $\mathbb{R}^2$ et nous introduisons divers espaces de Sobolev à poids pour gérer le problème extérieur et les problèmes de régularité qui se posent. On note au cours de l'étude de grandes différences vis-à-vis des couches minces : le profil principal du champ magnétique est un opérateur non-local, et le moment magnétique varie nécessairement dans la section du fil.

3 Ondes longues en ferromagnétisme

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude de phénomènes se produisant dans le cas instationnaire, où l'équation de Landau-Lifschitz est couplée avec les équations de Maxwell uniquement ($\mathcal{H}_{eff} = H$) et où le domaine ferromagnétique est supposé être $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t M = -M \wedge H - \gamma M \wedge (M \wedge H) & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t (H + M) - \text{rot } E = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t E + \text{rot } H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Ces équations admettent des solutions stationnaires stables où le moment magnétique est uniforme et parallèle en tout point au champ magnétique effectif :

$$(M, H, E)_\alpha = (M_0, \alpha^{-1} M_0, 0), \quad \alpha > 0.$$

Nous nous intéressons à de petites perturbations de tels états d'équilibre dont la taille est mesurée par un petit paramètre ε . H. Leblond et M. Manna [38] en ont donné une dérivation formelle. T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper ont étudié le cas de perturbations 1D [23] et prouvé que l'évolution des profils d'ondes monodimensionnelles est régie en temps long par une équation de la chaleur semi-linéaire.

Nous étudions ici le cas de perturbations 2D : nous ajoutons une dépendance faible dans la direction d'espace transverse y et recherchons leur comportement. La perturbation est choisie de telle sorte que les effets dispersifs, non-linéaires et diffractifs se produisent à des échelles de temps comparables, et en temps long :

$$\begin{aligned} M(t, x, y) &= M_0 + \varepsilon^2 \widetilde{M}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ H(t, x, y) &= \alpha^{-1} M_0 + \varepsilon^2 \widetilde{H}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ E(t, x, y) &= \varepsilon^2 \widetilde{E}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \end{aligned}$$

où $\widetilde{t}$, τ , $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ sont les nouvelles variables obtenues en faisant apparaître les échelles liées au problème :

$$\widetilde{t} = \varepsilon^2 t, \quad \tau = \varepsilon^4 t, \quad \widetilde{x} = \varepsilon^2 x, \quad \widetilde{y} = \varepsilon^3 y.$$

Nous introduisons alors le vecteur

$$U(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\alpha^{-1/2} \widetilde{M}, \widetilde{H}, \widetilde{E} \right)^t(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}),$$

et la perturbation satisfait une équation de la forme (en “oubliant” les $\sim$ sur les variables t, x, y) :

$$\begin{cases} \partial_t U + \varepsilon^2 \partial_\tau U + A_1 \partial_x U + \varepsilon A_2 \partial_y U + \varepsilon^{-2} L U = B(U, U) + \varepsilon^2 T(U, U, U), \\ U(0, 0) = U_0^0, \end{cases} \quad (1)$$

où A_1, A_2, L sont des applications linéaires, B est une application bilinéaire et T une application trilinéaire. En effectuant un développement asymptotique de U , nous obtenons que le terme principal U_0 se décompose en cinq ondes stationnaires et progressives, $U_0 = \sum_{j=1}^5 u_j$, qui vérifient :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_j \partial_x) u_j = 0, \\ \partial_x (\partial_\tau u_j - D_j \partial_x^2 u_j + B_j(u_j, \partial_x u_j) + F_j(u_j, u_j, u_j)) = C_j \partial_y^2 u_j, \end{cases}$$

où la dernière équation est l'équation dite de Khokhlov-Zabolotskaya, une équation apparue pour la première fois en théorie des gaz [67] qui décrit le comportement d'ondes diffractives non-linéaires [22, 27, 38], et où

$$v_j \in \left\{ 0, \pm \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/2}, \pm \left(\frac{1 + (1 - |k \cdot M_0|^2) \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2} \right\}$$

est la vitesse de l'onde dans la direction k (l'axe des x).

Nous montrons ensuite que la solution générale de l'équation (1) reste proche du terme principal U_0 du développement asymptotique pour une échelle de temps lente aussi longtemps que l'on a existence pour U^0 , c'est-à-dire que la fonction $\mathcal{U}^\varepsilon$, solution de

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A_1 \partial_x \mathcal{U}^\varepsilon + A_2 \partial_y \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} L \mathcal{U}^\varepsilon = B(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon) + \varepsilon^2 T(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon),$$

avec la condition initiale $\mathcal{U}^\varepsilon(0, x, y) = U_0^0(x, \varepsilon y)$, vérifie

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{U}_0^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_0/\varepsilon^2] \times \mathbb{R}^2)} = o(1) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{U}_0^\varepsilon(t, x, y) = U_0(t, \varepsilon^2 t, x, \varepsilon y)$, et où T_0 est le temps d'existence de U^0 (en τ).

Nous complétons ensuite cette étude par une étude numérique des équations afin de vérifier les résultats théoriques obtenus. Après avoir mis en évidence une égalité d'énergie satisfaite par le système :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|H\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \alpha^{-1} \|M\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right) + \gamma \left\| \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H + \varepsilon M \wedge H - \frac{1}{\varepsilon \alpha} M_0 \wedge M \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0,$$

nous développons des schémas numériques qui la vérifient : un schéma semi-implicite, appelé SIS, correspondant à la transcription des équations de Landau-Lifschitz-Maxwell perturbées (1), et un schéma basé sur le *splitting* de Strang. Les schémas précédents étant coûteux en temps de calcul, nous en développons un troisième, noté SpS, dans lequel nous sacrifions la conservation de l'égalité d'énergie pour plus d'efficacité : ce schéma, basé lui aussi sur du *splitting*, effectue tout d'abord une résolution des équations de Maxwell au moyen du schéma de Yee, puis une résolution implicite de l'équation de Landau-Lifschitz.

Nous comparons enfin numériquement ces trois schémas, ce qui nous permet de valider le schéma SpS dans le cadre de résultats qualitatifs. Nous mettons en évidence quelques propriétés du système.

Première partie

Dérivation des modèles quasistationnaires 2D et 1D

Chapitre 1

Introduction

Dans cette partie, nous considérons le modèle quasistationnaire et nous nous intéressons au comportement du moment magnétique dans des domaines ferromagnétiques ω_ε particuliers. L'évolution du moment magnétique est décrite par l'équation de Landau-Lifschitz (cf [36]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon))) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(t=0, x) = u_0(x) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ est le champ magnétique, ε^2 est appelé le coefficient d'échange et ν est la normale unitaire sortante à $\partial\omega_\varepsilon$. Puisque le moment magnétique u^ε lie le champ magnétique $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ et l'induction magnétique B par la relation $B = \mathcal{H}(u^\varepsilon) + \bar{u}^\varepsilon$, où $\bar{u}^\varepsilon$ est le prolongement de u^ε par 0 hors de ω_ε , les équations de la magnétostatique nous permettent de déterminer $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mathcal{H}(u^\varepsilon) + \bar{u}^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} \mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{H}(u^\varepsilon) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Le comportement du moment magnétique a déjà été étudié dans plusieurs travaux : quand le coefficient d'échange est fixé et le domaine $\omega_\varepsilon = \Omega$ ne dépend pas de ε , G. Carbou et P. Fabrie prouvent dans [17] l'existence locale de solutions régulières ($\mathbb{H}^2(\Omega)$) de l'équation de Landau-Lifschitz. Pour prouver ce résultat, ils remarquent que pour des solutions suffisamment régulières, et vérifiant $|u^\varepsilon| = 1$, nous avons :

$$\Delta |u^\varepsilon|^2 = 0 = 2(u^\varepsilon \cdot \Delta u^\varepsilon) + 2|\nabla u^\varepsilon|^2,$$

et ils obtiennent, en développant le double produit vectoriel $u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon)$, une forme équivalente de l'équation de Landau-Lifschitz qui isole le terme dissipatif de l'équation :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon)).$$

Quand le coefficient d'échange ε^2 tend vers zéro, et $\omega_\varepsilon = \Omega$, le temps d'existence donné par le théorème précédent tend lui aussi vers zéro. Dans [19], G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès prouvent qu'en fait le temps d'existence tend vers l'infini quand ε tend vers zéro pour une donnée initiale $\mathbb{H}^5(\Omega)$ (au lieu de $\mathbb{H}^2(\Omega)$) en

montrant qu'une couche limite d'épaisseur caractéristique ε apparaît au bord du domaine. De plus, ils obtiennent que la solution u^ε tend vers la solution du système hyperbolique formellement obtenue en prenant $\varepsilon = 0$ dans l'équation de Landau-Lifschitz. Le théorème, par contre, ne donne pas de développement asymptotique du premier ordre de la solution.

Ces résultats ont été établis dans le cas où le domaine ω_ε ne dépend pas de ε . Des phénomènes intéressants se produisent quand le matériau ferromagnétique est confiné dans de petits domaines tels que les couches minces ou les nanofils [57, 58]. Dans ces cas, nous nous attendons à observer un comportement plus simple des solutions, et nous cherchons à justifier les modèles utilisés. En ce qui concerne les couches minces, G. Carbou étudie dans [14] au moyen d'estimations d'énergie la limite du champ magnétique $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ quand l'épaisseur ε du domaine tend vers 0 et le coefficient d'échange est fixé. Dans sa thèse [31], H. Haddar s'intéresse à des couches minces de matériau ferromagnétique d'un point de vue numérique, et plus particulièrement à la réponse du matériau ferromagnétique à une excitation extérieure.

Nous nous plaçons, dans cette étude, dans le cas d'un coefficient d'échange en ε^2 , qui engendre la formation de couches limites sur une épaisseur d'ordre ε au bord [19], et dans le cas d'une couche mince d'épaisseur ε ou d'un fil de diamètre ε . Nous devons alors prendre en compte les interactions entre les deux phénomènes, les deux distances étant du même ordre de grandeur. Plus particulièrement, nous cherchons le modèle limite vers lequel tendent les équations de Landau-Lifschitz couplées aux équations de la magnétostatique quand le petit paramètre ε tend vers zéro.

Nous considérons trois types de domaines :

- un domaine plan périodique d'épaisseur 2ε , $\omega_\varepsilon =]0, 1[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$,
- une couche mince d'épaisseur ε à la surface d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ de bord Γ , $\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$,
- un fil ferromagnétique rectiligne et 1-périodique $\omega_\varepsilon = \varepsilon\Sigma \times \mathbb{R}$ où Σ , la section du fil, est un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$ et étoilé en zéro.

Pour obtenir le modèle limite vérifié par les équations de Landau-Lifschitz, nous utilisons la méthode BKW décrite dans l'introduction. Nous en rappelons et précisons le déroulement :

Etape 1 : nous effectuons un changement d'échelle à l'intérieur du domaine ferromagnétique pour nous ramener à un domaine indépendant de ε et nous recherchons la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique.

Par exemple, dans le cas d'un revêtement ferromagnétique ω_ε d'un conducteur parfait, nous posons :

- dans $\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$, en posant $\sigma = P_\Gamma(x)$ le projeté orthogonal de x sur Γ et $z = \text{dist}(x, \Gamma)$,

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon H^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

- hors de ω_ε ,

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, x) + \varepsilon H^1(t, x) + \dots$$

En reportant le développement asymptotique de H^ε dans les équations de la magnétostatique, nous obtenons formellement les équations satisfaites par le champ démagnétisant à l'intérieur et à l'extérieur de ω_ε , équations que nous couplons grâce à des conditions de transmission déduites elles aussi des équations de la magnétostatique. De même, nous utilisons la forme équivalente de l'équation de Landau-Lifschitz donnée dans [17] pour obtenir formellement les équations des profils du moment magnétique.

Etape 2 : A l'exception des profils principaux obtenus au chapitres 2 et 3 qui vérifient des équations différentielles ordinaires, les autres vérifient des équations du type équation de la chaleur. Pour résoudre ces équations aux dérivées partielles, nous utilisons la méthode de Galerkin : nous utilisons une base de vecteurs propres

de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions au bord de Neumann homogènes et nous projetons les équations sur les espaces vectoriels engendrés par les N premiers vecteurs propres. Nous procédons ensuite à des estimations d'énergie, indépendantes de N , de ces approximations. Nous pouvons alors passer à la limite et obtenir l'existence des profils.

Pour obtenir plus de régularité, nous jouons sur le caractère régularisant de l'équation de la chaleur : nous dérivons en temps les équations, obtenons de la même façon des résultats d'existence, et, en exprimant le laplacien en fonction de la dérivée en temps et des autres termes de l'équation, nous gagnons de la régularité en espace.

Etape 3 : Pour obtenir l'existence du développement asymptotique, nous devons prouver l'existence des termes de reste de u^ε et H^ε . Nous utilisons ici aussi la méthode de Galerkin et nous estimons les termes de reste indépendamment de ε sur l'espace ω_ε au moyen des théorèmes d'injection de Sobolev, dont les constantes dépendent du domaine, et donc ici de ε . Pour préciser cette dépendance, nous introduisons des espaces de Lebesgue et de Sobolev anisotropes $\mathbb{L}_\varepsilon^p$ et $\mathbb{H}_\varepsilon^p$ qui prennent en compte la petite taille du domaine :

Par exemple, dans le cas d'une couche mince plane périodique $\omega_\varepsilon =]0, 1[^2 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, nous posons pour $u : \omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$:

$$v(\sigma, z) = u(\sigma, \varepsilon z) \quad \text{pour } (\sigma, z) \in]0, 1[^2 \times]-1, 1[.$$

En supposant que la fonction v appartient aux espaces de Lebesgue ou de Sobolev usuels, et en transcrivant cette appartenance en conditions sur u , nous sommes amenés à renormaliser les espaces de Lebesgue en les divisant par la taille du domaine : pour $1 \leq p < +\infty$, nous posons :

$$\mathbb{L}_\varepsilon^p = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon, p} = \left(\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

et pour $p = +\infty$,

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\infty = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)| < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon, \infty} = \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)|.$$

Nous décomposons les opérateurs différentiels en une partie de dérivation "tangentielle" au domaine ∇_T et une partie "orthogonale" $\nabla_\perp = e_3(\partial_z)$ correspondant à la dérivation dans la faible épaisseur, et nous obtenons des espaces de Sobolev anisotropes :

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,p} = \mathbb{L}_\varepsilon^p$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p} = \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^p, \nabla_T u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \text{ et } (\varepsilon \nabla_\perp) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p}} = \left(|u|_{\varepsilon, p}^p + \|\nabla_T u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p + \|\varepsilon \nabla_\perp u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p \right)^{1/p}.$$

Dans le cas $p = 2$, nous posons $\mathbb{H}_\varepsilon^m = \mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}$, et $\|u\|_{\varepsilon, m} = \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}}$. Dans le cas $p = +\infty$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty} = \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^\infty, \nabla_T u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \text{ et } (\varepsilon \nabla_\perp) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty}} = \left(|u|_{\varepsilon, \infty} + \|\nabla_T u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} + \|\varepsilon \nabla_\perp u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} \right).$$

En transposant de la même façon les injections de Sobolev, nous en obtenons des versions anisotropes où nous connaissons explicitement la dépendance en ε , ce qui nous permet de mener à bien les estimations d'énergie sur le terme de reste du moment magnétique.

En appliquant ce procédé aux trois types de domaines qui nous intéressent, nous obtenons les modèles suivants :

1.1 Film ferromagnétique plan dans le vide

Au chapitre 2, nous étudions le cas des couches minces planes périodiques placées dans le vide. Après une étude des équations de la magnétostatique dans le demi-espace, nous montrons que le champ magnétique, à l'ordre 0, est un opérateur local, orthogonal à la surface et que, si la donnée initiale du profil principal U^0 du moment magnétique ne varie pas dans l'épaisseur de la couche mince, celui-ci vérifie l'équation différentielle ordinaire formellement obtenue en prenant $\varepsilon = 0$ dans l'équation de Landau-Lifschitz :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans }]0, 1[^2, \\ H^0 = -(U^0 \cdot e_3) e_3, \\ U^0(t = 0, \sigma, z) = U_0^0(\sigma) & \text{dans }]0, 1[^2 \times]-1, 1[. \end{cases}$$

Nous bouclons l'étude en suivant les étapes décrites précédemment et nous prouvons que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| u^\varepsilon(t, x) - \left(U^0(t, \sigma) + \varepsilon U^1 \left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2+1/p}),$$

où U^1 , le profil d'ordre 1, est régulier, $0 < T < T^\varepsilon$, où $T^\varepsilon \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $2 \leq p \leq +\infty$.

1.2 Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait

Au chapitre 3, nous étudions un cas géométriquement plus compliqué de couches minces : la couche mince de matériau ferromagnétique est placée à la surface d'un domaine parfaitement conducteur, lui-même placé dans le vide.

Afin de retrouver le découplage naturel entre les opérateurs de dérivation tangentielle et orthogonale du chapitre 2, nous paramétrons la couche mince ω_ε par $\sigma = P_\Gamma(x)$, le projeté orthogonal de x sur le bord extérieur Γ du domaine, et $z = \text{dist}(x, \Gamma)$, la distance de x au bord du domaine. Ce faisant, nous obtenons formellement le même découplage des opérateurs différentiels, à savoir une partie de dérivation tangentielle à la surface et une partie de dérivation dans l'épaisseur. Nous pouvons ensuite effectuer un changement d'échelle et nous affranchir de la dépendance en ε du domaine. Nous retrouvons alors les résultats marquants du chapitre 2, à savoir le caractère local et orthogonal à la surface du champ magnétique à l'ordre 0 d'une part, d'autre part, le fait que le profil principal vérifie l'équation limite formellement obtenue en prenant $\varepsilon = 0$. Cette paramétrisation et le découplage des opérateurs des opérateurs différentiels nous permettent de plus de définir, selon le même procédé, des espaces de Sobolev anisotropes et ainsi d'effectuer les estimations de reste et de prouver que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| u^\varepsilon(t, x) - \left(U^0(t, P_\Gamma(x)) + \varepsilon U^1 \left(t, P_\Gamma(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2+1/p}),$$

où U^1 , le profil d'ordre 1, est régulier, $0 < T < T^\varepsilon$, où $T^\varepsilon \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $2 \leq p \leq +\infty$.

1.3 Fils ferromagnétiques

Nous nous intéressons dans le chapitre 4 au cas de fils ferromagnétiques rectilignes et périodiques placés dans le vide. Afin d'éviter d'avoir à travailler dans des domaines non simplement connexes, nous effectuons un changement d'échelle dans l'espace tout entier au lieu de nous limiter comme nous l'avions fait aux chapitres précédents au domaine ferromagnétique. L'étude du champ magnétique se fait alors globalement dans $\mathbb{R}^2$ et nous nous ramenons à l'étude du laplacien en dimension 2. Pour gérer correctement le problème extérieur, les problèmes de régularité et les termes sources (définis dans $\mathbb{R}^2$ eux aussi), nous sommes amenés à utiliser des

espaces de Sobolev à poids (voir [9, 40]) :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho(1+\ln \rho)} u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), \nabla u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \right\}, \\ \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho^2(1+\ln \rho)} u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho(1+\ln \rho)} \nabla u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), D^2 u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \right\}, \\ \mathbf{W}_\alpha^l(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho^{\alpha-|\beta|}(1+\ln \rho)} \partial^\beta u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), |\beta| \leq l \right\},\end{aligned}$$

où $\rho = (1 + |x|^2)^{1/2}$, $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha > l$.

On note au cours de l'étude de grandes différences vis-à-vis des couches minces : le profil principal du champ magnétique n'est plus un opérateur local et nous devons donc prendre en compte des variations dans la section du fil dès le profil principal. Nous obtenons toutefois le même type d'estimations :

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \left\| u^\varepsilon(t, x) - \left(U^0 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon U^1 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) \right) \right\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2+1/p}),$$

où U^1 , le profil d'ordre 1, est régulier, et $2 \leq p \leq +\infty$.

Chapitre 2

Film ferromagnétique plan dans le vide

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas d'une plaque mince périodique $\omega_\varepsilon =]0, 1[^2 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ de matériau ferromagnétique. Nous rappelons les équations vérifiées par le moment magnétique u^ε et le champ magnétique $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$:

– Equation de Landau-Lifschitz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon))) \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon =]0, 1[^2 \times \{\pm\varepsilon\}, \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0^\varepsilon \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon \text{ est périodique sur }]0, 1[^2, \end{array} \right. \quad (2.0.1)$$

où ν est la normale unitaire sortante à $\partial\omega_\varepsilon$.

– Equations de la magnétostatique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(u^\varepsilon) \in \mathbb{L}_p^2(\mathbb{R}^3), \\ \text{rot } \mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \text{div } (\mathcal{H}(u^\varepsilon) + \overline{u^\varepsilon}) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \end{array} \right. \quad (2.0.2)$$

où $\overline{u}$ désigne le prolongement de u par 0 hors de ω_ε .

Remarque 2.0.1

La périodicité du domaine permet d'éviter les interactions entre la couche mince (dans la direction verticale) et la couche limite qui apparaîtrait dans la direction horizontale à la frontière $\partial\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, dans le cas où $\omega_\varepsilon = \Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et Γ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. De plus, cette périodicité simplifie l'étude de l'opérateur $\mathcal{H}(u)$ aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du domaine ω_ε (séries de Fourier).

Nous notons :

- $\Gamma =]0, 1[^2$ le domaine périodique,
- $\mathbb{H}_p^l(\Gamma)$ est le sous-espace de $\mathbb{H}^l(\Gamma)$ dont les fonctions sont périodiques sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{L}_p^2(\Gamma)$ est l'adhérence de $\mathbb{H}_p^1(\Gamma)$ dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)$. L'indice p indique à chaque fois la périodicité sur Γ dans les espaces considérés,
- $I_\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[$, $I_1 =]-1, 1[$,
- la normale ν au bord $\partial\omega_\varepsilon = \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}$ s'écrit $\pm e_3$ où $e_3 = (0, 0, 1)^t$,
- pour tout $x \in \Gamma \times \mathbb{R}$, $x = (\sigma, z)$ avec $\sigma = (x_1, x_2) \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, nous travaillerons avec la forme équivalente de l'équation de Landau-Lifschitz (2.0.1) donnée par G. Carbou et P. Fabrie [17] pour des solutions suffisamment régulières, cette forme isolant la partie dissipative de l'équation :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon)). \quad (2.0.3)$$

Lors de l'étude des comportements de u^ε et $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$, nous distinguons le comportement à l'intérieur et à l'extérieur de la couche mince. Comme nous avons besoin de déterminer le champ magnétique dans l'espace tout entier, nous avons besoin de conditions de transmissions pour lier ce qui se passe dans la couche mince à ce qui se passe à l'extérieur, et donc décrire les phénomènes se produisant à l'interface du domaine. Elles se déduisent de (2.0.2) :

$$\begin{cases} [H(u) \wedge e_3] = 0 \text{ sur } \omega \times \{\pm \varepsilon\}, \\ [(H(u) + \bar{u}) \cdot e_3] = 0 \text{ sur } \omega \times \{\pm \varepsilon\}, \end{cases} \quad (2.0.4)$$

où $[v] = v(z^+) - v(z^-)$ est le saut de v lors de la traversée de l'interface $\omega \times \{\pm \varepsilon\}$.

A l'intérieur de la couche mince, nous effectuons un changement d'échelle afin de nous ramener au domaine $\Gamma \times I_1 = \Gamma \times]-1, 1[$. Ce faisant, nous introduisons de l'anisotropie dans les équations, qui va nous permettre de préciser le comportement de u^ε et $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ grâce à un développement asymptotique. Pour la gérer, nous décomposons les opérateurs différentiels de la façon suivante :

- $\nabla u = \nabla_x u + (\partial_z u) e_3$ où $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, 0)^t$,
- $\operatorname{div} V = \operatorname{div}_x V + \partial_z V_3$ où $\operatorname{div}_x = (\nabla_x, \cdot)$ et $V = (V_1, V_2, V_3)^t$,
- $\Delta u = \Delta_x u + \partial_z^2 u$ où $\Delta_x = \operatorname{div}_x \nabla_x$,
- $\operatorname{rot} V = \operatorname{rot}_x V + e_3 \wedge (\partial_z V)$, où $\operatorname{rot}_x = (\nabla_x \wedge \cdot)$,

et nous utilisons les espaces de Sobolev anisotropes de la définition 2.2.1. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.0.1

Soit une donnée initiale u_0^ε satisfaisant

$$u_0^\varepsilon(x) = U_0^0(\sigma), \quad \forall x = (\sigma, z) \in \omega_\varepsilon,$$

où U_0^0 est indépendant de ε , $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma)$. Si on note T^ε le temps d'existence maximal de la solution régulière u^ε de l'équation (2.0.1) alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^\varepsilon = +\infty$ et pour tout $0 < T < T^\varepsilon$, il existe des profils

U^0 et U^1 vérifiant

- $U^0 \in C^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma))$ est solution de l'équation (2.0.1) avec $\varepsilon = 0$, i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) \text{ dans } \Gamma, \\ U^0(0, \cdot) = u_0 \text{ dans } \Gamma, \end{cases}$$

où $H^0 = -U_3^0 e^3$ est un opérateur local,

- pour tout $0 < T < T^\varepsilon$,

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right],$$

tels que la solution u^ε s'écrit :

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0(t, \sigma) + \varepsilon U^1 \left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(t, x),$$

où $r^\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon))$, pour tout $2 \leq p \leq +\infty$ et $0 < T < T^\varepsilon$, satisfait :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/p}).$$

Remarque 2.0.2

Pour obtenir ce théorème, nous devons pousser le développement asymptotique formel jusqu'à l'ordre 3, ce qui nous permet d'énoncer, de la même façon, le théorème avec un développement limité poussé à l'ordre 2 (Nous ne l'avons pas fait par souci de clarté).

Il est possible d'imposer des données initiales aux profils suivants, ce qui est fait au cours de la démonstration, à la condition que la donnée initiale u_0^ε satisfasse $\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, condition qui est automatiquement satisfaite pour une donnée initiale ne variant pas dans l'épaisseur de la couche mince.

Dans la suite, nous construisons tout d'abord formellement le développement asymptotique de u^ε et nous prouvons des résultats d'existence et de régularité pour tous temps de ses termes jusqu'à l'ordre 3 (Partie 2.1). Nous donnons les outils nécessaires pour effectuer les estimations de Sobolev sur des domaines minces à la partie 2.2. Les équations satisfaites par les termes de reste de u^ε et $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$, ainsi que les résultats d'existence et les estimations d'énergie qui concluent la preuve du théorème 2.0.1 sont donnés dans la partie 2.3.

2.1 Développement asymptotique

Nous cherchons les développements asymptotiques de u^ε et $H^\varepsilon = \mathcal{H}(u^\varepsilon)$ sous la forme :

– dans ω_ε , $x = (\sigma, z) \in \omega_\varepsilon$,

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots \quad (2.1.1)$$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon H^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \dots$$

– dans $(\Gamma \times \mathbb{R}) \setminus \omega_\varepsilon$, $x = (\sigma, z) \in]0, 1[^2 \times (\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[)$,

$$H^\varepsilon(t, x, z) = H^0(t, \sigma, z) + \varepsilon H^1(t, \sigma, z) + \dots \quad (2.1.2)$$

2.1.1 Equations des profils

Nous substituons à u^ε et H^ε leurs développements asymptotiques dans les équations (2.0.3)-(2.0.2) afin d'obtenir les expressions satisfaites par les termes du développement pour $(\sigma, z) \in \Gamma \times I_1$ ou $(\sigma, z) \in (\Gamma \times \mathbb{R}) \setminus \omega_\varepsilon$.

Comme les équations (2.0.2) sont linéaires, chaque H^i satisfait (2.0.2) hors de ω_ε . Afin de déterminer H^i , nous avons besoin de coupler le comportement du champ magnétique de part et d'autre du bord $\partial\omega_\varepsilon$. Le développement asymptotique, injecté formellement dans les conditions de transmission, donne pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} [H^i \wedge e_3] = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}, \\ \left[\left(H^i + \overline{U^i} \right) \cdot e_3 \right] = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Pour pouvoir déterminer H^i à l'intérieur de la couche mince, nous devons résoudre les équations (2.0.2) hors de ω_ε , donc dans deux demi-espaces, et obtenir plus particulièrement une relation entre les composantes tangentielle et normale au bord extérieur de $\partial\omega_\varepsilon$.

En injectant formellement, le développement asymptotique dans la condition de Neumann sur u^ε , nous obtenons formellement $(\partial_z U^i)|_{z=\pm 1} = 0$ pour tous $i \in \mathbb{N}$.

Calculs préliminaires :

Dans ω_ε , en utilisant la décomposition formelle des opérateurs différentiels et le changement d'échelle, nous en obtenons des expressions anisotropes :

$$\nabla V(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} (e_3 \partial_z) V^0 + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i (\nabla_x V^i + (e_3 \partial_z) V_3^{i+1}),$$

$$\operatorname{div} V(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_z V_3^0 + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i (\operatorname{div}_x V^i + \partial_z V_3^{i+1}),$$

$$\operatorname{rot} V(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_z (e_3 \wedge V^0) + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i (\operatorname{rot}_x V^i + \partial_z (e_3 \wedge V^{i+1})),$$

$$\Delta V(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z^2 V^0 + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z^2 V^1 + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i (\Delta_x V^i + \partial_z^2 V^{i+2}),$$

où $V = (V_1, V_2, V_3)$. Nous reprenons les équations (2.0.3)-(2.0.2) en y injectant les développements asymptotiques précédents. En annulant les termes de ces équations aux différents ordres en ε , nous obtenons :

Termes à l'ordre ε^{-1} : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^0 + U_3^0) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^0) = 0. \end{cases}$$

La quantité $H^0 + U_3^0 e_3$ ne dépend donc pas de z . L'étude du comportement du champ magnétique à l'extérieur de la couche mince, nous montrera que ce la implique :

$$H^0 = -U_3^0 e_3. \quad (2.1.4)$$

Remarque 2.1.1

Bien que le champ magnétique $H^\varepsilon = \mathcal{H}(u^\varepsilon)$ satisfasse une équation globale dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, il devient un **opérateur local** à l'ordre 0 (voir aussi G. Carbou [14] et H. Haddar [31]).

Termes à l'ordre ε^0 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\frac{\partial U^0}{\partial t} - \partial_z^2 U^0 = |\partial_z U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0), \quad (2.1.5)$$

Comme nous supposons que U_0^0 ne dépend pas de z , nous pouvons prouver (voir l'annexe 11.1) que U^0 ne dépend pas de z et est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{sur } \Gamma, \\ U^0(t=0) = U_0^0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où H^0 est l'opérateur local défini précédemment. La seconde équation nous donne :

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^1 + U_3^1) + \operatorname{div}_x (H^0 + U^0) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^1) + \operatorname{rot}_x H^0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Termes d'ordre ε : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \partial_z^2 U^1 = & |\partial_z U^0|^2 U^1 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^0 \\ & + U^1 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ & - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^2 + U_3^2) + \operatorname{div}_x (H^1 + U^1) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^2) + \operatorname{rot}_x H^1 = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Termes d'ordre ε^2 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \partial_z^2 U^2 = & |\partial_z U^0|^2 U^2 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^2) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^0 \\ & + U^2 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^2 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) \\ & - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + \Delta_x U^0 + |\partial_z U^1|^2 U^0 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^1 + |\nabla_x U^0|^2 U^0 \\ & + U^0 \wedge \Delta_x U^0 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0), \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^3 + U_3^3) + \operatorname{div}_x (H^2 + U^2) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^3) + \operatorname{rot}_x H^2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Termes d'ordre ε^3 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \partial_z^2 U^3 = & |\partial_z U^0|^2 U^3 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^3) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^3 + U^3 \wedge \partial_z^2 U^0 \\ & + U^3 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^3 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) \\ & - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + \Delta_x U^1 + |\partial_z U^1|^2 U^1 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^2 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^2) U^1 \\ & + 2(\partial_z U^1 \cdot \partial_z U^2) U^0 + |\nabla_x U^0|^2 U^1 + 2(\nabla_x U^0 \cdot \nabla_x U^1) U^0 \\ & + U^1 \wedge \Delta_x U^0 + U^0 \wedge \Delta_x U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^1 \\ & + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ & - U^2 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

2.1.2 Etude des profils

2.1.2.1 Comportement de H à l'extérieur de la couche mince

Nous notons H^+ (resp. H^-) la restriction du champ magnétique H au domaine $\Gamma \times]\varepsilon, +\infty[$ (resp. $\Gamma \times]-\infty, -\varepsilon[$) et par J_ε^+ (resp. J_ε^-) le domaine $]\varepsilon, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -\varepsilon[$). H satisfait les équations :

$$\begin{cases} H^\pm \in \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times J_\varepsilon^\pm), \\ \text{rot } H^\pm = 0 \text{ dans } \Gamma \times J_\varepsilon^\pm, \\ \text{div } H^\pm = 0 \text{ dans } \Gamma \times J_\varepsilon^\pm, \\ H^\pm \cdot e_3 = f^\pm \text{ ou } H^\pm \wedge e_3 = g^\pm \text{ sur } \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}, \end{cases} \quad (2.1.12)$$

où $f^\pm \in \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma \times \{\pm\varepsilon\}; \mathbb{R})$, $g^\pm \in \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma \times \{\pm\varepsilon\}; \mathbb{R}^3)$, $g^\pm$ est orthogonal à e_3 et $l \in \mathbb{N}$.

Nous cherchons une expression de $H^\pm \wedge e_3$ (resp. $H^\pm \cdot e_3$) en fonction de $H^\pm \cdot e_3$ (resp. $H^\pm \wedge e_3$) sur $\Gamma \times \{\pm\varepsilon\}$.

Lemme 2.1.1

Pour tout $f \in \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R})$, nous considérons $H \in \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^3)$, solution de

$$\begin{cases} \text{rot } H = 0 \text{ dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \text{div } H = 0 \text{ dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ H \cdot e_3 = f \text{ sur } \Gamma \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.1.13)$$

et nous définissons l'opérateur $\varphi : \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3)$ qui associe $(H \wedge e_3)|_{z=0}$ à $(H \cdot e_3)|_{z=0}$. φ est continue et est donnée par ses coefficients de Fourier :

$$c_k(\varphi(f)) = c_k(f) \frac{i}{|k|} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \quad c_0(\varphi(f)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, pour tout $g \in \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3)$, g étant orthogonale à e_3 , nous considérons H solution de

$$\begin{cases} \text{rot } H = 0 \text{ dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \text{div } H = 0 \text{ dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ H \wedge e_3 = g \text{ sur } \Gamma \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.1.14)$$

et nous définissons l'opérateur $\Psi : \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{H}_p^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R})$ qui envoie $(H \wedge e_3)|_{z=0}$ sur $(H \cdot e_3)|_{z=0}$. Ψ est continue et est obtenue grâce à ses coefficients de Fourier :

$$c_k \left(\Psi \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{i}{|k|} (k_2 c_k(g_1) - k_1 c_k(g_2)) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \quad c_0 \left(\Psi \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Preuve. Comme le problème, ainsi que les conditions aux limites sont périodiques, nous considérons les séries de Fourier de H , f et g :

$$V = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{2\pi i(k \cdot x)} \text{ dans } \mathbb{L}_p^2(\omega),$$

$$\text{où } c_k = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} V(x) e^{-2\pi i(k \cdot x)} dx, \forall k \in \mathbb{Z}^2.$$

Nous avons alors pour tous $k \in \mathbb{Z}^2$ l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d}{dz} c_k(H) + A c_k(H) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+,$$

$$\text{où } A = 2i\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est hermitienne et diagonalisable pour tout } k \neq (0, 0), \text{ et}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\pi|k| & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi|k| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base de vecteurs propres

$$e'_1 = \left(-i \frac{k_1}{|k|}, -i \frac{k_2}{|k|}, 1 \right), e'_2 = \left(i \frac{k_1}{|k|}, i \frac{k_2}{|k|}, 1 \right) \text{ et } e'_3 = \left(\frac{-k_2}{|k|}, \frac{k_1}{|k|}, 0 \right).$$

Comme nous cherchons des solutions dans $\mathbb{L}_p^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+)$, seule la composante de e'_1 ne s'annule pas. Nous obtenons finalement :

– si $(H \cdot e_3)|_{z=0} = f$, alors pour tous $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$

$$c_k(H) = c_k(f) e^{-2\pi z|k|} \begin{pmatrix} -i \frac{k_1}{|k|} \\ -i \frac{k_2}{|k|} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_0(H) = 0,$$

– si $(H \wedge e_3)|_{z=0} = g = (g_1, g_2, 0)$, alors pour tous $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ (comme $k_1 c_k(H_2) = k_2 c_k(H_1)$, cf (2.1.13))

$$c_k(H) = e^{-2\pi z|k|} \begin{pmatrix} -c_k(g_2) \\ c_k(g_1) \\ \frac{i}{|k|} (k_2 c_k(g_1) - k_1 c_k(g_2)) \end{pmatrix}, \quad c_0(H) = 0.$$

■

Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 2.1.2

Il existe des applications

– $\varphi^\pm : \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3)$ qui associe à $(H \cdot e_3)|_{z=\pm\epsilon/2}$ le vecteur $(H \wedge e_3)|_{z=\pm\epsilon/2}$,

– $\Psi^\pm : \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{H}_p^{l+\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R})$ qui associe à $(H \wedge e_3)|_{z=\pm\epsilon/2}$ le réel $(H \cdot e_3)|_{z=\pm\epsilon/2}$,

où H est solution de (2.1.12). De plus, pour tous $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$,

$$c_k(\varphi^\pm(f)) = \pm c_k(f) \frac{i}{|k|} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_k \left(\Psi^\pm \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \pm \frac{i}{|k|} (k_2 c_k(g_1) - k_1 c_k(g_2)).$$

$$\text{et } c_0(\varphi^\pm(f)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_0 \left(\Psi^\pm \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

2.1.2.2 Existence de U^0

Théorème 2.1.1

Soit U_0^0 telle que $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma)$, il existe alors une unique solution à l'équation (2.1.15) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma, \\ U^0(0) = U_0^0 & \text{dans } \Gamma \\ H^0 = -(U^0 \cdot e_3)e_3 & \text{dans } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1.15)$$

telle que $|U^0| = 1$ et $U^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma))$.

Remarque 2.1.2

Si nous prenons une donnée initiale U_0^0 dépendant de z et si nous souhaitons obtenir l'existence sur $\mathbb{R}_t^+$, nous avons besoin que la partie dépendant de z dans U_0^0 i.e.

$\widetilde{U}_0^0 = U_0^0 - \overline{U}_0^0 = U_0^0 - \int_{-1}^1 U_0^0(x, z) dz$ soit beaucoup plus petite que $\overline{U}_0^0$. Ce choix ne change rien aux estimations de reste décrites dans ce chapitre, mais modifie les équations satisfaites par les profils suivants.

Preuve. Le profil principal du champ magnétique, H^0 , vérifie :

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^0 + U_3^0) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^0) = 0. \end{cases}$$

La quantité $H^0 + U_3^0 e_3$ ne dépend donc pas de z . En appliquant le lemme 2.1.2, nous obtenons

$$c_k(H^0 \wedge e_3) = \pm c_k (H_3^0 + U_3^0) \frac{i}{|k|} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } k \neq 0 \text{ et } c_0(H^0 \wedge e_3) = 0,$$

soit $H^0 \wedge e_3 = 0$ et $H_3^0 + U_3^0 = 0$,

$$H^0 = -U_3^0 e_3. \quad (2.1.16)$$

Comme $\mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma; \mathbb{R}^3)$ est une algèbre, nous avons l'existence et l'unicité de U^0 , solution de l'équation différentielle ordinaire précédente, dans l'espace $C^\infty(0, T; \mathbb{W}_p^{7,\infty}(\Gamma))$. Nous obtenons immédiatement que $|U(t)|$ ne varie pas sur $(0, T)$. Au moyen du lemme de Gronwall et d'estimations sur $\nabla_x U^0, \nabla_x^2 U^0, \dots$ nous prouvons que la solution est globale en temps. ■

2.1.2.3 Existence de U^1

Théorème 2.1.2

Sous les hypothèses du théorème 2.1.1 et avec les hypothèses supplémentaires $U_0^1 \in \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$ et $\partial_z U_0^1 = 0$ sur $\Gamma \times \{\pm 1\}$, il existe une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \partial_z^2 U^1 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ \quad - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^1 = 0 & \text{sur } \Gamma \times \{\pm 1\}, \\ U^1(0, \cdot) = U_0^1(\cdot) & \text{dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (2.1.17)$$

et

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^1 + U_3^1) + \operatorname{div}_x (H^0 + U^0) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^1) + \operatorname{rot}_x H^0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.18)$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. Les équations (2.1.18) donnent :

$$\begin{cases} (H_3^1 + U_3^1) + (z+1) (\operatorname{div}_x U^0) (z') = a(\sigma), \\ e_3 \wedge H^1 + (z+1) (\operatorname{rot}_x H^0) (z') = b(\sigma), \end{cases}$$

où a et b sont deux fonctions périodiques que nous déterminons grâce au lemme 2.1.2. Pour tous $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$,

$$c_k(a) = 2i\pi \left[k \cdot c_k(U^0) - i|k| c_k(H^0) \cdot e_3 \right],$$

$$c_k(b) = 2i\pi \left[k \wedge c_k(H^0) - i \frac{k}{|k|} \cdot c_k(U^0) \begin{pmatrix} -k1 \\ k2 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$c_0(a) = 0, \quad c_0(b) = 0.$$

Le profil H^1 s'écrit donc $H^1 = p(U^1) + q(\sigma, z)$, où $p(V) = -V_3 e_3$ et $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_p^6(\Gamma))$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \partial_z^2 U^1 &= U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^0 + U^0 \wedge p(U^1) - U^0 \wedge (U^0 \wedge p(U^1)) \\ &\quad - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) + f(t, \sigma, z) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

où $f(t, \sigma, z) = U^0 \wedge q(t, \sigma, z) - U^0 \wedge (U^0 \wedge q(t, \sigma, z)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathcal{C}^\infty(-1, 1))$.

La variable $\sigma \in \Gamma$ est uniquement considérée comme un paramètre pour l'instant. Nous utilisons une approximation de Galerkin sur I_1 : soit $(w_i)_i$ une bases de fonctions propres de l'opérateur $A = I - \partial_z^2$ de domaine $D(A) = \mathbb{H}^2(I_1)$ avec des conditions de Neumann au bord. Soit $W_N = \operatorname{Vect}(w_1, \dots, w_n)$. Nous avons alors l'existence de solutions v^N dans $\mathcal{C}^\infty(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes W_N)$ pour tout $T > 0$.

Procédons à des estimations *a priori* de la solution approchée :

Estimations $\mathbb{L}^2$: nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 + \|\partial_z v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 \leq C \|v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 + \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)} \|v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)},$$

puis

$$\frac{d}{dt} \|v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 + \|\partial_z v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 \leq C \left(1 + \|v^N\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_1)}^2 \right).$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous avons :

$$v^N \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times I_1)), \quad \partial_z v^N \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times I_1)).$$

Estimations $\mathbb{H}^1$: effectuons le produit par $\partial_z^2 v^N$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_z v^N\|_2^2 + \|\partial_z^2 v^N\|_2^2 \leq C \|v^N\|_2 \|\partial_z^2 v^N\|_2 + \|\partial_z^2 v^N\|_2 \|f\|_2.$$

De la même façon, il suit

$$\partial_z v^N \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times I_1)), \quad \partial_z^2 v^N \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times I_1)).$$

et finalement $v^N \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}_p^2(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$.

La variable σ n'était considérée que comme un paramètre jusqu'à présent. Nous allons maintenant obtenir de la régularité en $\sigma \in \Gamma$. En dérivant l'équation (2.1.19) en σ et en effectuant les mêmes estimations *a priori* pour z (puisque l'équation est linéaire en la dérivée en σ de plus haut degré), nous obtenons :

$$v^N \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)).$$

En dérivant maintenant en temps l'équation (2.1.19), nous obtenons dans $\Gamma \times I_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^N}{\partial t^2} - \frac{\partial(\partial_z^2 v^N)}{\partial t} &= U^0 \wedge \frac{\partial(\partial_z^2 v^N)}{\partial t} + \frac{\partial v^N}{\partial t} \wedge H^0 + U^0 \wedge p\left(\frac{\partial v^N}{\partial t}\right) - U^0 \wedge \left(U^0 \wedge p\left(\frac{\partial v^N}{\partial t}\right)\right) \\ &\quad - U^0 \wedge \left(\frac{\partial v^N}{\partial t} \wedge H^0\right) - \frac{\partial v^N}{\partial t} \wedge (U^0 \wedge H^0) + A(v^N) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, \sigma, z), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A(v^N) &= \frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge \partial_z^2 v^N + v^N \wedge \frac{\partial H^0}{\partial t} + \frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge p(v^N) - \frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge (U^0 \wedge p(v^N)) \\ &\quad - U^0 \wedge \left(\frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge p(v^N)\right) - \frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge (v^N \wedge H^0) - U^0 \wedge \left(v^N \wedge \frac{\partial H^0}{\partial t}\right) \\ &\quad - v^N \wedge \left(\frac{\partial U^0}{\partial t} \wedge H^0\right) - v^N \wedge \left(U^0 \wedge \frac{\partial H^0}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les estimations précédentes sur v^N et la même méthode, nous déduisons des estimations sur $\frac{\partial v^N}{\partial t}$:

$$v^N \in \mathbb{W}^{1,\infty}(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)).$$

De la même manière, pour $0 \leq k \leq 2$ (nous sommes limités par la régularité de U_0^1), nous avons :

$$v^N \in \mathbb{W}^{k,\infty}(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)),$$

En utilisant la compacité faible- $\star$ dans $\mathbb{L}^\infty$ et la compacité faible dans $\mathbb{L}^2$, nous passons à la limite en N . D'où, pour $0 \leq k \leq 2$:

$$U^1 \in \mathbb{W}^{k,\infty}(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)).$$

Si nous réécrivons l'équation (2.1.19), nous avons

$$\begin{aligned} \partial_z^2 U^1 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 &= \frac{\partial U^1}{\partial t} - U^1 \wedge H^0 - U^0 \wedge p(U^1) + U^0 \wedge (U^0 \wedge p(U^1)) \\ &\quad + U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) + U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) - f(t, \sigma, z) \text{ dans } \omega \times I_1. \end{aligned}$$

Comme $(I + U^0 \wedge)$ est inversible d'inverse $I - \frac{1}{2}(U^0 \wedge) + \frac{1}{2}U^0 \wedge (U^0 \wedge)$, pour $k = 0, 1$,

$$\partial_z^2 U^1 \in \mathbb{W}^{k,\infty}(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^1(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)).$$

D'où, pour tout $T > 0$,

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

■

2.1.2.4 Existence de U^2

Théorème 2.1.3

Sous les hypothèses des théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 et sous les hypothèse supplémentaires $U_0^2 \in \mathbb{H}^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$ et $\partial_z U_0^2 = 0$ sur $\Gamma \times \{\pm 1\}$, il existe une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \partial_z^2 U^2 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^2 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) \\ \quad - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{\pm 1\}, \\ U^2(0, \cdot) = U_0^2(\cdot) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (2.1.20)$$

où

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^2 + U_3^2) + \operatorname{div}_x (H^1 + U^1) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^2) + \operatorname{rot}_x H^1 = 0, \end{cases}$$

et

$$F = \Delta_x U^0 + |\partial_z U^1|^2 U^0 + |\nabla_x U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_x U^0 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^1 \\ - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0),$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^2 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. En procédant de même qu'au théorème 2.1.2, nous avons

$$H^2 = -U_3^2 e_3 + q',$$

$$\text{où } q' \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{7-2k}(I_1) \right) \right].$$

Les théorèmes 2.1.1, 2.1.2 nous donnent que

$$F \in \mathbb{H}^2 \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{L}^2(I_1) \right).$$

En suivant la preuve du théorème 2.1.2, nous obtenons que pour tout $T > 0$,

$$U^2 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

■

2.1.2.5 Existence de U^3

Théorème 2.1.4

Sous les hypothèses des théorèmes 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3 et sous les hypothèse supplémentaires $U_0^3 \in \mathbb{H}^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$ et $\partial_z U_0^3 = 0$ sur $\Gamma \times \{\pm 1\}$, il existe une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \partial_z^2 U^3 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^3 + U^3 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^3 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) \\ \quad - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^3 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{\pm 1\}, \\ U^3(0, \cdot) = U_0^3(\cdot) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (2.1.21)$$

où

$$\begin{cases} \partial_z (H_3^3 + U_3^3) + \operatorname{div}_x (H^1 + U^1) = 0, \\ \partial_z (e_3 \wedge H^3) + \operatorname{rot}_x H^2 = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} F = & \Delta_x U^1 + |\partial_z U^1|^2 U^1 + 2(\partial_z U^1 \cdot \partial_z U^2) U^0 + |\nabla_x U^0|^2 U^1 + 2(\nabla_x U^0 \cdot \nabla_x U^1) U^0 \\ & + U^1 \wedge \Delta_x U^0 + U^0 \wedge \Delta_x U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 \\ & - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) \\ & - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^2 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1). \end{aligned}$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^3 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. De même qu'au théorème 2.1.2, nous avons

$$H^2 = -U_3^2 e_3 + q'',$$

$$\text{où } q' \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{7-2k}(I_1) \right) \right].$$

Les théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 nous donnent que

$$F \in \mathbb{H}^2 \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{L}^2(I_1) \right).$$

En suivant la preuve du théorème 2.1.2, nous obtenons que pour tout $T > 0$,

$$U^3 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}_p^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

■

2.2 Injections de Sobolev et estimations d'énergie en couche mince

Nous devons maintenant effectuer des estimations sur les restes des champ et moment magnétiques, ces restes étant définis sur le domaine ω_ε . Au cours de ces estimations, nous utiliserons entre autres des injections de Sobolev. Les résultats classiques font apparaître des constantes dépendant du domaine, ici ω_ε , et dépendant donc de ε . Comme nous nous intéressons dans cette étude au comportement du champ et du moment magnétique pour de petites valeurs du paramètre ε , nous avons besoin pour boucler les estimations de connaître cette dépendance.

2.2.1 Injections de Sobolev anisotropes

Dans un premier temps, nous rappelons quelques résultats classiques concernant les injections de Sobolev (voir [2, 24] par exemple) :

Théorème 2.2.1

Soient $1 \leq p \leq +\infty$, et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

- Dès que $mp > n$, $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^0(\overline{\Omega})$. Si, de plus, Ω est borné, l'injection est compacte.
- Dès que $mp < n$, $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathbb{L}^q(\Omega)$ pour $p \leq q \leq np/(n - mp)$. Si, de plus, Ω est borné, l'injection est compacte si $q < np/(n - mp)$.
- Si $mp = n$, l'injection précédente reste vraie avec $p \leq q < +\infty$.

Afin de préciser la dépendance de ces injections en le domaine, nous donnons des versions anisotropes des résultats précédents. Dans [55], R. Temam et M. Ziane prouvent les résultats suivants :

Théorème 2.2.2 (Inégalité d'Agmon anisotrope)

Soit $\Omega_0 =]0, 1[^3$. Il existe une constante absolue C telle que

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_0)} \leq C \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{4}} \prod_{i=1}^3 \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} + \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.2.1)$$

pour tout $u \in \mathbb{H}^2(\Omega_0)$.

Théorème 2.2.3 (Inégalité de Ladyzhenskaya anisotrope)

Soit $\Omega_0 = \prod_{i=1}^3]0, 1[$ avec $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Il existe une constante absolue C telle que

$$\|u\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^3 \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_i} \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.2.2)$$

pour tout $u \in \mathbb{H}^1(\Omega_0)$.

Lors de nos estimations nous auront besoin également d'une version anisotrope de l'injection de $\mathbb{H}^{5/4}$ dans $\mathbb{L}^{12}$ plus précise que celle que l'on pourrait construire à partir de l'injection dans $\mathbb{L}^\infty$. On l'obtient en considérant $\mathbb{H}^{5/4}$ comme une interpolation de $\mathbb{H}^1$ et $\mathbb{H}^2$ (voir [42]). Nous montrons le résultat plus général suivant :

Théorème 2.2.4

Soit $\Omega_0 =]0, 1[^d$ et $s = k + \theta < \frac{d}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta < 1$. Il existe alors une constante absolue C telle que

$$\|u\|_{\mathbb{L}^q(\Omega_0)} \leq C \prod_{i=1}^d \left(\sum_{j=0}^k \left\| \frac{\partial^j u}{\partial x_i^j} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} \right)^{\frac{1-\theta}{d}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial x_i^j} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} \right)^{\frac{\theta}{d}}, \quad \text{où } q = \frac{2d}{d-2s}. \quad (2.2.3)$$

Preuve. La preuve de ce résultat suit le schéma donné dans [55] pour l'inégalité d'Agmon anisotrope.

Nous avons l'injection de Sobolev classique : si $2p < d$, $\mathbb{H}^p(\Omega_0)$ s'injecte continûment dans $\mathbb{L}^q(\Omega_0)$ pour $q = \frac{2d}{d-2p}$. Soit $s = k + \theta$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \theta < 1$. Nous prouvons le résultat en trois étapes.

Etape 1. Nous remplaçons Ω_0 par $\mathbb{R}^d$ et nous supposons que $u \in \mathcal{C}_0^{k+1}(\mathbb{R}^d)$. L'injection de Sobolev nous donne :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|u\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^d)} = c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.4)$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u . Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_i > 0$. Nous posons, pour tous $i = 1$ à d , $y_i = \lambda_i x_i$ et nous définissons la fonction $v_\lambda \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ comme suit :

$$v_\lambda(y_1, \dots, y_d) = u\left(\frac{y_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{y_d}{\lambda_d}\right). \quad (2.2.5)$$

Nous avons immédiatement :

$$\begin{cases} \|v_\lambda\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)} = \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)}, \\ \hat{v}_\lambda(\xi_1, \dots, \xi_d) = \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right) \hat{u}(\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_d \xi_d). \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Soit $\xi' = (\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_d \xi_d)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|v_\lambda\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^d)} &= \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right) \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi')|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi')|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right)^{\frac{1}{2}} \left[\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 + C \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\xi'_i}{\lambda_i}\right)^{2s} |\hat{u}(\xi')|^2 d\xi' \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Le lemme de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\xi'_i)^{2s} |\hat{u}(\xi')|^2 d\xi' &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi_i|^{2k} |\hat{u}|^2 d\xi_i \right)^{2(1-\theta)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi_i|^{2k+2} |\hat{u}|^2 d\xi_i \right)^{2\theta} \\ &\leq \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{2(1-\theta)} \left\| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{2\theta}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (2.2.4) à v_λ , nous obtenons :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left[\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 + C \sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_i^{2s}} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{2(1-\theta)} \left\| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{2\theta} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.8)$$

et puisque (2.2.8) est valide pour tout choix de $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, nous pouvons prendre

$$\lambda_i = C^{\frac{1}{2s}} \left[\frac{\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{(1-\theta)} \left\| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{\theta}}{\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}} \right]^{\frac{1}{s}} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, d,$$

D'où,

$$\|u\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq c_1 \prod_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1-\theta}{d}} \left\| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\theta}{d}}.$$

Etape 2. Nous montrons maintenant qu'il existe une constante absolue $c_2 > 0$, telle que, si $u \in C_0^{k+1}(\overline{\Omega_0})$, il existe alors $\bar{u} \in C_0^{k+1}(\overline{\Omega_1})$, où $\Omega_1 = \left] -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right]^d$ tel que :

$$\left\| \frac{\partial^j u}{\partial x_i^j} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_1)} \leq c_2 \left\| \frac{\partial^j \bar{u}}{\partial x_i^j} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)}, \quad j = 0, \dots, k+1; \quad i = 1, \dots, d.$$

Nous utilisons les opérateurs de prolongement de Babitch (voir [2, 44]) ; nous étendons tout d'abord u au domaine $\left] -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right[\times]0, 1]^2$ en utilisant

$$E_k^1 u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pour } x_1 \in [0, 1], \\ \sum_{j=1}^{k+2} (-j)^l \alpha_j u(-jx_1, x_2, \dots, x_d) & \text{pour } x_1 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \\ \sum_{j=1}^{k+2} (-j)^l \alpha_j u(1-j(x_1-1), x_2, \dots, x_d) & \text{pour } x_1 \in \left]1, \frac{4}{3}\right], \end{cases}$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$ est l'unique solution du système :

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-j)^l \alpha_j = 1, \quad l = 0, \dots, k+1. \quad (2.2.9)$$

Nous obtenons immédiatement :

$$\frac{\partial^l E_0^1 u}{\partial x_i^l} = E_l^1 \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l}, \quad l = 0, \dots, k+1; \quad i = 1, \dots, d,$$

et (2.2.9) implique que $E_0^1 u \in \mathcal{C}^{k+1}([-1/3, 4/3] \times [0, 1]^2)$ si $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega_0})$.

De plus,

$$\begin{aligned} & \int_{(-1/3, 4/3) \times (0, 1)^2} \left| \frac{\partial^k E_0^1 u}{\partial x_i^k} \right|^2 dx = \int_{(-1/3, 4/3) \times (0, 1)^2} \left| E_k^1 \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right|^2 dx + \int_{(-1/3, 0) \times (0, 1)^2} \left| \sum_{j=1}^3 (-j)^k \alpha_j \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}(-jx_1, x_2, \dots, x_d) \right|^2 dx \\ &+ \int_{(1, 4/3) \times (0, 1)^2} \left| \sum_{j=1}^3 (-j)^k \alpha_j \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}(1-j(x_1-1), x_2, \dots, x_d) \right|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Nous avons fini le prolongement dans la direction x_1 . En appliquant successivement le même argument aux directions $x_2, \dots, x_d$, nous étendons le domaine à Ω_1 et le prolongement satisfait :

$$\left\| \frac{\partial^l \bar{u}}{\partial x_i^l} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_1)}^2 \leq C_1^d \left\| \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)}^2 \quad l = 0, \dots, k+1; \quad i = 1, \dots, d.$$

Etape 3. Nous montrons que nous pouvons localiser la fonction sans mélanger les dérivées partielles. Soit

$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } \varphi \subset]-1/3, 4/3[$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur $[0, 1]$. Soit $\Phi(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d \varphi(x_i)$.

Nous obtenons immédiatement que $\Phi \bar{u} \in \mathcal{C}_0^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ et $\|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega_0)} \leq \|\Phi \bar{u}\|_{\mathbb{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leq c_3 \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega_0)}$ pour tout $1 \leq r \leq +\infty$, où $\bar{u}$ est défini à l'étape 2 et c_3 est une constante absolue. De plus,

$$\frac{\partial^l \Phi \bar{u}}{\partial x_i^l} = \sum_{i=0}^l C_l^i \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial x_i^i} \frac{\partial^{l-i} \Phi}{\partial x_i^{l-i}}$$

En posant $K_l = \sup_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=0}^l C_l^i |\varphi^{(i)}| \right)$, nous avons :

$$\left\| \frac{\partial^l \Phi \bar{u}}{\partial x_i^l} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq K_l \left[\sum_{i=0}^l \left\| \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial x_i^i} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_1)} \right] \leq K_{1,l} \left[\sum_{i=0}^l \left\| \frac{\partial^i u}{\partial x_i^i} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_0)} \right],$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous nous plaçons maintenant dans le domaine $\omega_\varepsilon =]0, 1[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$, et nous introduisons des espaces de Sobolev anisotropes déduits des espaces de Sobolev usuels par changement d'échelle et renormalisation :

Définition 2.2.1

Pour $1 \leq p < +\infty$, nous définissons les espaces de Lebesgue de la façon suivante :

$$\mathbb{L}_\varepsilon^p = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon,p} = \left(\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,p} = \mathbb{L}_\varepsilon^p$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p} = \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^p, \nabla_x u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \text{ et } (\varepsilon \partial_z) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p}} = \left(|u|_{\varepsilon,p}^p + \|\nabla_x u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p + \|\varepsilon \partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p \right)^{1/p}.$$

Dans le cas $p = 2$, nous posons $\mathbb{H}_\varepsilon^m = \mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}$, et $\|u\|_{\varepsilon,m} = \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}}$.

Dans le cas $p = +\infty$, nous posons :

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\infty = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)| < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon,\infty} = \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)|.$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,\infty} = \mathbb{L}_\varepsilon^\infty$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty} = \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^\infty, \nabla_x u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \text{ et } (\varepsilon \partial_z) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty}} = \left(|u|_{\varepsilon,\infty} + \|\nabla_x u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} + \|\varepsilon \partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} \right).$$

Corollaire 2.2.1

Il existe une constante C indépendante de ε telle que :

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$, et pour $1 \leq p \leq 6$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}} \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{p}}. \quad (2.2.10)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$, et pour $2 \leq p \leq +\infty$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2p}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}}. \quad (2.2.11)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$,

$$|u|_{\varepsilon,12} \leq C \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}}. \quad (2.2.12)$$

Preuve. Nous obtenons la première estimation immédiatement dans le cas $p = 6$, grâce au théorème 2.2.3. En interpolant $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^6$, nous obtenons le résultat.

En utilisant le changement d'échelle (2.2.5) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = \frac{1}{\varepsilon}$, nous nous ramenons au domaine $(0, 1)^3$. Grâce aux équations (2.2.6) et (2.2.7), nous obtenons la deuxième inégalité, en reportant dans (2.2.1) avec $p = +\infty$. Une interpolation entre $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^\infty$ conclut.

En effectuant le même changement d'échelle, et en reportant dans (2.2.3) avec $p = 12$, nous obtenons la dernière inégalité. ■

2.2.2 Trace et relèvement

Rappelons tout d'abord une définition des espaces $\mathbb{H}^s(\Omega)$, $s = k + \theta > 0$, $0 < \theta < 1$ (voir [44, 43]) :

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{H}^k(\Omega), \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}.$$

En procédant à des changements d'échelle, nous définissons de même que pour les espaces $\mathbb{H}^p$, des espaces anisotropes sur le bord $\partial\omega_\varepsilon = \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}$ ($\Gamma =]0, 1[^2$, périodique, n'a pas de bord) :

$$\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon) = \left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^k(\partial\omega_\varepsilon), \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(\sigma, \pm\varepsilon) - D_\varepsilon^\alpha u(\sigma', \pm\varepsilon)|^2}{(|\sigma - \sigma'|^2)^{n/2+s}} d\sigma d\sigma' < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}^k(\partial\omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{z \in \{\pm 1\}} \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(\sigma, z\varepsilon) - D_\varepsilon^\alpha u(\sigma', z\varepsilon)|^2}{(|\sigma - \sigma'|^2)^{n/2+s}} d\sigma d\sigma' \right)^{1/2},$$

où $D_\varepsilon = (\nabla_x^t, \varepsilon \partial_z)^t$ et $\alpha \in \mathbb{N}^k$.

Lemme 2.2.1

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$,

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{\varepsilon, 1}.$$

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $0 < \varepsilon$ suffisamment petit et $f \in \mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$, il existe un relèvement $\psi \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$ de f tel que :

$$\|\psi\|_{\varepsilon, 1} \leq C \|f\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)}.$$

Preuve.

Théorème de trace anisotrope : pour tout $(\sigma, x) \in \Gamma \times I_1$, nous posons $v(\sigma, x) = u(\sigma, \varepsilon x)$. Nous appliquons maintenant le théorème de trace classique à v et nous obtenons :

$$\|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times \{\pm 1\})} \leq c \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Gamma \times]-1, 1[)},$$

où c ne dépend pas de ε . Nous effectuons quelques estimations sur v : nous obtenons de même qu'au lemme 2.2.1 que :

$$\|v\|_{\mathbb{H}^1(\Gamma \times]-1, 1[)} = \|u\|_{\varepsilon, 1}.$$

Comme nous avons défini les espaces $\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_{\varepsilon})$ tels qu'ils prennent immédiatement en compte l'anisotropie (comme pour les espaces de Sobolev), nous avons les estimations suivantes sur la norme $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}$:

$$C \|u\|_{\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_{\varepsilon})} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times \partial\Omega)} \leq C' \|u\|_{\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_{\varepsilon})},$$

ce qui donne le résultat.

Théorème de relèvement anisotrope : De même, nous appliquons le théorème de relèvement classique à $g(x, s) = f(\sigma, \varepsilon x)$, $(\sigma, x) \in \Gamma \times \{\pm 1\}$ et nous obtenons un relèvement $v \in \mathbb{H}^1(\Gamma \times]-1, 1[)$. L'application u définie par $u(\sigma, \varepsilon x) = v(\sigma, x)$ est alors un relèvement de $f \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_{\varepsilon})$ et les estimations précédentes donnent le résultat. ■

2.2.3 Quelques inégalités

Dans la suite, nous aurons recours aux résultats suivants :

Lemme 2.2.2

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante C telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ vérifiant $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2.13)$$

Il existe une constante C telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} u\|_{\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)} + \|\operatorname{rot} u\|_{\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)} + \|u \cdot \nu\|_{\mathbb{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (2.2.14)$$

Preuve. La première inégalité découle de la régularité de l'opérateur $I - \Delta$ de domaine

$$D(I - \Delta) = \left\{ u \in \mathbb{H}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

(voir [24] par exemple). La seconde inégalité est prouvée dans [26]. ■

Remarque 2.2.1

Le second résultat reste valide lorsqu'on remplace $u \cdot \nu$ par $u \wedge \nu$ et lorsqu'on travaille dans un domaine Ω de complémentaire borné.

Nous utiliserons aussi des versions anisotropes et en couche mince de ces résultats :

Lemme 2.2.3

Pour tout $u \in \mathbb{H}_{\varepsilon}^2$ tel que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\omega_{\varepsilon}$, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|u\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|u|_{\varepsilon,2}^2 + |\Delta_x u|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 u|_{\varepsilon,2}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.2.15)$$

Pour tout $u \in \mathbb{H}_{\varepsilon}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\varepsilon,m} \leq & C \left(|u|_{\varepsilon,2} + \|\operatorname{div}_x u\|_{\varepsilon,m-1} + \|\varepsilon \partial_z u\|_{\varepsilon,m-1} + \|\nabla_x \wedge u + \varepsilon(\nu \partial_z) \wedge u\|_{\varepsilon,m-1} \right. \\ & \left. + \|u \cdot \nu\|_{\mathbb{H}_{\varepsilon}^{m-\frac{1}{2}}(\partial\omega_{\varepsilon})} \right). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Preuve. En posant $v(\sigma, x) = u(\sigma, \varepsilon x)$, nous nous ramenons au domaine $\Gamma \times]-1, 1[$. Nous appliquons alors le lemme 2.2.2 à v , et nous en déduisons le résultat grâce au lemme 2.2.1. ■

Corollaire 2.2.2

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$ vérifiant $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, nous avons :

$$\|(\nabla_x + \varepsilon \nu \partial_z)u\|_{\varepsilon,1} \leq C \left(|\nabla_x u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z u|_{\varepsilon,2} + |\Delta_x u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 u|_{\varepsilon,2} \right). \quad (2.2.17)$$

De plus, si $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^3$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|(\nabla_x + \varepsilon \nu \partial_z)u\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|\nabla_x u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z u|_{\varepsilon,2} + \|\Delta_x u\|_{\varepsilon,1} + \|\varepsilon^2 \partial_z^2 u\|_{\varepsilon,1} \right). \quad (2.2.18)$$

2.3 Equations du reste - Estimations d'énergie

Pour justifier le développement asymptotique formel que nous venons d'effectuer, nous devons maintenant prouver l'existence du reste de $(u^\varepsilon, H^\varepsilon)$.

– Dans ω_ε , nous posons :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t, x) = U^0(t, \sigma) + \varepsilon U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 U^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 r^\varepsilon(t, x), \\ H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, \sigma) + \varepsilon H^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 H^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 H^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x), \end{cases}$$

– Dans $(\Gamma \times \mathbb{R}) \setminus \omega_\varepsilon$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, \sigma) + \varepsilon H^1(t, \sigma, z) + \varepsilon^2 H^2(t, \sigma, z) + \varepsilon^3 H^3(t, \sigma, z) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x),$$

où r^ε et Q^ε sont les termes de reste de u^ε et H^ε .

Dans la suite, nous posons $\tilde{V}(t, x) = V\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right)$ dans ω_ε et $\tilde{V}(t, x) = V(t, \sigma, z)$ en dehors. En injectant ces développements dans les équations (2.0.2) à (2.0.4), et en les simplifiant en utilisant les équations des profils, nous obtenons les équations satisfaites par les termes de reste.

2.3.1 Le champ magnétique, existence et régularité

Nous revenons aux équations (2.0.2)-(2.0.4) et nous les simplifions en utilisant les équations des profils. De même qu'au cours de l'étude des profils, nous obtenons un couplage entre le champ et le moment magnétique :

$$\begin{cases} Q^\varepsilon \in \mathbb{L}_p^2(\Gamma \times \mathbb{R}), \\ \text{rot } Q^\varepsilon + \text{rot}_x \tilde{H}^3 = 0 & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}, \\ \text{div}(Q^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) + \text{div}_x(\tilde{H}^3 + \overline{U^3}) = 0 & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} [Q^\varepsilon \wedge e_3] = 0 & \text{sur } \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}, \\ [(Q^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) \cdot e_3] = 0 & \text{sur } \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

En considérant Q^ε comme une fonction de r^ε , nous obtenons :

Lemme 2.3.1

Sous les hypothèses des théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4, si $r^\varepsilon \in \mathbb{H}_\varepsilon^p$ alors il existe une unique fonction Q^ε , reste de H^ε , qui satisfait les équations (2.3.1) et (2.3.2).

De plus Q^ε se décompose sous la forme $R^\varepsilon + S^\varepsilon$ où R^ε est linéaire en r^ε et S^ε ne dépend pas de r^ε . Il existe aussi une constante c_0 indépendante de ε telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} &\leq c_0 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,p}, \\ \|S^\varepsilon\|_{\varepsilon,4} &\leq c_0 \left(\|\widetilde{H^3}\|_{\varepsilon,4} + \|\widetilde{U^3}\|_{\varepsilon,4} \right). \end{aligned}$$

Preuve. A l'extérieur de ω_ε , les équations (2.3.2) se résolvent grâce au lemme 2.1.2. Dans ω_ε , nous considérons les coefficients de Fourier de l'équation (2.3.2) et nous obtenons :

$$\frac{d}{dz} c_k(V) + A c_k(V) = - \left(B_1 c_k(r^\varepsilon) + A c_k(\widetilde{H^3}) + B_2 c_k(\widetilde{U^3}) \right), \quad (2.3.3)$$

où

$$\begin{aligned} V &= Q^\varepsilon + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_3^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A = 2i\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = 2i\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{et } B_2 &= 2i\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.2, le second membre de l'équation (2.3.3) a la même régularité que r^ε en z . Supposons que $r^\varepsilon \in \mathbb{H}_\varepsilon^p$ et considérons la base de vecteurs propres de A que nous avons déterminé au lemme 2.1.1. L'indice i indique ici la composante selon e'_i . Nous avons :

$$\frac{d}{dz} c_k \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} + 2\pi|k| \begin{pmatrix} c_k(V_1) \\ -c_k(V_2) \\ 0 \end{pmatrix} = -2\pi|k| \begin{pmatrix} c_k(r_2^\varepsilon) - c_k(\widetilde{H_1^3}) + \frac{1}{2}(c_k(\widetilde{U_2^3}) - c_k(\widetilde{U_1^3})) \\ -c_k(r_1^\varepsilon) + c_k(\widetilde{H_2^3}) + \frac{1}{2}(c_k(\widetilde{U_2^3}) - c_k(\widetilde{U_1^3})) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Le lemme 2.1.2 nous indique que $c_k(V)$ est colinéaire à e'_2 en $-\varepsilon$ et à e'_1 en ε . D'où $c_0(V) = 0$. Soit $2\pi|k|L = (2\pi|k|L_1, 2\pi|k|L_2, 0)$ le second membre de (2.3.4). Pour tout $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$,

$$c_k(V) = \begin{pmatrix} e^{-2\pi|k|z} a_1 \\ e^{2\pi|k|z} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + 2\pi|k| \int_{-\varepsilon}^z \begin{pmatrix} e^{-2\pi|k|(z-z')} L_1(z') \\ e^{2\pi|k|(z-z')} L_2(z') \\ 0 \end{pmatrix} dz',$$

d'où $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -2\pi|k| \int_{-\varepsilon}^\varepsilon e^{-2\pi|k|z'} L_2(z') dz'$ (puisque $c_k(V)$ est colinéaire à e'_1 en ε) et

$$c_k(V) = -2\pi|k| \begin{pmatrix} \int_{-\varepsilon}^z e^{-2\pi|k|(z-z')} (c_k(r_2^\varepsilon) - c_k(\widetilde{H_1^3}) + \frac{1}{2}(c_k(\widetilde{U_2^3}) - c_k(\widetilde{U_1^3}))) dz' \\ - \int_z^\varepsilon e^{2\pi|k|(z-z')} (-c_k(r_1^\varepsilon) + c_k(\widetilde{H_2^3}) + \frac{1}{2}(c_k(\widetilde{U_2^3}) - c_k(\widetilde{U_1^3}))) dz' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Intéressons-nous maintenant à la régularité en z des coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |c_k(V_1)(z)|^2 dz &= 4\pi^2 |k|^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{-\varepsilon}^z e^{-2\pi|k|(z-z')} L_1(z') dz' \right)^2 dz \\
&\leq 4\pi^2 |k|^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{-\varepsilon}^z e^{-2\pi|k|(z-z')} dz' \right) \left(\int_{-\varepsilon}^z e^{-2\pi|k|(z-z')} |L_1(z')|^2 dz' \right) dz \\
&\leq 4\pi^2 |k|^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\pi|k|} \left(\int_{-\varepsilon}^z e^{-2\pi|k|(z-z')} |L_1(z')|^2 dz' \right) dz \\
&\leq 4\pi |k| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |L_1(z')|^2 \left(\int_{z'}^{\varepsilon} e^{-2\pi|k|(z-z')} dz \right) dz' \\
&\leq 4 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |L_1(z')|^2 dz'.
\end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat pour $c_k(V_2)$. Cela nous donne donc l'existence de Q^ε dans $\mathbb{L}^2(\Gamma \times \mathbb{R})$ et dans $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ avec l'estimation :

$$|Q^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + \left| \widetilde{U^3} \right|_{\varepsilon,2} + \left| \widetilde{H^3} \right|_{\varepsilon,2} \right),$$

où C est une constante indépendante de ε . En appliquant les lemmes 2.2.3 et 2.2.1, ainsi que le théorème 2.1.4 pour la régularité de $\widetilde{U^3}$ et $\widetilde{H^3}$, nous obtenons l'existence d'une constante C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned}
\|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} &\leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,p}, \\
\|S^\varepsilon\|_{\varepsilon,4} &\leq C \left(\left\| \widetilde{U^3} \right\|_{\varepsilon,4} + \left\| \widetilde{H^3} \right\|_{\varepsilon,4} \right).
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Le moment magnétique, équation du reste

En utilisant la décomposition obtenue au lemme 2.3.1, nous écrivons maintenant les équations satisfaites par le terme de reste de u^ε . Pour cela, nous posons :

$$a^\varepsilon(t, x) = U^0(t, \sigma) + \varepsilon U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 U^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \omega_\varepsilon,$$

$$b^\varepsilon(t, x) = U^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \omega_\varepsilon,$$

$$c^\varepsilon(t, x) = U^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \omega_\varepsilon,$$

$$Q^\varepsilon = R^\varepsilon + S^\varepsilon \text{ où } R^\varepsilon \text{ est linéaire en } r^\varepsilon,$$

$$K^\varepsilon(t, x) = H^0(t, \sigma) + \varepsilon H^1\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 H^2\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 H^3\left(t, \sigma, \frac{z}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 S^\varepsilon(t, x) \text{ dans } \omega_\varepsilon.$$

En reportant dans l'équation (2.0.3) et en simplifiant grâce aux équations des profils, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon = T_1 + \dots + T_8 + F^\varepsilon \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon = \Gamma \times \{\pm\varepsilon\}, \\ r^\varepsilon(0, x) = r_0^\varepsilon(.) \text{ dans } \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

où

$$\begin{cases}
 T_1 = \varepsilon^8 |\nabla r^\varepsilon|^2 r^\varepsilon, \\
 T_2 = \varepsilon^5 (|\nabla r^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) r^\varepsilon), \\
 T_3 = \varepsilon^2 (|\nabla a^\varepsilon|^2 r^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) a^\varepsilon), \\
 T_4 = \varepsilon^2 (r^\varepsilon \wedge \Delta a^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon), \\
 T_5 = a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon + r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon, \\
 T_6 = -[a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge K^\varepsilon)], \\
 T_7 = -\varepsilon^3 [r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon)], \\
 T_8 = -\varepsilon^6 r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon), \\
 F^\varepsilon = \varepsilon [\Delta_x c^\varepsilon + |\partial_z b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + \varepsilon^2 |\partial_z c^\varepsilon|^2 c^\varepsilon - 2\varepsilon |\partial_z c^\varepsilon|^2 b^\varepsilon + |\nabla_x b^\varepsilon|^2 a^\varepsilon - 2\varepsilon |\nabla_x b^\varepsilon|^2 b^\varepsilon - 2\varepsilon |\partial_z b^\varepsilon|^2 U^3 \\
 + |\partial_z c^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + |\nabla_x a^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + \varepsilon^2 |\nabla_x b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + 2(\partial_z U^3 \cdot \partial_z a^\varepsilon) b^\varepsilon + 2(\nabla_x a^\varepsilon \cdot \nabla_x b^\varepsilon) b^\varepsilon \\
 + 2(\partial_z U^3 \cdot \partial_z b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z b^\varepsilon) U^3 - 4\varepsilon (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_x b^\varepsilon \cdot \nabla_x c^\varepsilon) a^\varepsilon \\
 - 2\varepsilon (\partial_z c^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) a^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\nabla_x b^\varepsilon \cdot \nabla_x c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) c^\varepsilon + 2(\nabla_x a^\varepsilon \cdot \nabla_x c^\varepsilon) a^\varepsilon \\
 - 2\varepsilon (\nabla_x a^\varepsilon \cdot \nabla_x b^\varepsilon) c^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_x a^\varepsilon \cdot \nabla_x c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) U^3 + 2\varepsilon^2 (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) U^3 \\
 + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) c^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\partial_z c^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) b^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) c^\varepsilon - 4\varepsilon (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) c^\varepsilon \\
 + 2(\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) b^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \Delta_x a^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \partial_z^2 c^\varepsilon - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \Delta_x b^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \Delta_x c^\varepsilon + b^\varepsilon \wedge \Delta_x b^\varepsilon \\
 + b^\varepsilon \wedge \partial_z^2 U^3 + U^3 \wedge \partial_z^2 b^\varepsilon - \varepsilon U^3 \wedge \partial_z^2 c^\varepsilon - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \partial_z^2 U^3 - \varepsilon b^\varepsilon \wedge \Delta_x c^\varepsilon + U^3 \wedge H^1 + b^\varepsilon \wedge H^3 \\
 + c^\varepsilon \wedge H^2 - U^3 \wedge (a^\varepsilon \wedge H^1) - a^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) - \varepsilon^4 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) \\
 + \varepsilon^3 b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) - b^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^3) - b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) - \varepsilon^4 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) \\
 + \varepsilon U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + \varepsilon^3 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) - a^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) + \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) \\
 - c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) - \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) \\
 - c^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^2) + 2\varepsilon b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) + \varepsilon^2 \beta^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) - \varepsilon^2 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) \\
 - \varepsilon^3 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) + a^\varepsilon (c^\varepsilon \wedge H^2) + 2\varepsilon U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) + \varepsilon^2 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) \\
 + \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) - b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) + 2\varepsilon c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) - c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) - b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) \\
 + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2)] + a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon - a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon)
 \end{cases}$$

où les $\sim$ ont été omis par souci de lisibilité et les expressions du type $\partial_z a^\varepsilon$ signifient $\widetilde{\partial_z U^0} + \varepsilon \widetilde{\partial_z U^1} + \dots$.

Les résultats de régularité obtenus sur les profils nous donnent la proposition suivante :

Proposition 2.3.1

Soit $U^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$.

Pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, et $i = 0, 1, 2$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{i,p}} \leq C_p.$$

Pour tout p , $2 \leq p < +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{3,p}} \leq C_p,$$

Pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 \|K^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,p}} &\leq C_p, \\
 \|F^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\varepsilon,1} &\leq C_2.
 \end{aligned}$$

Preuve. Comme nous avons $U_0^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$, les résultats de régularité sur les profils (Théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4) et les injections de Sobolev classiques donnent que pour $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\|U^i\|_{\mathbb{W}^{2,\infty}(\Gamma \times I_1)} \leq C,$$

$$\|U^i\|_{\mathbb{W}^{3,p}(\Gamma \times I_1)} \leq C, \quad 2 \leq p < +\infty.$$

En effectuant un changement d'échelle pour revenir à des fonctions définies sur ω_ε , nous obtenons le résultat. De même, nous obtenons des estimations dans $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Gamma \times I_1)$ de H^i et le lemme 2.3.1 utilisé conjointement avec le lemme 2.2.1 nous donne les estimations sur S^ε .

Les estimations sur F^ε se déduisent aisément des résultats précédents. ■

Remarque 2.3.1

Nous pourrions obtenir des résultats un peu plus précis en remarquant que U^0 ne dépend pas de z :

$$\begin{aligned} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p, \\ |D^2 a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p \varepsilon^{-1}, \\ |D^3 a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p \varepsilon^{-2}, \\ |\nabla K^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p. \end{aligned}$$

Nous n'aurons pas besoin de telles estimations dans les estimations qui vont suivre.

2.3.3 Le moment magnétique, estimation du reste

Nous allons maintenant donner une estimation du reste r^ε . Ce faisant, nous obtiendrons une autre preuve de l'existence du moment magnétique u^ε pour une donnée initiale de régularité $\mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$ au lieu de $\mathbb{H}^3$. Cette perte de régularité est typique des méthodes de développement asymptotique (cf [30], [13], [19], [47]). Ces estimations sont effectuées sur une approximation de Galerkin, ce qui nous permettra de justifier toutes les intégrations par parties, l'espace d'approximation considéré pour le moment magnétique étant construit sur une base de fonctions propres de l'opérateur de Laplace anisotrope de domaine

$$\left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma \times \{\pm \varepsilon\} \right\}.$$

Pour le champ magnétique, nous introduisons seulement R_n la projection de $R(r_n)$ sur l'espace d'approximation. Toutefois, nous ne détaillons pas cette étape et nous nous concentrons uniquement sur les estimations.

Dans la suite, nous posons

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) = & |r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\nabla_x r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 \\ & + \varepsilon^2 \left(|\Delta_x r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 \right), \end{aligned}$$

et nous supposons que $\mathbf{Q}(0) \leq \|r_0^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + \varepsilon^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^2$ est borné.

Comme nous considérons une approximation de Galerkin de r^ε , nous avons l'existence de $\mathbf{Q}$ sur un intervalle maximal $[0, T_{n,\varepsilon}^*]$ où $0 < T_{n,\varepsilon}^* \leq +\infty$. Nous voulons prouver ici qu'il existe ε_T suffisamment petit tel que $\mathbf{Q}$ existe sur l'intervalle $[0, T]$ indépendamment de n si $\varepsilon \leq \varepsilon_T$. Nous démontrerons aussi les estimations données dans le théorème 2.0.1. Nous procédons de la façon suivante :

Nous choisissons $T > 0$ et nous effectuons des estimations d'énergie indépendantes de n . Pour cela, nous effectuons le produit scalaire dans $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ de l'équation (2.3.5) avec r^ε , $\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon$ et $\varepsilon^2 (\Delta_x^2 + \varepsilon^2 \partial_z^2 \Delta_x + \varepsilon^4 \partial_z^4) r^\varepsilon$. En procédant à des intégrations par parties et en absorbant les termes gênants au moyen du terme dissipatif $-\varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon$ dans (2.3.5), nous prouvons que $\mathbf{Q}$ satisfait sur $[0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*]$ l'inégalité différentielle :

$$\mathbf{Q}'(t) \leq C_T(1 + \mathbf{Q}(t)) + \varepsilon^2 P_T(\mathbf{Q}(t)), \quad t \in [0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*], \quad (2.3.6)$$

où C_T est une constante et P_T un polynôme, tous deux indépendants de n et ε (mais pas de T).

Posons maintenant

$$T^\varepsilon = \sup \left\{ T, P(\mathbf{Q}(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}, \forall t \in [0, T] \right\}.$$

Pour tout $t < T^\varepsilon$, $\mathbf{Q}' \leq C(1 + \mathbf{Q})$, et donc $\mathbf{Q}(t) \leq (1 + \mathbf{Q}(0)) \exp(Ct) - 1$, par le lemme de Gronwall. Nous en déduisons alors que $P(\mathbf{Q}(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ pour tout $t \leq a \ln \frac{1}{\varepsilon} + b$. Finalement, nous avons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = +\infty$, ce qui implique que $T_{n,\varepsilon}^* \geq T$ dès que $\varepsilon \in]0, \varepsilon_T]$ où ε_T est une constante suffisamment petite. De plus, r^ε est borné indépendamment de ε dans $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_\varepsilon^1)$ et $\varepsilon r^\varepsilon$ est borné indépendamment de ε dans $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_\varepsilon^2)$ pour tout $0 < T < T_\varepsilon$.

En utilisant les injections de Sobolev anisotropes, et en prenant en compte la renormalisation dans les espaces de Lebesgue, nous obtenons le théorème 2.0.1

Remarque 2.3.2

Dans les inégalités suivantes, les opérateurs ∇ et Δ sont les opérateurs usuels. Lorsque nous aurons à les estimer dans les espaces de Sobolev anisotropes, nous perdons donc des puissances de ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon |\nabla u|_{\varepsilon,p} &\leq \left(|\nabla_x u|_{\varepsilon,p} + |\varepsilon \partial_z u|_{\varepsilon,p} \right), \\ \varepsilon^2 |\Delta u|_{\varepsilon,p} &\leq \left(|\Delta_x u|_{\varepsilon,p} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 u|_{\varepsilon,p} \right). \end{aligned}$$

Estimations $\mathbb{L}^2$: nous multiplions (2.3.5) par $\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} r^\varepsilon$ et nous intégrons sur ω_ε (pour faire apparaître la norme $\|\cdot\|_{\varepsilon,2}$). Les intégrations par parties sont licites car nous travaillons sur une approximation de Galerkin. Nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) + \varepsilon^2 |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \leq \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (T_1 + \dots + T_8 + F^\varepsilon) \cdot r^\varepsilon dx.$$

Nous estimons chaque $\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} T_i r^\varepsilon dx$ grâce à l'inégalité de Hölder puis par des injections de Sobolev anisotropes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_1 r^\varepsilon dx \right| &\leq \varepsilon^8 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \\ &\leq C \varepsilon^{9/2} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \leq C \varepsilon^{9/2} \mathbf{Q}^2 \\ &\quad \text{(grâce aux inégalités (2.2.11) et à la remarque 2.3.2)} \\ \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_2 r^\varepsilon dx \right| &\leq \varepsilon^5 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3}^2 + 2\varepsilon^5 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,3}^2 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \\ &\leq C \varepsilon^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2} + C \varepsilon^{5/2} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} \\ &\quad \text{(en appliquant Prop. 2.3.1, Inég. (2.2.10), puis (2.2.17) et Rem. 2.3.2)} \\ &\leq C(\varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2}) \mathbf{Q}^{3/2} \\ \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_3 r^\varepsilon dx \right| &\leq \varepsilon^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 + 2\varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \\ &\leq C |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + C |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \leq C \mathbf{Q} \\ &\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1 et à Rem. 2.3.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_4 r^\varepsilon dx \right| &\leq \varepsilon^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \leq C \mathbf{Q} \\
&\text{(grâce à Prop. 2.3.1 et Rem. 2.3.2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_5 r^\varepsilon dx \right| &\leq |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \leq C \mathbf{Q} \\
&\text{(grâce à Prop. 2.3.1 et au lemme 2.3.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_6 r^\varepsilon dx \right| &\leq |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \\
&\leq C |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \leq C \mathbf{Q} \\
&\text{(en appliquant Prop. 2.3.1 puis le lemme 2.3.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_7 r^\varepsilon dx \right| &\leq C \varepsilon^3 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,4}^2 |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C \varepsilon^3 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^{3/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \leq C \varepsilon^3 \mathbf{Q}^{3/2} \\
&\text{(en appliquant Prop. 2.3.1 et l'inégalité (2.2.10) puis le lemme 2.3.1)}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_8 r^\varepsilon dx \right| = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} F^\varepsilon r^\varepsilon dx \right| &\leq |F^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C (1 + |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2) \\
&\text{(grâce à Prop. 2.3.1 et à l'inégalité de Young)}
\end{aligned}$$

En sommant les inégalités précédentes, nous obtenons l'existence d'une constante C et d'un polynôme P , tous deux indépendants de ε tels que :

$$\frac{d}{dt} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \leq C (1 + \mathbf{Q}) + \varepsilon^2 P(\mathbf{Q}), \quad (2.3.7)$$

Estimations $\mathbb{H}^1$: En multipliant l'approximation de Galerkin de l'équation (2.3.5) par

$$\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon)$$

et en intégrant par parties, il suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) + \varepsilon^2 |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^4 |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \\
\leq \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (T_1 + \dots + T_8 + F^\varepsilon) \cdot (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx
\end{aligned}$$

et nous estimons chaque terme du second membre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_1 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \right| &\leq \varepsilon^8 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,6}^2 \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\ &\leq C \varepsilon^3 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^3 \leq C \varepsilon^3 \mathbf{Q}^2 \\ &\quad \text{(grâce aux inégalités (2.2.10), (2.2.17) et à la remarque 2.3.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_2 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \right| &\leq \varepsilon^5 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,4}^2 \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\ &\quad + 2\varepsilon^5 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\ &\leq C \varepsilon^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{1/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{5/2} + C \varepsilon^{3/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \\ &\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1, Inég. (2.2.10), (2.2.17) et Rem. 2.3.2)} \\ &\leq C (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2}) \mathbf{Q}^{3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_3 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \right| &\leq \varepsilon^2 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + |\varepsilon \partial_z \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \right) |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\ &\quad + 2\varepsilon^2 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + |\varepsilon \partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \right) |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\ &\quad + 2\varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + |\varepsilon \partial_z \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \right) |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\ &\quad + 2\varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\ &\quad \left. + |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\ &\leq C \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \right) \\ &\quad + C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \left(\varepsilon |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + (1 + \varepsilon) |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\ &\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1 et Rem. 2.3.2)} \\ &\leq C \mathbf{Q} + \frac{1}{18} \left(\varepsilon^2 |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + (1 + \varepsilon^2) |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) \end{aligned}$$

Pour l'estimation de T_4 , nous regardons plus précisément le comportement des termes en Δr^ε au moyen d'intégrations par parties, les multiples intégrations par parties étant licites grâce au découplage entre les deux directions :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 a^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon \cdot (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \\ &= \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 (a^\varepsilon \wedge \Delta_x r^\varepsilon \cdot \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \Delta_x r^\varepsilon) dx \\ &= \frac{1 - \varepsilon^2}{|\omega_\varepsilon|} \left(\int_{\omega_\varepsilon} -\varepsilon^2 \nabla_x a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \nabla_x r^\varepsilon dx + \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 \partial_z a^\varepsilon \wedge \partial_z \nabla_x r^\varepsilon \cdot \nabla_x r^\varepsilon dx \right) \\ &\leq |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\ &\leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + \frac{\varepsilon^2}{18} \left(|\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 r^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon \cdot (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) \, dx \\
&= \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^5 (r^\varepsilon \wedge \Delta_x r^\varepsilon \cdot \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon + r^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \Delta_x r^\varepsilon) \, dx \\
&= \frac{1 - \varepsilon^2}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^5 \nabla_x r^\varepsilon \wedge \partial_z r^\varepsilon \cdot \partial_z \nabla_x r^\varepsilon \, dx \\
&\leq C \varepsilon^3 |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}.
\end{aligned}$$

En injectant ces calculs dans les estimations de T_4 , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_4 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) \, dx \right| &\leq \varepsilon^2 |\Delta a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(|\nabla_x \Delta a^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z \Delta a^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + C \varepsilon^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{1/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \left(\varepsilon |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{18} \left(|\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) \\
&\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1 et Inég. (2.2.10) et Rem. 2.3.2)} \\
&\leq C \mathbf{Q} + C \varepsilon^{1/2} \mathbf{Q}^{3/2} + \frac{1}{18} \left(|\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_5 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) \, dx \right| &\leq \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,\infty}} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} + |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\quad + \|K^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,\infty}} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\quad + \varepsilon^3 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \\
&\leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + C \varepsilon^{5/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{5/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} \\
&\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1, au lemme 2.3.1 et Inég. 2.2.10)} \\
&\leq C \mathbf{Q} + C \varepsilon^{5/2} \mathbf{Q}^{3/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_6 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) \, dx \right| &\leq 2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,\infty}} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} + |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\quad + 2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,\infty}} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\quad + 2 \|K^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,\infty}} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\quad + |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 \\
&\leq C (|r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}) \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \leq C \mathbf{Q} \\
&\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1 et au lemme 2.3.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_7 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) \, dx \right| &\leq \varepsilon^3 \left(|r^\varepsilon|_{\varepsilon,4}^2 |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + 2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,4} \right) \\
&\quad \times \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\
&\leq C \varepsilon^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2} \leq C \varepsilon^2 \mathbf{Q}^{3/2} \\
&\quad \text{(grâce à Prop. 2.3.1, au lemme 2.3.1 et à Inég. (2.2.10))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} T_8 (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \right| &\leq \varepsilon^6 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6}^2 |R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\
&\leq C \varepsilon^5 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^3 \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2} \leq C \varepsilon^5 \mathbf{Q}^2 \\
&\quad (\text{grâce au lemme 2.3.1 et à l'inégalité (2.2.10)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} F^\varepsilon (\Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon) dx \right| &\leq \|F^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \\
&\leq C(1 + \mathbf{Q}) \\
&\quad (\text{grâce à Prop. 2.3.1 et à l'inégalité de Young})
\end{aligned}$$

En sommant les inégalités précédentes, et en absorbant les termes apparus lors de l'estimation de T_4 , il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + (1 + \varepsilon^2) |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) \\
\leq C(1 + \mathbf{Q}) + \varepsilon^2 P(\mathbf{Q}),
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

où C est une constante, et P un polynôme, tous deux indépendants de ε .

Estimations $\mathbb{H}^2$: Nous allons maintenant estimer $\varepsilon^2 \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right)$ en multipliant (2.3.5) par $\frac{\varepsilon^2}{|\omega_\varepsilon|} (\Delta_x^2 + \varepsilon^2 \partial_z^2 \Delta_x + \varepsilon^4 \partial_z^4) r^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{|\omega_\varepsilon|} \mathbf{B}$. Pour chaque terme, nous intégrons par partie, puis nous utilisons l'inégalité de Hölder, les injections de Sobolev anisotropes et finalement l'inégalité de Young afin d'isoler le terme

$$\varepsilon^4 \mathbf{A}^2 = \varepsilon^4 |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\varepsilon \partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2.$$

Nous avons finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_1 \mathbf{B} dx \right| &\leq \varepsilon^{10} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,6}^2 \left(2 |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^{10} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,12} \left(2 |\nabla_x \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,12} \mathbf{A} \\
&\leq C \varepsilon^8 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/4} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/4} + \mathbf{A}^{1/4} \right) \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} + \mathbf{A}^{1/2} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + C \varepsilon^5 \mathbf{A} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^3 \\
&\quad (\text{grâce à Inég. (2.2.10), (2.2.12), (2.2.17) et (2.2.18), et Rem. 2.3.2}) \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \varepsilon^6 \mathbf{Q}^3 + C \varepsilon^{28/3} \mathbf{Q}^{11/3} + C \varepsilon^{13} \mathbf{Q}^5 + C \varepsilon^{24} \mathbf{Q}^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_2 \mathbf{B} dx \right| &\leq \varepsilon^7 \left(2 |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + |\varepsilon \partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \right) |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,4}^2 \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^7 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(2 |\nabla_x \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^7 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} \left(2 |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^7 \left(2 |\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} + |\varepsilon \partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \right) |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^7 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(2 |\nabla_x \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\leq C\varepsilon^{7/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{1/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \mathbf{A} + C\varepsilon^5 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} + \mathbf{A}^{1/2} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + C\varepsilon^{7/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{1/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{3/2} \mathbf{A} + C\varepsilon^{9/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} \mathbf{A} \\
&\quad + C\varepsilon^5 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} + \mathbf{A}^{1/2} \right) \mathbf{A} \\
&\quad \text{(grâce à Inég. (2.2.10), (2.2.17) et (2.2.11), Prop. 2.3.1 et Rem. 2.3.2)} \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^2 + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^3
\end{aligned}$$

Pour obtenir les estimations sur T_3 , nous intégrons par parties plusieurs fois le terme :

$$\begin{aligned}
A = \frac{2\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z \nabla_x r^\varepsilon) (a^\varepsilon \cdot \nabla_x \Delta_x r^\varepsilon) dx &\leq 2\varepsilon^4 |\partial_z^2 a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\partial_z \nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C\mathbf{Q}^{1/2} (\varepsilon^2 \mathbf{A})
\end{aligned}$$

En reportant dans l'estimation de T_3 ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_3 \mathbf{B} dx \right| &\leq \varepsilon^4 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\
&\quad \left. + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) + 2\varepsilon^4 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \left(|\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\
&\quad \left. + |\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \left(|\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\
&\quad \left. + |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) \\
&\quad + 2\varepsilon^4 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \left(|\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\nabla_x \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\
&\quad \left. + |\varepsilon \partial_z \nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) + 2\varepsilon^4 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \left(|\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right. \\
&\quad \left. + |\nabla_x \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z \nabla r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \right) + A \\
&\leq C(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} + \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2})(\varepsilon^2 \mathbf{A}) \\
&\quad \text{(en appliquant Inég. (2.2.10) et (2.2.17), Prop. 2.3.1 et Rem. 2.3.2)} \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^4 + C\mathbf{Q}
\end{aligned}$$

Pour obtenir les estimations sur T_4 , nous intégrons par parties plusieurs fois chacun des termes :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} r^\varepsilon \wedge \Delta a^\varepsilon \cdot (\Delta_x^2 r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 \Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^4 \partial_z^4 r^\varepsilon) dx \\
&\leq |\Delta a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} + |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\varepsilon^2 \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\varepsilon^3 \partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \right) \\
B &= \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge (\Delta_x r^\varepsilon + \partial_z^2 r^\varepsilon) \cdot (\Delta^2 r^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_z^2 \Delta_x r^\varepsilon + \varepsilon^4 \partial_z^4 r^\varepsilon) dx \\
&= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \Delta_x r^\varepsilon \cdot \Delta_x^2 r^\varepsilon dx \leq \varepsilon^4 |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \varepsilon^2 \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon, 2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \Delta_x^2 r^\varepsilon dx = \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_x a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \nabla_x \Delta_x r^\varepsilon dx \\
&\quad + \frac{\varepsilon^4}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon \cdot \nabla_x \Delta_x r^\varepsilon dx \\
&\leq \varepsilon^4 |\partial_z \nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^4 |\Delta_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^4 |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^4 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^4 |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= \frac{\varepsilon^6}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \Delta_x r^\varepsilon \cdot \partial_z^2 \Delta_x r^\varepsilon dx \leq \varepsilon^6 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \varepsilon^4 \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= \frac{\varepsilon^6}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \partial_z^2 \Delta_x r^\varepsilon dx \leq |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z^2 \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= \frac{\varepsilon^8}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \Delta_x r^\varepsilon \cdot \partial_z^4 r^\varepsilon dx \leq \varepsilon^8 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^8 |\nabla_x a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\quad + \varepsilon^8 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\nabla_x \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \varepsilon^4 \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= \frac{\varepsilon^8}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 r^\varepsilon \cdot \partial_z^4 r^\varepsilon dx \leq \varepsilon^8 |\partial_z a^\varepsilon|_{\varepsilon, \infty} |\partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} |\partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon, 2} \\
&\leq \frac{1}{200} \mathbf{A} + C \varepsilon^2 \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon, 2}^2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\varepsilon^7}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} r^\varepsilon \wedge (\Delta_x r^\varepsilon + \partial_z^2 r^\varepsilon) \cdot (\Delta^2 r^\varepsilon + \varepsilon^4 \partial_z^4 r^\varepsilon) dx \\
&\leq 2\varepsilon^7 \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \right) |\Delta r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \mathbf{A} + \varepsilon^7 |\partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\nabla_x \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + \varepsilon^7 |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\partial_z \Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} + \varepsilon^{11} |\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\partial_z^3 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\quad + \varepsilon^{11} |\partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} |\nabla_x \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} |\nabla_x \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \\
&\leq C\varepsilon^3 \mathbf{Q} \mathbf{A} + C\varepsilon^{7/2} \mathbf{Q}^{3/4} \mathbf{A}^{3/2} \leq \frac{1}{200} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^2 + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^3
\end{aligned}$$

En reportant dans l'estimation de T_4 ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_4 \mathbf{B} dx \right| &\leq A + B + C \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \mathbf{Q} + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^2 + C\varepsilon^2 \mathbf{Q}^3 \\
\\
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_5 \mathbf{B} dx \right| &\leq \varepsilon^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \mathbf{A} + \varepsilon^2 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \|K^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \mathbf{A} + \varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^5 \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) |R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^5 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\nabla_x R^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z R^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\leq C\varepsilon^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \mathbf{A} + C\varepsilon^5 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} \left(\|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} + \mathbf{A}^{1/2} \right) \mathbf{A} \\
&\quad \text{(grâce à Inég. (2.2.10), Prop. 2.3.1, Lem. 2.3.1 et Rem. 2.3.2)} \\
&\leq C \mathbf{Q}^{1/2} (\varepsilon^2 \mathbf{A}) + C\varepsilon^2 \mathbf{Q} (\varepsilon^2 \mathbf{A}) + C\varepsilon^{3/2} \mathbf{Q}^{3/4} (\varepsilon^2 \mathbf{A})^{3/2} \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \mathbf{Q} + C \varepsilon^4 \mathbf{Q}^2 + C\varepsilon^6 \mathbf{Q}^3 \\
\\
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_6 \mathbf{B} dx \right| &\leq 2\varepsilon^2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \mathbf{A} + \varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty}^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \|K^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^2 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \mathbf{A} \\
&\leq C\varepsilon^2 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} \mathbf{A} \leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \mathbf{Q} \\
&\quad \text{(en appliquant Prop. 2.3.1 et lemme 2.3.1)} \\
\\
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_7 \mathbf{B} dx \right| &\leq 2\varepsilon^5 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\nabla_x R^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z R^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^5 |a^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^5 \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,4} |R^\varepsilon|_{\varepsilon,4} \mathbf{A} \\
&\quad + 2\varepsilon^5 |K^\varepsilon|_{\varepsilon,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,3} \right) \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^5 \|K^\varepsilon\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^1,\infty} |r^\varepsilon|_{\varepsilon,4}^2 \mathbf{A} \\
&\leq C\varepsilon^{5/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^{1/2} (\varepsilon^2 \mathbf{A}) + C\varepsilon^3 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^{1/2} \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^{3/2} (\varepsilon^2 \mathbf{A}) \\
&\quad \text{(en appliquant Inég. (2.2.10), Prop. 2.3.1 et lemme 2.3.1)} \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^2 \mathbf{A}^4 + C (\varepsilon^5 + \varepsilon^6) \mathbf{Q}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 T_8 \mathbf{B} \, dx \right| &\leq 2\varepsilon^8 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \left(|\nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} + |\varepsilon \partial_z r^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \right) |R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \mathbf{A} \\
&\quad + \varepsilon^8 |r^\varepsilon|_{\varepsilon,6}^2 \left(|\nabla_x R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} + |\varepsilon \partial_z R^\varepsilon|_{\varepsilon,6} \right) \mathbf{A} \\
&\leq C\varepsilon^5 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 \|\varepsilon r^\varepsilon\|_{\varepsilon,2} (\varepsilon^2 \mathbf{A})
\end{aligned}$$

(en appliquant Inég. (2.2.10) et lemme 2.3.1)

$$\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \varepsilon^{10} \mathbf{Q}^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \left| \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^2 F^\varepsilon \mathbf{B} \, dx \right| &\leq \|F^\varepsilon\|_{\varepsilon,1} (\varepsilon^2 \mathbf{A}) \\
&\leq \frac{1}{18} \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 + C \\
&\quad \text{(en appliquant Prop. 2.3.1)}
\end{aligned}$$

En sommant les inégalités précédentes, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left(\varepsilon^2 |\Delta_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\varepsilon \partial_z \nabla_x r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \varepsilon^2 |\varepsilon^2 \partial_z^2 r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 \right) + \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 \leq C(1 + \mathbf{Q}) + \varepsilon^2 P(\mathbf{Q}), \quad (2.3.9)$$

où P est un polynôme indépendant de ε .

En sommant les inégalités (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.9), nous avons finalement :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q} \leq C(1 + \mathbf{Q}) + \varepsilon^2 P(\mathbf{Q}),$$

ce qui implique l'inégalité (2.3.6) et donc le théorème principal.

Chapitre 3

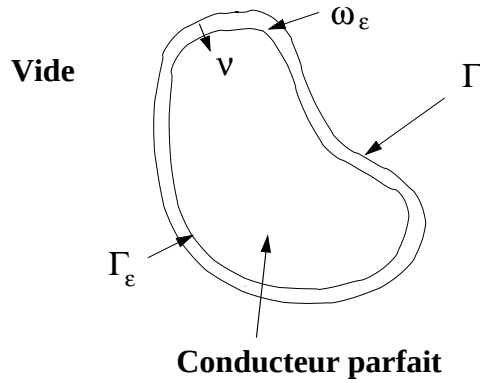
Revêtement ferromagnétique d'un conducteur parfait

Nous nous intéressons dans ce chapitre au cas d'une couche mince de matériau ferromagnétique recouvrant un corps parfaitement conducteur $\mathcal{U}^\varepsilon$ placé dans le vide :

Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^3$. Nous notons $\Gamma = \partial\Omega$. Pour $x \in \Omega$, nous introduisons $\varphi(x) = \text{dist}(x, \Gamma)$ et $P(x)$ la projection orthogonale de x sur Γ . Comme Γ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$, φ et P sont réguliers dans un voisinage de Γ .

Nous posons

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, 0 < \varphi(x) < \varepsilon\}.$$



Nous notons $\mathcal{U}^\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon$, et ν désigne la normale unitaire à Γ entrante. Dans la suite, nous notons $I_1 =]0, 1[$.

Nous rappelons aussi les équations satisfaites par le moment magnétique u^ε et le champ magnétique $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$:

– Equation de Landau-Lifschitz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon))) \quad \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0^\varepsilon \quad \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.0.1)$$

– Equations de la magnétostatique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathcal{U}^\varepsilon, \\ \mathcal{H}(u^\varepsilon) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{U}^\varepsilon), \\ \text{rot } \mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{U}^\varepsilon, \\ \text{div } (\mathcal{H}(u^\varepsilon) + \overline{u}^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{U}^\varepsilon, \\ [H(u) \wedge n] = 0 \text{ sur } \partial\Omega = \Gamma, \\ [(H(u) + \overline{u}) \cdot n] = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon = \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.0.2)$$

où $\overline{u}$ désigne le prolongement de u par 0 hors de ω_ε et $[v]$ le saut de v à l'interface $\partial\omega_\varepsilon$. Les deux dernières équations sont des conditions de transmission qui régissent les phénomènes aux interfaces considérées. Elle se déduisent des équations de la magnétostatique.

Remarque 3.0.3

Au chapitre 2, nous considérons une couche mince plane de matériau ferromagnétique placée dans le vide. Nous pouvons alors déterminer le champ magnétique et le moment magnétique de part et d'autre du domaine en utilisant ses propriétés géométriques. Nous considérons ici le cas, plus physique, d'une couche mince de matériau ferromagnétique à la surface d'un conducteur parfait, ce qui correspond à une première modélisation d'un avion dont la peinture est à base de matériau ferromagnétique par exemple. Dans ce cas-là, l'étude du champ magnétique à l'extérieur se restreint au problème extérieur pour l'étude des équations de la magnétostatique.

Comme nous considérons un système à l'équilibre électromagnétique, nous supposons en fait que le matériau est magnétiquement parfait ($\mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0$ dans $\mathcal{U}^\varepsilon$).

Dans la suite, nous travaillerons avec la forme équivalente de l'équation de Landau-Lifschitz (3.0.1) donnée par G. Carbou et P. Fabrie [17] pour des solutions suffisamment régulières, cette forme isolant la partie dissipative de l'équation :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon)). \quad (3.0.3)$$

Pour obtenir le comportement des champ et moment magnétiques dans la couche mince, nous effectuons un changement d'échelle afin de nous ramener à un domaine indépendant de ε d'une part, et un développement asymptotique des solutions d'autre part, pour mettre en évidence les ordres où se produisent les phénomènes. Le changement d'échelle engendre de l'anisotropie dans les équations (3.0.3) et (3.0.2), ce qui va nous permettre de mettre en évidence les propriétés des solutions. Pour gérer ces comportements anisotropes, nous utiliserons des espaces de Sobolev anisotropes (voir section 3.3).

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.0.1

Soit une donnée initiale u_0^ε satisfaisant

$$u_0^\varepsilon(x) = U_0^0(P(x)) \quad \forall x \in \omega_\varepsilon,$$

où U_0^0 est indépendant de ε , $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$. Si T^ε est le temps d'existence maximal de la solution régulière u^ε de l'équation (3.0.1) alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^\varepsilon = +\infty$ et pour tout $T < T^\varepsilon$, il existe des profils U^0 et U^1 vérifiant

– $U^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma))$ est solution de l'équation (3.0.1) avec $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma, \\ U^0(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Gamma, \end{cases}$$

où $H^0 = -(U^0 \cdot \nu)\nu$ est un opérateur local,

– pour tout $0 < T < T^\varepsilon$,

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}^7(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right]$$

tels que la solution u^ε s'écrive :

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0(t, P(x)) + \varepsilon U^1 \left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(t, x),$$

où $r^\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon))$, pour tout $2 \leq p \leq +\infty$ et $0 < T < T^\varepsilon$, satisfait :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/p}).$$

Remarque 3.0.4

Par souci de simplicité, nous avons choisi une donnée initiale relativement simple. Il est possible, sans restriction, d'imposer une donnée initiale régulière aux profils suivants dans le développement tant que la condition de Neumann homogène $\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$ est vérifiée.

Le développement asymptotique formel doit être poussé jusqu'à l'ordre 3 pour que l'on puisse démontrer le théorème. Il est possible sans restriction de donner un développement asymptotique de la solution à l'ordre 2 au lieu de l'ordre 1 annoncé dans le théorème.

Dans la suite, nous développons le formalisme géométrique que nous utiliserons au long de ce chapitre (section 3.1). Nous construisons ensuite formellement le développement asymptotique de u^ε et nous prouvons des résultats d'existence et de régularité pour tous temps de ses termes (Partie 3.2). Après avoir introduit les espaces et injections de Sobolev anisotropes dont nous aurons besoin, nous donnons dans la partie 3.4 les équations satisfaites par les termes de reste de u^ε et $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$, ainsi que les résultats d'existence et les estimations d'énergie qui concluent la preuve du théorème 3.0.1.

3.1 Formalisme géométrique

Dans le cas de domaines plans, les opérateurs différentiels tels que le gradient, la divergence ou le laplacien se découpent naturellement selon les symétries du problème, à savoir une partie tangente à la symétrie et une partie orthogonale : dans le cas d'une plaque horizontale, par exemple,

$\Delta u = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u + \partial_z^2 u$. Ce découplage des opérateurs différentiels permet de mettre en évidence au chapitre 2 les propriétés du système étudié et de le résoudre.

Ici, nous considérons une couche mince étalée à la surface d'un domaine borné régulier. La géométrie de la couche mince est alors caractérisée par la surface du domaine. Nous souhaitons retrouver un découplage des opérateurs différentiel du même type dans ce cadre plus général. Le formalisme que nous introduisons a été développé par G. Carbou dans [15] où il donne les formulations des opérateur gradient, divergence et laplacien. Reprenant cette approche, nous exprimons dans le même formalisme l'opérateur rotationnel. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $(p \cdot q)$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
- $\Gamma = \partial\Omega$,
- pour $\sigma \in \Gamma$, $\nu(\sigma)$ est la normale unitaire à Γ au point σ , entrant dans Ω ,
- pour $\sigma \in \Gamma$, $T_\sigma\Gamma$ est l'espace tangent à Γ au point σ :

$$T_\sigma\Gamma = (\nu(\sigma))^\perp$$

- $\varphi(x) = \text{dist}(x, \Gamma)$ pour $x \in \Omega$,
- $P(x)$ est la projection orthogonale de x sur Γ , pour $x \in \Omega$,
- g est la matrice du produit scalaire dans les coordonnées (σ, z) .
- $\omega_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega, \quad 0 < \varphi(x) < \varepsilon \right\}$,
- pour $s > 0$, $\Gamma_s = \left\{ x \in \Omega, \quad \varphi(x) = s \right\}$.
- $\mathcal{U}^\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon$.

Pour $\eta_0 > 0$ suffisamment petit, nous définissons le paramétrage de ω_{η_0} par :

$$\Psi : \Gamma \times]0, \eta_0[\longrightarrow \omega_{\eta_0}$$

$$(\sigma, z) \longmapsto \sigma + z\nu(\sigma)$$

Comme $\Gamma = \partial\Omega$ est une surface régulière, compacte et sans bord de $\mathbb{R}^3$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que Ψ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de $\Gamma \times]0, \eta_0[$ dans ω_{η_0} . Nous remarquons que, pour $0 < \varepsilon < \eta_0$, la restriction de Ψ à $\Gamma \times]0, \varepsilon[$ est un paramétrage $\mathcal{C}^\infty$ de ω_ε .

En outre, φ et P sont régulières sur ω_{η_0} et

$$\forall x \in \omega_{\eta_0}, \quad \nabla \varphi(x) = \nu(P(x)).$$

Nous travaillons donc avec les nouvelles coordonnées (σ, z) et nous précisons les expressions des opérateurs différentiels usuels dans celles-ci.

Sur la sous-variété Γ , nous définissons de façon classique l'intégrale et les opérateurs différentiels ∇_Γ , div_Γ et Δ_Γ . De plus, ν est une application définie sur Γ à valeurs dans la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Donc, pour $\sigma \in \Gamma$, la différentielle $d\nu(\sigma)$ est une application linéaire de $T_\sigma\Gamma$ dans $T_{\nu(\sigma)}\mathbb{S}^2$, et comme $T_{\nu(\sigma)}\mathbb{S}^2 = T_\sigma\Gamma$, nous pouvons considérer que $d\nu(\sigma)$ est un endomorphisme de $T_\sigma\Gamma$.

Intégration : Pour $s \in [0, \eta_0[$ et $\sigma \in \Gamma$, nous posons :

$$\gamma_s(\sigma) = \det(Id + s d\nu(\sigma)).$$

Remarquons que si $u : \omega_{\eta_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant $\tilde{u} = u \circ \Psi$, nous avons :

$$\int_{\omega_{\eta_0}} u = \int_0^{\eta_0} \int_\Gamma \tilde{u}(\sigma, s) \gamma_s(\sigma) d\sigma ds. \quad (3.1.1)$$

Gradient : Pour $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, nous définissons :

$$\nabla_{\Gamma_s} v(\sigma) = (Id + s d\nu(\sigma))^{-1} (\nabla_\Gamma v(\sigma))$$

et si $u : \omega_{\eta_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant $\tilde{u} = u \circ \Psi$, nous avons :

$$\nabla u(x) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(P(x), \varphi(x)) \nu(P(x)) + \left(\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} \tilde{u} \right) (P(x), \varphi(x)). \quad (3.1.2)$$

Divergence : Soit $Y : \Gamma \longrightarrow T\Gamma$ un champ de vecteur tangent défini sur Γ . Nous posons :

$$\operatorname{div}_{\Gamma_s} Y(\sigma) = \frac{1}{\gamma_s(\sigma)} \operatorname{div}_{\Gamma} [\gamma_s (Id + s d\nu)^{-1} Y] (\sigma)$$

et si $Z : \omega_{\eta_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, en notant $\tilde{Z} = Z \circ \Psi$, nous avons :

$$\operatorname{div} Z(x) = \frac{\partial \tilde{Z}_N}{\partial z}(P(x), \varphi(x)) + G_{\varphi(x)}(P(x)) \tilde{Z}_N(P(x), \varphi(x)) + \left(\operatorname{div}_{\Gamma_{\varphi(x)}} \tilde{Z}_T \right) (P(x), \varphi(x)) \quad (3.1.3)$$

où

$$\tilde{Z}_N(\sigma, z) = \tilde{Z}(\sigma, z) \cdot \nu(\sigma), \quad \tilde{Z}_T(\sigma, z) = \tilde{Z}(\sigma, z) - \tilde{Z}_N(\sigma, z) \nu(\sigma),$$

$$G_s(\sigma) = \frac{1}{\gamma_s(\sigma)} \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(\sigma).$$

Laplacien : Pour $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, nous posons

$$\Delta_{\Gamma_s} v = \operatorname{div}_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} v$$

et si $u : \omega_{\eta_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, en notant $\tilde{u} = u \circ \Psi$, nous avons :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}(P(x), \varphi(x)) + G_{\varphi(x)}(P(x)) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(P(x), \varphi(x)) + \left(\Delta_{\Gamma_{\varphi(x)}} \tilde{u} \right) (P(x), \varphi(x)). \quad (3.1.4)$$

Rotationnel : Soit $Y : \Gamma \longrightarrow T\Gamma$ un champ de vecteur tangent défini sur Γ . Nous posons :

$$\operatorname{rot}_{\Gamma_s} Y(\sigma) = \frac{1}{\gamma_s(\sigma)} \operatorname{rot}_{\Gamma} [(Id + s d\nu) Y] (\sigma),$$

où $\operatorname{rot}_{\Gamma} = -\operatorname{div}_{\Gamma} (\nu(\sigma) \wedge \cdot)$, et si $Z : \omega_{\eta_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, en notant $\tilde{Z} = Z \circ \Psi$, nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} Z = & \nu(P(x)) \wedge \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial z}(P(x), \varphi(x)) - \nu(P(x)) \wedge \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} V_N(P(x), \varphi(x)) \\ & + \nu(P(x)) \wedge [(I + z d\nu)^{-1} d\nu V_T] (P(x), \varphi(x)) \\ & + [\operatorname{rot}_{\Gamma_{\varphi(x)}} V_T(P(x), \varphi(x))] \nu(P(x)). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Preuve. En coordonnées cartésiennes, le rotationnel du vecteur Z s'écrit :

$$\operatorname{rot} Z = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} Z_3 - \partial_{x_3} Z_2 \\ \partial_{x_3} Z_1 - \partial_{x_1} Z_3 \\ \partial_{x_1} Z_2 - \partial_{x_2} Z_1 \end{pmatrix}$$

En remplaçant les $\partial_{x_i} Z_j$ par l'expression obtenue dans les nouvelles coordonnées au moyen de l'expression du gradient (3.1.2), nous obtenons :

$$\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \nu_2 \partial_z \tilde{V}_3 - \nu_3 \partial_z \tilde{V}_2 + (e_2 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_3) - (e_3 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_2) \\ \nu_3 \partial_z \tilde{V}_1 - \nu_1 \partial_z \tilde{V}_3 + (e_3 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_1) - (e_1 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_3) \\ \nu_1 \partial_z \tilde{V}_2 - \nu_2 \partial_z \tilde{V}_1 + (e_1 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_2) - (e_2 \cdot \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_1) \end{pmatrix},$$

où les $(e_i)_{i=1,2,3}$ forment la base canonique du repère cartésien que l'on considère, et où $\nu_i = (\nu \cdot e_i)$. Cela s'écrit aussi :

$$\operatorname{rot} V = \nu \wedge \partial_z \tilde{V}_T + A(\tilde{V}_N) + B(\tilde{V}_T), \quad (3.1.6)$$

où A et B sont des opérateurs différentiels linéaires ne faisant pas intervenir de dérivée en z . Pour déterminer leur expression, nous injectons dans les égalités “ $\text{div rot} = 0$ ” et “ $\text{rot } \nabla = 0$ ” les expressions (3.1.6) ainsi que celles du gradient (3.1.2) et de la divergence (3.1.3) données précédemment :

$$\begin{aligned} \text{rot } (\nabla u) &= \nu \wedge \partial_z \nabla_{\Gamma_z} \tilde{u} + A(\partial_z \tilde{u}) + B(\nabla_{\Gamma_z} \tilde{u}) \\ &= \nu \wedge \nabla_{\Gamma_z} (\partial_z \tilde{u}) - \nu \wedge [(I + z d\nu)^{-1} d\nu \nabla_{\Gamma_z} \tilde{u}] + A(\partial_z \tilde{u}) + B(\nabla_{\Gamma_z} \tilde{u}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme A et B ne font pas intervenir de dérivée en z , nous en déduisons :

$$\begin{aligned} A_T(\tilde{V}_N) &= -\nu \wedge \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_N, \\ B_T(\tilde{V}_T) &= \nu \wedge (I + z d\nu)^{-1} d\nu \tilde{V}_T, \\ A_N(\partial_z \tilde{u}) &= 0, \\ B_N(\nabla_{\Gamma_z} u) &= 0. \end{aligned}$$

En reportant dans “ $\text{div rot} = 0$ ” et en remarquant que $\gamma_z(I + z d\nu)^{-1} \nu \wedge ((I + z d\nu)^{-1} W_T) = W_T$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{div rot } V &= \frac{1}{\gamma_z} \partial_z \left(\gamma_z (A_N(\tilde{V}_N) + B_N(\tilde{V}_T)) \right) \\ &\quad + \text{div}_{\Gamma_z} \left(\nu \wedge \partial_z \tilde{V}_T - \nu \wedge \nabla_{\Gamma_z} \tilde{V}_N + \nu \wedge (I + z d\nu)^{-1} d\nu \tilde{V}_T \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_z} \partial_z \left(\gamma_z A_N(\tilde{V}_N) \right) + G_z B_N(\tilde{V}_T) + B_N(\partial_z \tilde{V}_T) + (\partial_z B_N)(\tilde{V}_T) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_z} \text{div}_{\Gamma} \left[\nu \wedge ((I + z d\nu) \partial_z \tilde{V}_T) \right] - \frac{1}{\gamma_z} \text{div}_{\Gamma} \left(\nu \wedge \nabla_{\Gamma} \tilde{V}_N \right) + \frac{1}{\gamma_z} \text{div}_{\Gamma} \left(\nu \wedge (d\nu \tilde{V}_T) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_z} \partial_z \left(\gamma_z A_N(\tilde{V}_N) \right) + G_z B_N(\tilde{V}_T) + B_N(\partial_z \tilde{V}_T) + (\partial_z B_N)(\tilde{V}_T) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_z} \text{div}_{\Gamma} \left[\nu \wedge ((I + z d\nu) \partial_z \tilde{V}_T) \right] + \frac{1}{\gamma_z} \text{div}_{\Gamma} \left(\nu \wedge (d\nu \tilde{V}_T) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} A_N(\tilde{V}_N) &= 0, \\ B_N(\tilde{V}_T) &= \frac{1}{\gamma_z} \text{rot}_{\Gamma} \left((I + z d\nu) \tilde{V}_T \right), \end{aligned}$$

où $\text{rot}_{\Gamma} = -\text{div}_{\Gamma}(\nu \wedge \cdot)$. ■

3.2 Développement asymptotique

Nous cherchons maintenant un développement asymptotique de u^ε et H^ε sous la forme :

– dans ω_ε ,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &= U^0 \left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon U^1 \left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \dots \\ H^\varepsilon(t, x) &= H^0 \left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon H^1 \left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \right) + \dots \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où $x \in \omega_\varepsilon$,

– dans $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$,

$$H^\varepsilon(t, y) = H^0(t, y) + \varepsilon H^1(t, y) + \dots \tag{3.2.2}$$

où $y \in \Omega'$.

Comme nous considérons un domaine courbe, les opérateurs différentiels dépendent de la géométrie du domaine, et donc de ε . Nous devons donc aussi effectuer un développement asymptotique des opérateurs.

Si $u(x) = \tilde{u}(\sigma, z) \in \mathbb{R}$ et $V(x) = \tilde{V}(\sigma, z) \in \mathbb{R}^3$, avec $\sigma = P(x)$ et $z = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$, nous obtenons :

$$\nabla u(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(\sigma, z) \nu(\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \nabla_{\Gamma_0, i} \tilde{u}(\sigma, z),$$

$$\Delta V(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2}(\sigma, z) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a_i(z) \right) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(\sigma, z) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Delta_{\Gamma_0, i} \tilde{V}(\sigma, z),$$

$$\text{où } a_i(z) = \frac{z^i}{i!} (\partial_z^i G)|_{z=0}, \nabla_{\Gamma_0, i} = \frac{z^i}{i!} \left(\frac{\partial^i}{\partial s^i} \nabla_{\Gamma_s} \right)_{|s=0} \text{ et } \Delta_{\Gamma_0, i} = \frac{z^i}{i!} \left(\frac{\partial^i}{\partial s^i} \Delta_{\Gamma_s} \right)_{|s=0}.$$

$$\operatorname{div} V(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(\sigma, z) \cdot \nu(\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a_i(z) \tilde{V}(\sigma, z) \cdot \nu(\sigma) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Theta^i(\sigma, z) (\tilde{V}_T)(\sigma, z),$$

$$\operatorname{rot} V(x) = \frac{1}{\varepsilon} \nu(\sigma) \wedge \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(\sigma, z) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Lambda^i(\sigma, z) (\tilde{V})(\sigma, z),$$

où

$$\begin{cases} \Theta^i(\sigma, z)(V) = \frac{z^i}{i!} (\partial_s^i \operatorname{div}_{\Gamma_s})_{|s=0} V_T, \\ \Lambda^i(\sigma, z)(V) = \frac{z^i}{i!} \left[-\nu \wedge (\partial_s^i \nabla_{\Gamma_s})_{|s=0} V_N + \nu \wedge (\partial_s^i (I + s d\nu)^{-1})_{|s=0} d\nu V_T + (\partial_s^i \operatorname{rot}_{\Gamma_s})_{|s=0} V_T \nu \right]. \end{cases}$$

3.2.1 Equations des profils

Nous substituons à u^ε , H^ε et aux opérateurs différentiels leurs développements asymptotiques (3.2.1) et (3.2.2) dans (3.0.3)-(3.0.2) afin d'obtenir les expressions vérifiées par les termes du développement pour $(\sigma, z) \in \Gamma \times (0, 1)$ ou $y \in \Omega'$.

Comme les équations (3.0.2) sont linéaires, chaque H^i satisfait (3.0.2) dans Ω' . Les conditions de transmission (3.0.2) deviennent pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} [H^i \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [(H^i + \bar{U}^i) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Donc, pour déterminer complètement H^i , nous avons besoin d'une relation entre les composantes normale et tangentielle de H^i sur $\partial\Omega' = \Gamma$. Pour cela, nous rappelons la définition des espaces de Beppo-Levi :

Définition 3.2.1 (Espaces de Beppo-Levi)

Soit Ω' un ouvert de complémentaire borné. Nous notons $W^1(\Omega')$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}')$ pour la semi-norme $\|\nabla \varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega')} = \|\varphi\|_{W^1(\Omega')}$.

Nous définissons aussi la norme $\|\varphi\|_{1, \Omega'} = \int_{\Omega'} \frac{1}{1 + \|x\|^2} |\varphi|^2 dx + \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega')}$ (voir [24]).

Lemme 3.2.1

Les applications $\|\cdot\|_{W^1(\Omega')}$ et $\|\cdot\|_{1, \Omega'}$ sont équivalentes sur $W^1(\Omega')$ (voir [24]).

et nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 3.2.2

Soit $l \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{H}^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Il existe une unique solution $H \in \mathbb{H}^l(\Omega')$ à

$$\begin{cases} H \in \mathbb{L}^2(\Omega'), \\ \text{rot } H = 0 \text{ dans } \Omega', \\ \text{div } H = 0 \text{ dans } \Omega', \\ H \cdot n = f \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

et donc une unique application ψ de $\mathbb{H}^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans lui-même qui envoie $H \cdot n$ sur $H \wedge n$.

Preuve. Le problème (3.2.3) a classiquement une unique solution $H \in \mathbb{L}^2(\Omega')$ (cf [24]) : comme $\text{rot } H = 0$, il existe une application φ telle que $H = -\nabla\varphi$. Grâce au lemme 3.2.1, nous appliquons le théorème de Lax-Milgram qui nous donne une solution $\varphi \in W^1(\Omega')$. Comme la condition au bord est régulière, nous utilisons ensuite l'inégalité 2.2.14 pour obtenir la régularité annoncée ainsi que l'existence et l'unicité de ψ . ■

En injectant le développement asymptotique formel dans les conditions de Neumann, celles-ci deviennent $\left(\frac{\partial U^i}{\partial z}\right)_{z=0,\varepsilon} = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En revenant à (3.0.3)-(3.0.2), nous annulons les termes des équations aux différents ordres en ε :

Termes à l'ordre ε^{-1} : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{cases} \partial_z [(H^0 + U^0) \cdot \nu] = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^0 = 0. \end{cases}$$

Grâce à la condition de transmission sur Γ_ε , nous obtenons que $(H^0 + U^0) \cdot \nu = 0$ dans $\Gamma \times I_1$. Grâce au lemme 3.2.2, $H^0 = 0$ dans Ω' et $H^0 \wedge \nu = 0$ sur $\Gamma \times \{0\}$. Puisque ν ne dépend pas de z , la seconde équation donne $H^0 \wedge \nu = 0$ dans $\Gamma \times I_1$. Finalement,

$$H^0 = -(U^0 \cdot \nu) \nu.$$

Remarque 3.2.1

Comme dans le cas plan, bien que H vérifie une équation globale dans $\mathbb{R}^3$, il se comporte comme un **opérateur local** à l'ordre 0.

Termes à l'ordre ε^0 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\frac{\partial U^0}{\partial t} - \partial_z^2 U^0 = |\partial_z U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0),$$

Comme nous supposons que la donnée initiale ne varie pas dans l'épaisseur de ω_ε , nous pouvons prouver (voir l'annexe 11.1) que U^0 ne dépend pas de z et est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{sur } \Gamma, \\ U^0(t=0) = U_0^0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où H^0 est l'opérateur local précédemment défini.

$$\begin{cases} \partial_z [(H^1 + U^1) \cdot \nu] + \Theta^0(H^0 + \overline{U}^0) + G_0 \nu \cdot (H^0 + \overline{U}^0) = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^1 + \Lambda^0(H^0) = 0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Termes d'ordre ε : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \partial_z^2 U^1 = & |\partial_z U^0|^2 U^1 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^0 \\ & + U^1 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) + G_0 (\partial_z U^0 + U^0 \wedge \partial_z U^0), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \partial_z [(H^2 + U^2) \cdot \nu] + \Theta^0(H^1 + \overline{U}^1) + G_0 \nu \cdot (H^1 + \overline{U}^1) \\ \quad + \Theta^1(H^0 + \overline{U}^0) + a_1 \nu \cdot (H^0 + \overline{U}^0) = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^2 + \Lambda^0(H^1) + \Lambda^1(H^0) = 0, \end{cases}$$

Termes d'ordre ε^2 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \partial_z^2 U^2 = & |\partial_z U^0|^2 U^2 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^2) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^2 \wedge H^0 \\ & + U^0 \wedge H^2 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + a_1 (\partial_z U^0 + U^0 \wedge \partial_z U^0) + G_0 (\partial_z U^1 + U^0 \wedge \partial_z U^1 + U^1 \wedge \partial_z U^0) \\ & + \Delta_{\Gamma_0} U^0 + |\partial_z U^1|^2 U^0 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^1 + |\nabla_{\Gamma_0} U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^0 \\ & + U^1 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \partial_z [(H^3 + U^3) \cdot \nu] + \Theta^0(H^2 + \overline{U}^2) + G_0 \nu \cdot (H^2 + \overline{U}^2) \\ \quad + \Theta^1(H^1 + \overline{U}^1) + a_1 \nu \cdot (H^1 + \overline{U}^1) \\ \quad + \Theta^2(H^0 + \overline{U}^0) + a_2 \nu \cdot (H^0 + \overline{U}^0) = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^3 + \Lambda^0(H^2) + \Lambda^1(H^1) + \Lambda^2(H^0) = 0, \end{cases}$$

Termes d'ordre ε^3 : dans $\Gamma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \partial_z^2 U^3 = & |\partial_z U^0|^2 U^3 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^3) U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^3 + U^3 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^3 \wedge H^0 \\ & + U^0 \wedge H^3 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + a_2 (\partial_z U^0 U^0 \wedge \partial_z U^0) + a_1 (\partial_z U^1 + U^0 \wedge \partial_z U^1 + U^1 \wedge \partial_z U^0) \\ & + G_0 (\partial_z U^2 + U^0 \wedge \partial_z U^2 + U^2 \wedge \partial_z U^0 + U^1 \wedge \partial_z U^1) + \Delta_{\Gamma_0} U^1 + \Delta_{\Gamma_0,1} U^0 \\ & + |\partial_z U^1|^2 U^1 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^2 + 2 (\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^2) U^1 + 2 (\partial_z U^1 \cdot \partial_z U^2) U^0 \\ & + |\nabla_{\Gamma_0} U^0|^2 U^1 + 2 (\nabla_{\Gamma_0} U^0 \cdot \nabla_{\Gamma_0} U^1) U^0 + 2 (\nabla_{\Gamma_0} U^0 \cdot \nabla_{\Gamma_0,1} U^0) U^0 \\ & + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^1 + U^1 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^0 + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0,1} U^0 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^2 \\ & + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) \\ & - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) \\ & - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^2 \wedge (U^1 \wedge H^0) \end{aligned}$$

3.2.2 Etude des profils

3.2.2.1 Existence de U^0

Théorème 3.2.1

Soit U_0^0 tel que $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$, il existe alors une unique solution à (3.2.5) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma, \\ U^0(0, \sigma) = U_0^0(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Gamma, \\ H^0 = -(U^0 \cdot n) \nu \end{cases} \quad (3.2.5)$$

telle que $|U^0| = 1$ et $U^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma))$.

Remarque 3.2.2

Si nous supposons que la donnée initiale U_0^0 dépend de z et si nous voulons obtenir l'existence de la solution sur $\mathbb{R}_t^+$, nous avons besoin que la partie de U_0^0 dépendant de z c'est-à-dire

$$\widetilde{U}_0^0 = U_0^0 - \overline{U}_0^0 = U_0^0 - \int_{-1}^1 U_0^0(\sigma, z) dz$$

soit plus petite que $\overline{U}_0^0$ (voir aussi l'annexe 11.1). Ce choix ne change rien aux estimations de reste décrites dans ce chapitre, mais modifie les équations satisfaites par les profils suivants.

Preuve. La preuve suit exactement le même schéma que celle du théorème 2.1.1, le domaine périodique $]0, 1[$ étant remplacé par la surface Γ . ■

3.2.2.2 Existence de U^1

Théorème 3.2.2

Sous les hypothèses du théorème 3.2.1 et avec l'hypothèse supplémentaire que $U_0^1 \in \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$, il existe une unique solution à :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \partial_z^2 U^1 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ \quad - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^1 = 0 & \text{sur } \Gamma \times \{0, 1\}, \\ U^1(0, \cdot) = U_0^1(\cdot) & \text{dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

où

$$\begin{cases} \partial_z [(H^1 + U^1) \cdot \nu] + \Theta^0(H^0 + \overline{U}^0) + G_0 \nu \cdot (H^0 + \overline{U}^0) = 0 & \text{dans } \Gamma \times I_1, \\ \nu \wedge \partial_z H^1 + \Lambda^0(H^0) = 0 & \text{dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. Les équations (3.2.4) et les conditions de transmission (3.0.2) donnent :

$$\begin{cases} (H^1 + \overline{U^1}) \cdot \nu = (1 - z) \left[\Theta^0 (H^0 + \overline{U^0}) + G_0 \nu \cdot (H^0 + \overline{U^0}) \right], \\ H^1 \wedge \nu = \psi \left(\left((H^1 + \overline{U^1}) \cdot \nu \right)_{|z=0} \right) + z \Lambda^0(H^0). \end{cases}$$

et donc $H^1 = - (U^1 \cdot \nu) \nu + q$, avec

$$\begin{aligned} q = & (1 - z) \left[\Theta^0 (H^0 + \overline{U^0}) + G_0 \nu \cdot (H^0 + \overline{U^0}) \right] \nu \\ & + \nu \wedge \psi \left(\Theta^0 (H^0 + \overline{U^0}) + G_0 \nu \cdot (H^0 + \overline{U^0}) \right) + \nu \wedge (z \Lambda^0(H^0)), \end{aligned}$$

et donc $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{H}^6(\Gamma) \otimes \mathcal{C}^\infty(I_1))$. La preuve de l'existence de U^1 est la même que celle du théorème 2.1.2 au chapitre 2. ■

3.2.2.3 Existence de U^2

Théorème 3.2.3

Sous les hypothèses des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 et avec l'hypothèse supplémentaire $U_0^2 \in \mathbb{H}^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$, il existe une unique solution à :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \partial_z^2 U^2 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^2 + U^2 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^2 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) \\ \quad - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{0, 1\}, \\ U^2(0, \cdot) = U_0^2(\cdot) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

où

$$\begin{cases} \partial_z \left[(H^2 + \overline{U^2}) \cdot \nu \right] + \Theta^0 (H^1 + \overline{U^1}) + G_0 \nu \cdot (H^1 + \overline{U^1}) \\ \quad + \Theta^1 (H^0 + \overline{U^0}) + a_1 \nu \cdot (H^0 + \overline{U^0}) = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^2 + \Lambda^0(H^1) + \Lambda^1(H^0) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} F = & G_0 (\partial_z U^1 + U^0 \wedge \partial_z U^1) + \Delta_{\Gamma_0} U^0 + |\partial_z U^1|^2 U^0 + |\nabla_{\Gamma_0} U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^0 \\ & + U^1 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0). \end{aligned}$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^2 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}^5(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. La preuve suit le même schéma que celle des théorèmes 2.1.2, 2.1.3 et 3.2.2. ■

3.2.2.4 Existence de U^3

Théorème 3.2.4

Sous les hypothèses des théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 et avec l'hypothèse supplémentaire $U_0^3 \in \mathbb{H}^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^5(I_1)$, il existe une unique solution à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \partial_z^2 U^3 = U^0 \wedge \partial_z^2 U^3 + U^3 \wedge H^0 + U^0 \wedge H^3 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) \\ \quad - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^3 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{0, 1\}, \\ U^3(0, \cdot) = U_0^3(\cdot) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{array} \right. \quad (3.2.9)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z \left[(H^3 + \overline{U}^3) \cdot \nu \right] + \Theta^0 (H^2 + \overline{U}^2) + G_0 \nu \cdot (H^2 + \overline{U}^2) \\ \quad + \Theta^1 (H^1 + \overline{U}^1) + a_1 \nu \cdot (H^1 + \overline{U}^1) \\ \quad + \Theta^2 (H^0 + \overline{U}^0) + a_2 \nu \cdot (H^0 + \overline{U}^0) = 0, \\ \nu \wedge \partial_z H^3 + \Lambda^0(H^2) + \Lambda^1(H^1) + \Lambda^2(H^0) = 0, \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} F = & a_1 (\partial_z U^1 + U^0 \wedge \partial_z U^1) + G_0 (\partial_z U^2 + U^0 \wedge \partial_z U^2 + U^1 \wedge \partial_z U^1) \\ & + \Delta_{\Gamma_0} U^1 + \Delta_{\Gamma_0,1} U^0 + |\partial_z U^1|^2 U^1 + 2 (\partial_z U^1 \cdot \partial_z U^2) U^0 \\ & + |\nabla_{\Gamma_0} U^0|^2 U^1 + 2 (\nabla_{\Gamma_0} U^0 \cdot \nabla_{\Gamma_0} U^1) U^0 + 2 (\nabla_{\Gamma_0} U^0 \cdot \nabla_{\Gamma_0,1} U^0) U^0 \\ & + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^1 + U^1 \wedge \Delta_{\Gamma_0} U^0 + U^0 \wedge \Delta_{\Gamma_0,1} U^0 + U^2 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \partial_z^2 U^2 \\ & + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) \\ & - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) \\ & - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^2 \wedge (U^1 \wedge H^0) \end{aligned}$$

telle que pour tout $T > 0$,

$$U^3 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T; \mathbb{H}^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{5-2k}(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T; \mathbb{H}^4(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{6-2k}(I_1) \right) \right].$$

Preuve. La preuve suit le même schéma que celle des théorèmes 2.1.2, 2.1.3 et 3.2.2. ■

3.3 Injections de Sobolev et estimations d'énergie en couche mince

Nous devons maintenant estimer les restes des champ et moment magnétiques. Ces estimations se faisant sur le domaine ω_ε dépendant de ε , nous précisons, comme au chapitre 2, la dépendance en ε des injections de Sobolev pour connaître la dépendance en ε des estimations que nous effectuerons. Nous reprenons dans la suite les résultats et estimations obtenues au chapitre 2 et les adaptions au domaine mince que nous considérons grâce au formalisme développé à la section 3.1.

3.3.1 Injections de Sobolev anisotropes

Nous travaillons maintenant dans le domaine ω_ε un domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par (voir Section 3.1) :

$$\omega_\varepsilon = \Psi(\Gamma \times \varepsilon I_1),$$

et nous introduisons alors des espaces de Sobolev anisotropes déduits des espaces de Sobolev usuels par changement d'échelle et renormalisation :

Défini tion 3.3.1

Pour $1 \leq p < +\infty$, nous définissons les espaces de Lebesgue de la façon suivante :

$$\mathbb{L}_\varepsilon^p = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon,p} = \left(\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,p} = \mathbb{L}_\varepsilon^p$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p} = \left\{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^p, \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \text{ et } (\varepsilon \partial_z) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p}} = \left(|u|_{\varepsilon,p}^p + \|\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p + \|\varepsilon \partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p \right)^{1/p}.$$

Dans le cas $p = 2$, nous posons $\mathbb{H}_\varepsilon^m = \mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}$, et $\|u\|_{\varepsilon,m} = \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}}$.

Dans le cas $p = +\infty$, nous posons :

$$\mathbb{L}_\varepsilon^\infty = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)| < +\infty \right\},$$

$$|u|_{\varepsilon,\infty} = \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)|.$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,\infty} = \mathbb{L}_\varepsilon^\infty$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}$, $m \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty} = \left\{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^\infty, \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \text{ et } (\varepsilon \partial_z) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty}} = \left(|u|_{\varepsilon,\infty} + \|\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} + \|\varepsilon \partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} \right).$$

Lemme 3.3.1

Soient $u \in \mathbb{L}_\varepsilon^p$ et $v(\sigma, x) = u(\Psi(\sigma, x))$ pour tout $(\sigma, x) \in \Gamma \times \varepsilon I_1$, $v \in \mathbb{L}^2(\Gamma \times \varepsilon I_1)$ et

$$\frac{1}{M_\varepsilon^{1/p}} |u|_{\varepsilon,p} \leq \int_{\Gamma \times \varepsilon I_1} |v|^p d\sigma dx \leq M_\varepsilon^{1/p} |u|_{\varepsilon,p},$$

où $M_\varepsilon = \frac{\sup_{\sigma,x \in \Gamma \times \varepsilon I_1} |\text{Jac}\Psi(\sigma, x)|}{\inf_{\sigma,x \in \Gamma \times \varepsilon I_1} |\text{Jac}\Psi(\sigma, x)|}$, et il existe μ, ν des constantes indépendantes de ε tels que pour ε suffisamment petit, $0 < \nu \leq M_\varepsilon \leq \mu$.

Preuve. L'application Ψ est un difféomorphisme régulier pour tout ε et donc $|\text{Jac}\Psi|$ est continue non nulle sur $\Gamma \times \varepsilon I_1$ et pour $\varepsilon \in [0, \eta_0]$. ■

Corollaire 3.3.1

Il existe une constante C indépendante de ε telle que :

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$, et pour $1 \leq p \leq 6$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}} \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{p}}. \quad (3.3.1)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$, et pour $2 \leq p \leq +\infty$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2p}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}}. \quad (3.3.2)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$,

$$|u|_{\varepsilon,12} \leq C \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}}. \quad (3.3.3)$$

Preuve. En utilisant le lemme (3.3.1), un atlas de cartes recouvrant Γ et une partition de l'unité, nous avons uniquement à prouver le résultat dans $]0, 1[\times I_1$.

Nous obtenons alors la première estimation immédiatement dans le cas $p = 6$, grâce au théorème 2.2.3. En interpolant $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^6$, nous obtenons le résultat.

En utilisant le changement d'échelle (2.2.5) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = \frac{1}{\varepsilon}$, nous nous ramenons au domaine $(0, 1)^3$. Grâce aux équations (2.2.6) et (2.2.7), nous obtenons la deuxième inégalité, en reportant dans (2.2.1) avec $p = +\infty$. Une interpolation entre $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^\infty$ conclut.

En effectuant le même changement d'échelle, et en reportant dans (2.2.3) avec $p = 12$, nous obtenons la dernière inégalité. ■

3.3.2 Trace et relèvement

Rappelons tout d'abord une définition des espaces $\mathbb{H}^s(\Omega)$, $s = k + \theta > 0$, $0 < \theta < 1$ (voir [44, 43]) :

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{H}^k(\Omega), \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}.$$

En procédant à des changements d'échelle, nous définissons de même que pour les espaces $\mathbb{H}^p$, des espaces anisotropes sur le bord $\partial\omega_\varepsilon = \Psi(\Gamma \times \{0, \varepsilon\})$ (Γ n'a pas de bord) :

$$\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon) = \left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^k(\partial\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\partial\omega_\varepsilon|^2} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(y) - D_\varepsilon^\alpha u(y')|^2}{(|\sigma - \sigma'|^2 + \varepsilon^{-2}|z - z'|^2)^{n/2+s}} dy dy' < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^k(\partial\omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{|\partial\omega_\varepsilon|^2} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(y) - D_\varepsilon^\alpha u(y')|^2}{(|\sigma - \sigma'|^2 + \varepsilon^{-2}|z - z'|^2)^{n/2+s}} dy dy' \right)^{1/2},$$

où $y = \Psi(\sigma, z)$, $y' = \Psi(\sigma', z')$, $D_\varepsilon = (\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}}^t, \varepsilon \partial_z)^t$ et $\alpha \in \mathbb{N}^k$.

Lemme 3.3.2

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$,

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{\varepsilon,1}.$$

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $0 < \varepsilon$ suffisamment petit et $f \in \mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$, il existe un relèvement $\psi \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$ de f tel que :

$$\|\psi\|_{\varepsilon,1} \leq C \|f\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)}.$$

Preuve.

Théorème de trace anisotrope : pour tout $(\sigma, z) \in \Gamma \times I_1$, nous posons $v(\sigma, z) = (u \circ \Psi)(\sigma, \varepsilon z)$. Nous appliquons maintenant le théorème de trace classique à v et nous obtenons :

$$\|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times \{0,1\})} \leq c \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Gamma \times I_1)},$$

où c ne dépend pas de ε . Nous effectuons quelques estimations sur v : en utilisant un atlas recouvrant Γ et une partition de l'unité, nous pouvons nous ramener à des fonctions à support dans $\Psi(U \times \varepsilon I_1)$ où U est un ouvert de Γ . Nous obtenons de même qu'aux lemmes 3.3.1 et 3.3.1 qu'il existe des constantes C et C' indépendantes de ε telles que :

$$C \|u\|_{\varepsilon,1} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Gamma \times I_1)} \leq C' \|u\|_{\varepsilon,1}.$$

Comme nous avons défini les espaces $\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$ tels qu'ils prennent immédiatement en compte l'anisotropie (comme pour les espaces de Sobolev), nous avons les estimations suivantes sur la norme $\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$:

$$C \|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma \times \{0,1\})} \leq C' \|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)},$$

ce qui donne le résultat.

Théorème de relèvement anisotrope : De même, nous appliquons le théorème de relèvement classique à $g(\sigma, z) = f \circ \Psi(\sigma, \varepsilon z)$, $(\sigma, z) \in \Gamma \times \{0, 1\}$ et nous obtenons un relèvement $v \in \mathbb{H}^1(\Gamma \times I_1)$. L'application Ψ étant un difféomorphisme sur ω_{η_0} , nous définissons u de façon unique par $u(\Psi(\sigma, \varepsilon z)) = v(\sigma, z)$. u est alors un relèvement de $f \in \mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$ et les estimations précédentes donnent le résultat. ■

3.3.3 Quelques inégalités

Nous utiliserons aussi des versions anisotropes des inégalités du lemme 2.2.2 :

Lemme 3.3.3

Pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$ tel que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|u\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|u|_{\varepsilon,2}^2 + \left| \Delta_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right|_{\varepsilon,2}^2 + \left| \varepsilon^2 \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z u) \right|_{\varepsilon,2}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.3.4)$$

Pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\varepsilon,m} \leq & C \left(|u|_{\varepsilon,2} + \left\| \operatorname{div}_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right\|_{\varepsilon,m-1} + \left\| \varepsilon \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z (u \cdot \nu)) \right\|_{\varepsilon,m-1} + \left\| \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} \wedge u + \varepsilon (\nu \partial_z) \wedge u \right\|_{\varepsilon,m-1} \right. \\ & \left. + \|u \cdot \nu\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Preuve. En posant $v(\sigma, z) = u(\Psi(\sigma, \varepsilon z))$, nous nous ramenons au domaine $\Gamma \times I_1$. Nous appliquons alors le lemme 2.2.2 à v , et nous en déduisons le résultat grâce aux lemmes 3.3.1 et 3.3.2. ■

Corollaire 3.3.2

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$ vérifiant $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, nous avons :

$$\left\| (\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} + \varepsilon (\nu \partial_z)) u \right\|_{\varepsilon,1} \leq C \left(\left| \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z u|_{\varepsilon,2} + \left| \Delta_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right|_{\varepsilon,2} + \left| \varepsilon^2 \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z u) \right|_{\varepsilon,2} \right). \quad (3.3.6)$$

De plus, si $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^3$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\left\| (\nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} + \varepsilon (\nu \partial_z)) u \right\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(\left| \nabla_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \partial_z u|_{\varepsilon,2} + \left\| \Delta_{\Gamma_{\varphi(x)}} u \right\|_{\varepsilon,1} + \left\| \varepsilon^2 \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z u) \right\|_{\varepsilon,1} \right). \quad (3.3.7)$$

3.4 Equations du reste - Estimations d'énergie

– Dans ω_ε , nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(t, x) = U^0(t, P(x)) + \varepsilon U^1\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ \quad + \varepsilon^3 U^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 r^\varepsilon(t, x), \\ H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, P(x)) + \varepsilon H^1\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 H^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ \quad + \varepsilon^3 H^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x), \end{array} \right.$$

– Dans Ω' ,

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0(t, x) + \varepsilon H^1(t, x) + \varepsilon^2 H^2(t, x) + \varepsilon^3 H^3(t, x) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x),$$

où r^ε et Q^ε sont les termes de reste de u^ε et H^ε .

Remarque 3.4.1

Tous les termes qui dépendent de U^0 , H^0 , U^1 , $\dots$ vivent naturellement dans le domaine $\Gamma \times (0, 1)$. A partir de maintenant, quand nous considérons ce genre de terme dans les équations de reste, ils sont définis sur l'espace ω_ε et nous supposons qu'ils sont évalués en $\Psi^{-1}(x)$ où $x \in \omega_\varepsilon$.

Nous précisons aussi les expressions des opérateurs que nous utilisons. Nous posons $a_r = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon z} \frac{(\varepsilon z - s)^2}{2} \partial_z^3 G(\sigma, s) ds$ et nous obtenons :

$$- \nabla u = (\partial_z u) \nu + \nabla_{\Gamma_0} u + \varepsilon \nabla_{\Gamma_0, 1} + \varepsilon \nabla^r u, \text{ où } \nabla^r u = \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^{\varepsilon z} (\varepsilon z - s) (\partial_z^2 \nabla_{\Gamma_z}) (\sigma, s) ds \right] (u).$$

$$- \operatorname{div} V = \frac{1}{\varepsilon} \partial_z (V \cdot \nu) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i a_i \nu \cdot V + \varepsilon^2 a_r \nu \cdot V + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Theta^i(V) + \varepsilon^2 \Theta^r(V),$$

$$\text{où } \Theta^r(V) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\int_0^{\varepsilon z} \frac{(\varepsilon z - s)^2}{2} (\partial_z^3 \operatorname{div}_{\Gamma_z}) (\sigma, s) ds \right] (V_T).$$

$$- \operatorname{rot} V = \frac{1}{\varepsilon} \nu \wedge \partial_z V + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Lambda^i(V) + \varepsilon^2 \Lambda^r(V),$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda^r(V) = & -\nu \wedge \nabla^r V_N + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\int_0^{\varepsilon z} \frac{(\varepsilon z - s)^2}{2} \nu \wedge \partial_z^3 ((I + z d\nu)^{-1}) d\nu ds \right] (V_T) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\int_0^{\varepsilon z} \frac{(\varepsilon z - s)^2}{2} \partial_z^3 \operatorname{rot}_{\Gamma_z} \right] (V_T) \nu. \end{aligned}$$

$$- \Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i a_i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 a_r \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta_{\Gamma_0} u + \varepsilon \Delta_{\Gamma_0, 1} u + \varepsilon \Delta^r u,$$

$$\text{où } \Delta^r u = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon z} (\varepsilon z - s) (\partial_z^2 \Delta_{\Gamma_z}) (\sigma, s) ds \right) u.$$

Pour tous les termes de reste précédents, nous avons :

$$\|\mathcal{A}^r u\|_{\mathbb{H}^p(\Gamma \times I_1)} \leq C \varepsilon \|u\|_{\mathbb{H}^{p+d}(\Gamma \times I_1)},$$

où d est le degré de l'opérateur $\mathcal{A}$.

3.4.1 Le champ magnétique, existence et régularité

De même qu'au cours de l'étude des profils, nous obtenons un couplage entre les reste du champ et du moment magnétiques. En revenant aux équations (3.0.2), nous simplifions en utilisant les équations satisfaites par les profils. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\Omega' \cup \omega_\varepsilon), \\ \text{rot } Q^\varepsilon + f_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ \text{div } (Q^\varepsilon + \bar{r}^\varepsilon) + f_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ [Q^\varepsilon \wedge n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ [(Q^\varepsilon + \bar{r}^\varepsilon) \cdot n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

où

$$f_1 = \Lambda^0(H^3) + \Lambda^1(H^2 + \varepsilon H^2) + \Lambda^2(H^1 + \varepsilon H^2 + \varepsilon^2 H^3) + \frac{1}{\varepsilon} \Lambda^r(H^0 + \varepsilon H^1 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^3 H^3)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & G_0(H^3 + \bar{U}^3) \cdot \nu + a^1(H^2 + \bar{U}^2 + \varepsilon H^3 + \varepsilon \bar{U}^3) \cdot \nu \\ & + a^2(H^1 + \bar{U}^1 + \varepsilon H^2 + \varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^2 H^3 + \varepsilon^2 \bar{U}^3) \cdot \nu \\ & + \frac{1}{\varepsilon} a^r(H^0 + \varepsilon H^1 + \varepsilon^2 H^2 + \varepsilon^3 H^3 + \bar{U}^0 + \varepsilon \bar{U}^1 + \varepsilon^2 \bar{U}^2 + \varepsilon^3 \bar{U}^3) \cdot \nu \\ & + \Theta^0(H^3 + \bar{U}^3) + \Theta^1(H^2 + \bar{U}^2 + \varepsilon H^3 + \varepsilon \bar{U}^3) + \Theta^2(H^1 + \bar{U}^1 + \varepsilon H^2 + \varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^2 H^3 + \varepsilon^2 \bar{U}^3) \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \Theta^r(H^0 + \varepsilon H^1 + \varepsilon^2 H^2 + \bar{U}^0 + \varepsilon \bar{U}^1 + \varepsilon^2 \bar{U}^2) \end{aligned}$$

En considérant Q^ε comme une fonction de r^ε , nous obtenons :

Lemme 3.4.1

Soient R^ε et S^ε les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } R^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ \text{div } (R^\varepsilon + \bar{r}^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ (R^\varepsilon + \bar{r}^\varepsilon) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } S^\varepsilon = f_1 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ \text{div } S^\varepsilon = f_2 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ S^\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses des théorèmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, si r^ε appartient à $\mathbb{H}_\varepsilon^p$, il existe un unique $Q^\varepsilon = R^\varepsilon + S^\varepsilon$ et des constantes c_0 indépendantes de ε telles que R^ε est linéaire en r^ε et pour $i \in \{0, \dots, 3\}$,

$$\|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} \leq c_0 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,p},$$

$$\|S^\varepsilon\|_{\varepsilon,i} \leq c_0 \sum_{i=0}^3 \left(\|U^i\|_{\varepsilon,i} + \|H^i\|_{\varepsilon,i} \right)$$

Preuve. Intéressons nous tout d'abord à R^ε : il existe $\Phi^\varepsilon \in W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ tel que $R^\varepsilon = -\nabla \Phi^\varepsilon$ et Φ^ε est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \Phi^\varepsilon = -\text{div } r^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ -\Delta \Phi^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial \nu} = \bar{r}^\varepsilon \cdot \nu & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ [\Phi^\varepsilon] = 0, \left[\frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial \nu} \right] = -r^\varepsilon \cdot \nu & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Pour tout $\Phi, \Psi \in W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$, nous posons $\alpha(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega' \cup \omega_\varepsilon} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, dx$ et

$$\beta(\Psi) = - \int_{\Omega' \cup \omega_\varepsilon} \operatorname{div} \bar{r}^\varepsilon \Psi \, dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\bar{r}^\varepsilon \cdot n) \Psi \, d\gamma.$$

α est continue et coercive dans $W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ et

$$\begin{aligned} |\beta(\Psi)| &= \int_{\Omega' \cup \omega_\varepsilon} \bar{r}^\varepsilon \cdot \nabla \Psi \, dx \\ &\leq \|\bar{r}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lax-Milgram et nous obtenons l'existence de $\Phi^\varepsilon \in W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ et $\|R^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} = \|\Phi^\varepsilon\|_{W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} \leq \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)}$, et donc $|R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \leq |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}$. Pour augmenter la régularité de la solution, nous reprenons des idées exposées dans [17, 19, 35] : nous cherchons les équations satisfaites par les dérivées de Φ^ε . Pour cela, nous introduisons des champs de vecteurs tangents ou normaux X à Γ sur un ouvert de $\omega_\varepsilon \cup \{x \in \Omega', \varphi(x) < \eta_0\}$ que nous prolongeons continûment par zéro, au moyen d'une troncature, au reste de ω_ε et dans un voisinage extérieur de Γ . Nous définissons alors les dérivées tangentielle et normale par $(X \cdot \nabla)$, cette définition étant valide dans $\Omega' \cup \omega_\varepsilon$.

Les équations des dérivées tangentielles de Φ^ε s'obtiennent en dérivant tangentiellement les équations de Φ^ε . Lorsque nous dérivons les équations dans la direction normale, nous multiplions par ε pour retrouver les espaces de Sobolev anisotropes, et nous déduisons les conditions au bord de l'équation sur Φ^ε (à condition d'avoir suffisamment poussé la régularité dans les directions tangentielles). Finalement, nous obtenons $\|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} \leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,p}$ où C est une constante indépendante de ε .

Revenons à S^ε : f_1 et f_2 appartiennent toutes deux à $\mathbb{L}_\varepsilon^2$. Il existe donc une application $v \in W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ telle que :

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v = f_1 \quad \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad v \wedge \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon.$$

En reprenant les idées exposées dans [17, 19, 35], nous prouvons que $\|v\|_{\varepsilon,p} \leq C \|f_1\|_{\varepsilon,p}$.

Posons maintenant $w = S^\varepsilon - v$. w satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} w = 0 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} w = f_2 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ w \cdot n = -v \cdot n & \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Comme $\operatorname{rot} w = 0$, il existe $\Phi \in W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ telle que $w = -\nabla \Phi$ et nous nous ramenons au problème :

$$\begin{cases} -\Delta \Phi = f_2 & \text{dans } \Omega' \cup \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = v \cdot n & \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Soient α et β les applications :

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi, \Psi) &= \int_{\Omega' \cup \omega_\varepsilon} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, dx, \\ \beta(\Psi) &= \int_{\Omega' \cup \omega_\varepsilon} f_2 \cdot \Psi \, dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} (v \cdot n) \Psi \, d\gamma. \end{aligned}$$

L'application α est continue et coercive dans $W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ et

$$\begin{aligned} |\beta(\Psi)| &\leq \|f_2\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\Psi\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} + C \|v \cdot n\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \|\Psi\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \\ &\leq C \|f_2\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\Psi\|_{W^1(\omega_\varepsilon)} + C (\|v\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|\operatorname{div} v\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)}) \|\Psi\|_{W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} \\ &\leq C (\|f_2\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|v\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)}) \|\Psi\|_{W^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $\mathbb{W}^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$ et nous obtenons l'existence et l'unicité de Φ dans $\mathbb{W}^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)$. De plus, Φ satisfait :

$$\|\Phi\|_{\mathbb{W}^1(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} = \|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega' \cup \omega_\varepsilon)} \leq C (\|f_2\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} + \|v\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)}),$$

et donc $|w|_{\varepsilon,2} \leq C(|f_2|_{\varepsilon,2} + |v|_{\varepsilon,2})$. En appliquant à nouveau la stratégie donnée dans [17, 19, 35] et utilisée pour la régularité de R^ε , nous obtenons :

$$\|w\|_{\varepsilon,p} \leq C(\|f_2\|_{\varepsilon,p} + \|v\|_{\varepsilon,p})$$

En revenant à la définition de w , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|S^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} &\leq C(\|f_2\|_{\varepsilon,p} + \|f_1\|_{\varepsilon,p}) \\ &\leq C \sum_{i=0}^3 (\|U^i\|_{\varepsilon,p} + \|H^i\|_{\varepsilon,p}). \end{aligned}$$

■

3.4.2 Equations

Suivant le résultat du lemme 3.4.1, nous posons dans ω_ε :

$$a^\varepsilon(t, x) = U^0(t, P(x)) + \varepsilon U^1\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 U^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right),$$

$$Q^\varepsilon = R^\varepsilon + S^\varepsilon \text{ où } R^\varepsilon \text{ est linéaire en } r^\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} K^\varepsilon(t, x) = H^0(t, P(x)) + \varepsilon H^1\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) &+ \varepsilon^2 H^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \\ &+ \varepsilon^3 H^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 S^\varepsilon. \end{aligned}$$

En revenant aux équations 3.0.3, nous simplifions en utilisant les équations des profils. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon = T_1 + \dots + T_8 + F^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon, \\ r^\varepsilon(0, x) = r_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \varepsilon^8 |\nabla r^\varepsilon|^2 r^\varepsilon, \\ T_2 = \varepsilon^5 (|\nabla r^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) r^\varepsilon), \\ T_3 = \varepsilon^2 (|\nabla a^\varepsilon|^2 r^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) a^\varepsilon), \\ T_4 = \varepsilon^2 (r^\varepsilon \wedge \Delta a^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon), \\ T_5 = a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon + r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon, \\ T_6 = -[a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge K^\varepsilon)], \\ T_7 = -\varepsilon^3 [r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon)], \\ T_8 = -\varepsilon^6 r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon), \end{array} \right.$$

et $F^\varepsilon = \varepsilon A + a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon - a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon)$, où A fait intervenir des sommes et des produits des profils ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 et le développement asymptotique des opérateurs différentiels, le tout évalué en $\left(P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$. L'expression complète de F^ε est donnée dans l'annexe 11.2.

En nous basant sur les résultats de régularité obtenus sur les profils, nous prouvons la propositions suivante :

Proposition 3.4.1

Soit $U^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$. Pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, et $i = 0, 1, 2$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{i,p}} \leq C_p.$$

Pour tout p , $2 \leq p < +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{3,p}} \leq C_p,$$

Pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\|K^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,p}} \leq C_p, \quad \|F^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\varepsilon,1} \leq C_2.$$

Preuve. Comme nous avons $U_0^0 \in \mathbb{W}^{7,\infty}(\Gamma)$, les résultats de régularité sur les profils (Théorèmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4) et les injections de Sobolev classiques donnent que pour $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\|U^i\|_{\mathbb{W}^{2,\infty}(\Gamma \times I_1)} \leq C,$$

$$\|U^i\|_{\mathbb{W}^{3,p}(\Gamma \times I_1)} \leq C, \quad 2 \leq p < +\infty.$$

En effectuant un changement d'échelle pour revenir à des fonctions définies sur ω_ε , nous obtenons le résultat. De même, nous obtenons des estimations dans $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Gamma \times I_1)$ de H^i et le lemme 3.4.1 utilisé conjointement avec le lemme 2.2.1 nous donne les estimations sur S^ε .

Les estimations sur F^ε se déduisent aisément des résultats précédents. ■

Remarque 3.4.2

Nous pourrions obtenir des résultats un peu plus précis en remarquant que U^0 ne dépend pas de z :

$$\begin{aligned} |\nabla a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p, \\ |D^2 a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p \varepsilon^{-1}, \\ |D^3 a^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p \varepsilon^{-2}, \\ |\nabla K^\varepsilon|_{\varepsilon,p} &\leq C_p. \end{aligned}$$

Nous n'aurons pas besoin de telles estimations dans les estimations qui vont suivre.

3.4.3 Le moment magnétique, estimation du reste

Grâce au formalisme donné aux opérateurs différentiels, aux lemmes anisotropes et aux résultats de régularité (mêmes pertes dans l'exposant de ε), nous pouvons effectuer les mêmes estimations qu'au chapitre 2. La principale différence réside dans la géométrie du problème : les opérateurs différentiant tangentiellement au bord dépendent de z . Nous ferons ainsi apparaître des commutateurs entre les opérateurs tangentiels et normaux, qui sont des opérateurs différentiels d'ordre moins élevé (perte de un degré) dans la direction normale. Par exemple, dans le cas du gradient :

$$[\partial_z, \nabla_{\Gamma_z}] u = -(I + z d\nu)^{-1} d\nu \nabla_{\Gamma_z} u.$$

Ces commutateurs interviennent dans les estimations du second membre et dans le terme dissipatif engendré par le terme $-\varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon$. Dans les deux cas, ils génèrent des termes dérivés tangentiellement et que l'on n'aura aucun mal à absorber ou à estimer.

Les estimations sont réalisées sur une approximation de Galerkin, ce qui nous permettra de justifier toutes les intégrations par parties effectuées. Nous considérons pour l'équation de Landau-Lifschitz un espace d'approximation construit à partir d'une base de fonctions propres de l'opérateur de Laplace anisotrope de domaine

$$\left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon \right\}.$$

De même qu'au chapitre 2, nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) = & |r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\nabla_{\Gamma_z} r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 \\ & + \varepsilon^2 \left(|\Delta_{\Gamma_z} r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \partial_z \nabla_{\Gamma_z} r_n^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + \left| \varepsilon^2 \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z r_n^\varepsilon(t, \cdot)) \right|_{\varepsilon,2}^2 \right), \end{aligned}$$

et nous supposons que $\mathbf{Q}(0) \leq \|r_0^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + \varepsilon^2 \|r_0^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^2$ est borné.

Comme nous considérons une approximation de Galerkin de r^ε , nous avons l'existence de $\mathbf{Q}$ sur un intervalle maximal $[0, T_{n,\varepsilon}^*]$ où $0 < T_{n,\varepsilon}^* \leq +\infty$. Nous voulons prouver ici qu'il existe ε_T suffisamment petit tel que $\mathbf{Q}$ existe sur l'intervalle $[0, T]$ indépendamment de n si $\varepsilon \leq \varepsilon_T$. Nous démontrerons aussi les estimations données dans le théorème 3.0.1. Nous procédons de la façon suivante :

Nous choisissons $T > 0$ et grâce aux estimations d'énergie que nous obtenons au moyen d'intégrations par parties, nous prouvons que $\mathbf{Q}$ satisfait sur $[0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*]$ l'inégalité différentielle :

$$\mathbf{Q}'(t) \leq C_T(1 + \mathbf{Q}(t)) + \varepsilon P_T(\mathbf{Q}(t)), \quad t \in [0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*], \quad (3.4.3)$$

où C_T est une constante et P_T un polynôme, tous deux indépendants de n et ε (mais pas de T). Cette inégalité implique que $T_{n,\varepsilon}^* \geq T$ dès que $\varepsilon \in]0, \varepsilon_T]$ où ε_T est une constante suffisamment petite. $\mathbf{Q}(t)$ satisfait alors (3.4.3) sur l'intervalle $[0, T]$, pour tout $T \leq T_\varepsilon$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = +\infty$. En utilisant les injections de Sobolev anisotropes et en prenant en compte la renormalisation dans les espaces de Lebesgue, nous obtenons le théorème 3.0.1.

Chapitre 4

Fils ferromagnétiques

Nous nous intéressons enfin au cas d'un fil rectiligne et 1-périodique $\omega_\varepsilon = \varepsilon\Sigma \times \mathbb{R}$ de matériau ferromagnétique, placé dans le vide, Σ étant un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$, étoilé en 0. Nous rappelons les équations vérifiées par le moment magnétique u^ε et le champ magnétique $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$:

– Equation de Landau-Lifschitz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon)) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge (\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \mathcal{H}(u^\varepsilon))) \quad \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(t=0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon \text{ est périodique sur } I_1 =]0, 1[, \end{array} \right. \quad (4.0.1)$$

où ν est la normale sortante à $\partial\omega_\varepsilon = \varepsilon\partial\Sigma \times \mathbb{R}$.

– Equations de la magnétostatique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (\mathcal{H}(u^\varepsilon) + \bar{u}^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} \mathcal{H}(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \mathcal{H}(u^\varepsilon) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2 \times I_1), \end{array} \right. \quad (4.0.2)$$

où $\bar{u}$ désigne le prolongement de u par 0 hors de ω_ε .

Remarque 4.0.3

La périodicité du domaine permet d'éviter les interactions entre le domaine mince et la couche limite qui se formerait aux bouts du fil, à la frontière $\varepsilon\Sigma \times \{0, 1\} = \varepsilon\Sigma \times \partial I_1$.

Nous notons dans la suite,

- $\mathbb{H}_p^l(I_1)$ le sous-espace de $\mathbb{H}^l(I_1)$ dont les fonctions sont périodiques sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{L}_p^2(I_1)$ l'adhérence de $\mathbb{H}_p^1(I_1)$ dans $\mathbb{L}^2(I_1)$. L'indice p indique à chaque fois la périodicité sur I_1 dans les espaces considérés,
- pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \times I_1$, $x = (\sigma, z)$ avec $\sigma \in \mathbb{R}^2$ et $z \in I_1$.

Nous travaillons comme aux chapitres précédents avec la forme équivalente de l'équation de Landau-Lifschitz (4.0.1) :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon \wedge \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon) - u^\varepsilon \wedge (u^\varepsilon \wedge \mathcal{H}(u^\varepsilon)). \quad (4.0.3)$$

Pour préciser le comportement de u^ε et de $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ dans le fil, nous effectuons un changement d'échelle pour nous ramener au domaine $\Sigma \times I_1$ indépendant de ε . Ce faisant, nous sommes amenés à considérer le domaine extérieur $(\mathbb{R}^2 \setminus \varepsilon\Sigma) \times I_1$ qui, lui, dépend toujours de ε . Nous contournons cette difficulté en effectuant le changement d'échelle dans l'espace tout entier, le domaine ferromagnétique filaire étant alors $\Sigma \times I_1$, le domaine extérieur étant $\Sigma' \times I_1$ où Σ' est le complémentaire de Σ dans $\mathbb{R}^2$. Ce changement d'échelle introduit une anisotropie dans les équations reflétant la structure géométrique du problème. Pour la gérer, nous décomposons les opérateurs différentiels de la façon suivante :

- $\nabla u = \nabla_\tau u + (\partial_z u)e_3$, où $\nabla_\tau = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, 0)^t$ est le gradient transverse au fil,
- $\operatorname{div} V = \operatorname{div}_\tau V_\tau + \partial_z V_l$ où $\operatorname{div}_\tau V = (\nabla_\tau \cdot V)$, $V_\tau = (V_1, V_2, 0)^t$ est la composante transverse de V et $V_l = (V \cdot e_3)$ sa composante longitudinale,
- $\Delta u = \Delta_\tau u + \partial_z^2 u$, où $\Delta_\tau = \operatorname{div}_\tau \nabla_\tau$,
- $\operatorname{rot} V = \operatorname{rot}_\tau V + e_3 \wedge \partial_z V$, où $\operatorname{rot}_\tau V = \nabla_\tau \wedge V = \begin{pmatrix} \nabla_\tau^\perp V_l \\ \operatorname{rot}_{2D} V_\tau \end{pmatrix}$ et $A^\perp = (A_2, -A_1)^t$.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.0.1

Soit une donnée initiale u_0^ε satisfaisant

$$u_0^\varepsilon(x) = U_0^0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right),$$

où U_0^0 est indépendant de ε , $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{H}^6(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1)$. Il existe alors un temps $T_0 > 0$, indépendant de ε et des profils U^0 et U^1 vérifiant

- $U^0 \in \bigcap_{k=0}^3 \mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1) \right)$ est solution de l'équation (4.0.1) dans le cas 2D avec $\varepsilon = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^0}{\partial t} - \Delta_\tau U^0 = |\nabla_\tau U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ \frac{\partial U^0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ U^0(t=0) = U_0^0 \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ H^0 = \mathcal{H}(U^0) \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ U^0 \text{ est périodique en } z \in I_1, \end{array} \right.$$

où $-H^0$ est la projection de U^0 sur le champ de gradient transverse.

- $U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left(\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T_0; \mathbb{H}^{5-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1) \right) \right)$,

tels que la solution régulière des équations (4.0.1)-(4.0.2) existe sur $[0, T_0]$ et admet un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon U^1 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 r^\varepsilon(t, x)$$

où $x = (\sigma, z) \in \omega_\varepsilon$, $t \in [0, T_0]$, et la fonction $r^\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon))$ pour tout $2 \leq p \leq +\infty$ vérifie :

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^p(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/p}).$$

Remarque 4.0.4

- Même si nous ne l'énonçons pas, nous devons pousser le développement asymptotique formel jusqu'à l'ordre 3, obtenant ainsi un vrai développement asymptotique à l'ordre 2.
- Il est possible d'imposer une donnée initiale aux termes suivants du développement, nous ne l'avons pas fait pour la clarté de l'énoncé.
- Contrairement au cas des couches minces [48, 49], il n'y a pas de localisation du champ magnétique à l'ordre ε^0 . Nous devons alors considérer des solutions qui ne sont pas constantes dans la section du fil. De plus, le modèle limite est régi par l'équation de Landau-Lifschitz 2D avec, à la fois le champ démagnétisant et le terme d'échange, pour laquelle nous n'avons que de l'existence locale en temps [17].

Dans la suite, nous construisons tout d'abord formellement le développement asymptotique de u^ε et nous prouvons des résultats d'existence et de régularité pour tous ses termes jusqu'au temps d'existence T_0 de u^0 (Partie 4.1). Les équations satisfaites par les termes de reste de u^ε et $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$, ainsi que les résultats d'existence et les estimations d'énergie qui concluent la preuve du théorème 4.0.1 sont données dans la partie 4.3.

4.1 Développement asymptotique

Nous cherchons donc un développement asymptotique de u^ε et $H^\varepsilon = \mathcal{H}(u^\varepsilon)$ sous la forme :

- dans ω_ε ,

$$u^\varepsilon(t, x) = U^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon U^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \dots \quad (4.1.1)$$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon H^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \dots$$

- dans $(\mathbb{R}^2 \times I_1) \setminus \omega_\varepsilon$,

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon H^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \dots \quad (4.1.2)$$

où $x = (\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \times I_1$.

Effectuons quelques calculs préliminaires sur les opérateurs rotationnel et divergence.

Si nous avons $V(x) = \sum_{i \geq 0} V^i\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right)$,

$$\operatorname{rot} V = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot}_\tau V^0 + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial z} (e_3 \wedge V^i) + \operatorname{rot}_\tau V^{i+1} \right), \quad (4.1.3)$$

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_\tau V^0 + \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial z} V_3^i + \operatorname{div}_\tau V^{i+1} \right).$$

4.1.1 Equations des profils

Nous substituons à u^ε , $\mathcal{H}(u^\varepsilon)$ leurs développements asymptotiques (4.1.1) et (4.1.2) dans les équations (4.0.2) et (4.0.3) pour obtenir les expressions formelles satisfaites par les profils pour (σ, z) dans et à l'extérieur de ω_ε .

Comme les équations (4.0.2) sont linéaires, chaque H^i vérifie hors de ω_ε :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau H_\tau^i + \partial_z H_l^{i-1} = 0 & \text{dans } \Sigma' \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} H^i = 0 & \text{dans } \Sigma' \times I_1, \\ \nabla_\tau H_l^i = \partial_z H_\tau^{i-1} & \text{dans } \Sigma' \times I_1. \end{cases}$$

Comme nous voulons aussi déterminer les équations satisfaites par H^i dans $\Sigma \times I_1$, nous avons besoin de conditions de transmission au bord $\partial\Sigma \times I_1$ que nous déduisons de l'équation (4.0.2) :

$$\begin{cases} [H^i \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ \left[(H^i + \overline{U}^i) \cdot \nu \right] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

où $[v]$ est le saut de v à travers l'interface $\partial\omega_\varepsilon$.

En changeant les notations, nous les réécrivons :

$$\begin{cases} [H_l^i] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ [H_\tau^i \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ \left[(H_\tau^i + \overline{U}_\tau^i) \cdot \nu \right] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

La condition de Neumann sur u^ε devient aussi $\frac{\partial U^i}{\partial \nu} = 0$ pour tout $x = (\sigma, z) \in \partial\omega_\varepsilon = (\varepsilon\partial\Sigma) \times I_1$ et $i \in \mathbb{N}$.

Termes d'ordre ε^{-1} : dans $\Sigma \times I_1$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (H_\tau^0 + U_\tau^0) = 0, \\ \operatorname{rot}_{2D} H^0 = 0, \\ \nabla_\tau H_l^0 = 0. \end{cases}$$

De la dernière équation et de la première condition de transmission dans (4.1.5), nous déduisons que $H_l^0 \equiv H_l^0(t, z)$. Comme nous n'imposons pas de champ magnétique extérieur et que nous cherchons des solutions dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2 \times I_1)$, nous posons $H_l^0 \equiv 0$. Les autres composantes de H^0 , c'est-à-dire H_τ^0 , satisfont alors

$$\begin{cases} H^0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2 \times I_1), \\ \operatorname{div}_\tau (H_\tau^0 + U_\tau^0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} H_\tau^0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Comme nous n'imposons pas de champ magnétique extérieur, nous obtenons que $-H^0$ est la projection de U_τ^0 , et donc de U^0 , sur le champ de gradients transverses.

Termes d'ordre ε^0 : dans $\Sigma \times I_1$,

$$\frac{\partial U^0}{\partial t} - \Delta_\tau U^0 = |\nabla_\tau U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0). \quad (4.1.7)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (H_\tau^1 + U_\tau^1) + \partial_z (H_l^0 + U_l^0) = 0, \\ \operatorname{rot}_{2D} H_\tau^1 = 0, \\ \nabla_\tau H_l^1 = \partial_z H_\tau^0. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Termes d'ordre ε : dans $\Sigma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \Delta_\tau U^1 = & |\nabla_\tau U^0|^2 U^1 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^1 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ & + U^0 \wedge H^1 + U^1 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (H_\tau^2 + U_\tau^2) + \partial_z (H_l^1 + U_l^1) = 0, \\ \operatorname{rot}_{2D} H_\tau^2 = 0, \\ \nabla_\tau H_l^2 = \partial_z H_\tau^1. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Termes d'ordre ε^2 : dans $\Sigma \times I_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \Delta_\tau U^2 = & |\nabla_\tau U^0|^2 U^2 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^2) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^2 + U^2 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ & + U^0 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) \\ & - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + U_{zz}^0 + |U_z^0|^2 U^0 + U^0 \wedge U_{zz}^0 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^1 + |\nabla_\tau U^1|^2 U^0 \\ & + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^1 + U^1 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0), \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (H_\tau^3 + U_\tau^3) + \partial_z (H_l^2 + U_l^2) = 0, \\ \operatorname{rot}_{2D} H_\tau^3 = 0, \\ \nabla_\tau H_l^3 = \partial_z H_\tau^2. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Termes d'ordre ε^3 : dans $\Sigma \times I_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \Delta_\tau U^3 = & |\nabla_\tau U^0|^2 U^3 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^3) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^3 + U^3 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ & + U^0 \wedge H^3 + U^3 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) \\ & - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) \\ & + \partial_z^2 U^1 + |\nabla_\tau U^1|^2 U^0 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^2 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^2) U^1 \\ & + 2(\nabla_\tau U^1 \cdot \nabla_\tau U^2) U^0 + |\partial_z U^0|^2 U^1 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^0 \\ & + U^1 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^2 + U^2 \wedge \Delta_\tau U^1 \\ & + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

4.1.2 Etude des profils

4.1.2.1 Problème extérieur 2D pour la magnéto-statique

Dans la suite, lors de la détermination du champ magnétique, le changement d'échelle effectué dans l'espace tout entier nous amène à résoudre les équations de la magnéto-statique en dimension 2, dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (H + \bar{u}) = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

En nous basant sur les travaux de M.N. Le Roux [40] sur le problème extérieur 2D, nous introduisons des espaces de Sobolev à poids adaptés à la résolution du problème :

Définition 4.1.1

Soit $\rho = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Nous définissons les espaces de Sobolev à poids $\mathbf{W}_\alpha^l(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho(1 + \ln \rho)} u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), \nabla u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \right\}, \\ \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho^2(1 + \ln \rho)} u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho(1 + \ln \rho)} \nabla u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), D^2 u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \right\}, \\ \mathbf{W}_\alpha^l(\mathbb{R}^2) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\rho^{\alpha-|\beta|}(1 + \ln \rho)} \partial^\beta u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2), |\beta| \leq l \right\},\end{aligned}$$

où $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha > l$.

Pour résoudre le problème extérieur par des méthodes classiques (Lax-Milgram), nous avons besoin de normes équivalentes aux normes usuelles des espaces précédemment définis :

Proposition 4.1.1

Il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$, nous avons :

$$\left\| \frac{u}{\rho(1 + \ln \rho)} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

De même, pour tout $u \in \mathbf{W}_\alpha^1(\mathbb{R}^2)$, nous avons :

$$\left\| \frac{u}{\rho^\alpha(1 + \ln \rho)} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\| \frac{1}{\rho^{\alpha-1}(1 + \ln \rho)} \nabla u \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve. Le résultat se déduit, par un changement de variable, d'une inégalité de Hardy généralisée prouvée par P. Bolley et J. Camus dans [9] : soit $f \in \mathcal{D}(]0, 1[)$, on a alors :

(i) Si $\beta \neq -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $R > \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right)$, on a :

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^\beta \log^\gamma \left(\frac{R}{t} \right) dt \leq \left(\frac{2p}{|\beta+1|} \right)^p \int_0^1 |f'(t)|^p t^{\beta+p} \log^\gamma \left(\frac{R}{t} \right) dt,$$

(ii) Si $\gamma \neq -1$, $R \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^{-1} \log^\gamma \left(\frac{R}{t} \right) dt \leq \left(\frac{p}{|\gamma+1|} \right)^p \int_0^1 |f'(t)|^p t^{-1+p} \log^{\gamma+p} \left(\frac{R}{t} \right) dt.$$

■

Proposition 4.1.2

Les équations de la magnétostatique en deux dimensions

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mathcal{H}(u) + \overline{u}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot}_{2D} \mathcal{H}(u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [(\mathcal{H}(u) + \overline{u}) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (4.1.14)$$

où $u \in \mathbb{H}^n(\Sigma)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ont une unique solution $\mathcal{H}(u) \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$. De plus, il existe $\varphi \in \mathbb{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathcal{H}(u) = -\nabla \varphi$ et

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Sigma)}, \quad \|\mathcal{H}(u)\|_{\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve. Nous combinons des idées prises dans [17, 19, 35] pour l'existence et la régularité des solutions avec l'utilisation de l'espace $\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$ [40]. Nous suivons le même schéma que dans [17, 19] :

Etape 1 : Comme $\text{rot } \mathcal{H}(u) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, il existe une fonction régulière φ telle que $\mathcal{H}(u) = -\nabla\varphi$ et $[\varphi]_{|\partial\Sigma} = 0$, où on note $[f]$ le saut de f à l'interface $\partial\Sigma$. La fonction φ satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = -\text{div } u & \text{dans } \Sigma, \\ -\Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Sigma' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Sigma}, \\ [\varphi]_{|\partial\Sigma} = 0, \quad [\partial_\nu\varphi]_{|\partial\Sigma} = u \cdot \nu. \end{cases}$$

Etape 2 : Soit Σ_1 un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ contenant Σ . Par surjectivité de la trace, il existe $\psi_1 \in \mathbb{H}^{n+1}(\Sigma_1 \setminus \Sigma)$ tel que :

$$\|\psi_1\|_{\mathbb{H}^{n+1}(\Sigma_1 \setminus \Sigma)} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}^n(\Sigma)},$$

et

$$\psi_1|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \psi_1|_{\partial\Sigma'_1} = 0, \quad \partial_\nu\psi_1|_{\partial\Sigma'_1} = 0, \quad \partial_\nu\psi_1|_{\partial\Sigma} = u \cdot \nu,$$

où $\Sigma'_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_1$. Nous posons $\varphi = \varphi_1 + \psi_1$ et nous nous ramenons à la résolution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = -\text{div } u & \text{dans } \Sigma, \\ -\Delta\varphi_1 = \Delta\psi_1 & \text{dans } \Sigma_1 \setminus \Sigma, \\ -\Delta\varphi_1 = 0 & \text{dans } \Sigma'_1, \\ [\varphi_1]_{|\partial\Sigma_i} = 0, \quad [\partial_\nu\varphi_1]_{|\partial\Sigma_i} = 0, \quad i = 0, 1, \end{cases}$$

où $\Sigma_0 = \Sigma$. Nous posons :

$$f_1 = -\mathbf{1}_\Sigma \text{div } u, \quad f_2 = \mathbf{1}_{\Sigma_2 \setminus \Sigma} \Delta\psi_1, \quad F = f_1 + f_2.$$

Nous devons donc résoudre $-\Delta\varphi_1 = F$ dans $\mathbb{R}^2$ où F est régulière à support compact. Grâce à une intégration par partie, la proposition 4.1.1 et au théorème de Lax-Milgram, nous obtenons l'existence et l'unicité de $\varphi_1 \in \mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$ donc l'existence de $\varphi \in \mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$ et de $H \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, nous avons :

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Des résultats classiques de régularité sur la solution de l'opérateur de Laplace (voir [10]) améliorent ces estimations :

$$\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2)} = \|\mathcal{H}(u)\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Etape 3 : En suivant [17, 35], le cheminement de l'étape 2 et en utilisant la linéarité de l'équation (4.1.14), nous obtenons la régularité annoncée. ■

Proposition 4.1.3

Le problème extérieur 2D

$$\begin{cases} \text{div } H = \mathbf{1}_\Sigma f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \text{rot}_{2D} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [H \cdot \nu] = 0, \quad [H \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (4.1.15)$$

où $f \in \mathbb{H}^s(\Sigma)$, $s \in \mathbb{N}$, a une unique solution $H \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$ où $H = -\nabla\varphi$ avec $\varphi \in \mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$. De plus, nous avons :

$$\|H\|_{\mathbb{H}^{s+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{\mathbb{H}^s(\Sigma)}, \quad \|\varphi\|_{\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve. nous combinons des idées prises dans [17, 19, 35] pour l'existence et la régularité des solutions avec l'espace $\mathbf{W}_1^1(\mathbb{R}^2)$ [40]. La preuve suit le même cheminement qu'au lemme 4.1.14 à l'exception de l'intégration par parties à l'étape 2. ■

Dans la suite, nous devons aussi à résoudre :

$$\begin{cases} \operatorname{div} H = f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot}_{2D} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [H \cdot \nu] = 0, [H \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases}$$

où f est telle que $-\nabla f$ est soit solution de l'équation (4.1.14), soit solution de l'équation (4.1.15). Le premier problème se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\Delta H + \overline{u}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot}_{2D} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [H \cdot \nu] = 0, [(\Delta H + \overline{u}) \cdot \nu] = 0. \end{cases} \quad (4.1.16)$$

Nous avons :

Proposition 4.1.4

Le problème extérieur 2D (4.1.16) où $u \in \mathbb{H}^n(\Sigma)$, $n \in \mathbb{N}$, a une unique solution $H = -\nabla\varphi$ telle que $\varphi \in \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla H \in \mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)$. De plus, nous avons :

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{\mathbb{L}^2(\Sigma)}, \quad \|\nabla H\|_{\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}^n(\Sigma)}.$$

Preuve. La preuve suit le schéma de la preuve de la proposition 4.1.2. La proposition 4.1.1 fournit les normes équivalentes qui permettent d'obtenir la continuité et la coercivité lors de l'utilisation du théorème de Lax-Milgram à l'étape 2. ■

Le second problème se réécrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Delta H = \mathbf{1}_\Sigma f & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot}_{2D} H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ [H \cdot \nu] = 0, [(\Delta H) \cdot \nu] = 0. \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Nous avons :

Proposition 4.1.5

Le problème extérieur bidimensionnel (4.1.17) où $f \in \mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)$, $n \in \mathbb{N}$, a une unique solution $H = -\nabla\varphi$ telle que $\varphi \in \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla H \in \mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)$. De plus, nous avons :

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}^2(\Sigma)}, \quad \|\nabla H\|_{\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve. La preuve suit le schéma des preuves des propositions précédentes. ■

4.1.2.2 Existence de U^0

Théorème 4.1.1

Soit $U_0^0 \in \mathbb{H}^6(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1)$, tel que $|U_0^0| \equiv 1$ et $\frac{\partial U_0^0}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Sigma \times I_1$, il existe $T_0 > 0$ et une unique solution à l'équation (4.1.18) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} - \Delta_\tau U^0 = |\nabla_\tau U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ \frac{\partial U^0}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ U^0(t=0) = U_0^0 & \text{dans } \Sigma \times I_1, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

tel que $|U^0| = 1$ et

$$U^0 \in \bigcap_{k=0}^3 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1) \right) \right].$$

Preuve. Dans la preuve d'existence de H^0 (Prop. 4.1.3), nous considérons uniquement le comportement dans la direction transverse, la troisième coordonnée, z , étant considérée comme un paramètre. En appliquant le résultat d'existence aux dérivées en z de H^0 , nous obtenons :

$$\|H^0\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^t(I_1)} \leq C \|U^0\|_{\mathbb{H}^s(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^t(I_1)}.$$

Quand nous considérons la coordonnée z comme un paramètre, la preuve d'existence suit la preuve donnée dans [17], nous obtenons que $U^0 \in \mathcal{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^2(\Sigma) \otimes \mathbb{L}_p^2(I_1)) \cap \mathbb{L}^2(0, T_0; \mathbb{H}^3(\Sigma) \otimes \mathbb{L}_p^2(I_1))$. Comme nous avons besoin de plus de régularité en temps et en espace (dans la direction transverse et dans la direction z), nous utilisons les arguments donnés dans [19, 47] pour l'existence des termes de couche limite : nous prenons les dérivées temporelles de U^0 et nous appliquons le résultat précédent. La régularité en temps donne de la régularité sur ΔU^0 et améliore donc le résultat. Nous obtenons de la régularité en le paramètre z en prenant les dérivées en z et appliquons toutes les étapes précédentes. ■

4.1.2.3 Existence de U^1

Théorème 4.1.2

Sous les hypothèses du théorème 4.1.1 et avec l'hypothèse supplémentaire que $U_0^1 \in \mathbb{H}^5(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1)$ et $\frac{\partial U_0^1}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial \Sigma \times I_1$, il existe alors une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \Delta_\tau U^1 = \begin{aligned} & |\nabla_\tau U^0|^2 U^1 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^1 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ & + U^0 \wedge H^1 + U^1 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^0) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^0) \end{aligned} \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ \frac{\partial U^1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma \times I_1, \\ U^1(0, \cdot) = U_0^1(\cdot) \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \end{cases}$$

où $H^1 = \mathcal{H}(U^1) + Q^1$, solution de l'équation (4.1.8) vérifi e :

$$\begin{cases} \begin{aligned} \operatorname{div}_\tau (\mathcal{H}(U^1) + \overline{U^1}) &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_\tau \mathcal{H}(U^1) &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [(\mathcal{H}(U^1) + \overline{U^1}) \cdot \nu] &= 0 & \text{sur } \partial \Sigma \times I_1, \end{aligned} & \begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^1 + \partial_z \overline{U^1} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^1 \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \times I_1, \\ \nabla_\tau Q_l^1 = \partial_z H_\tau^0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_l^1] = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \times I_1, \end{cases} \end{cases}$$

telle que

$$U^1 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty} \left(0, T_0; \mathbb{H}^{5-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1) \right) \cap \mathbb{H}^k \left(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1) \right) \right].$$

Preuve. Nous utilisons la linéarité de l'équation (4.1.8) pour découpler le problème en les deux problèmes exposés ci-dessus. Nous appliquons la proposition 4.1.2 au premier problème extérieur et nous suivons la dépendance en la coordonnée z comme dans le cas de $H^0 = \mathcal{H}(U^0)$ pour obtenir l'existence et la régularité de $\mathcal{H}(U^1)$. Grâce à la proposition 4.1.3, nous obtenons l'existence de Q_τ^1 et nous suivons la dépendance en

le paramètre z . Nous remarquons que $H_\tau^0 = -\nabla_\tau \varphi^0$ (d'après la proposition 4.1.2 appliquée à la résolution de H^0). Avec la dépendance en z , nous avons que $\varphi^0 \in \mathbb{W}^{3,\infty}(0, T_0; \mathbb{W}_1^1(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^7(I_1))$ et H^0 ont la même régularité que U^0 . Comme nous n'imposons pas de champ magnétique extérieur, nous avons que $Q_l^1 = \partial_z \varphi^0$ et

$$Q_l^1 \in \mathbb{W}^{3,\infty}(0, T_0; \mathbb{W}_1^1(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1)),$$

$$\nabla_\tau Q_l^1 \in \bigcap_{k=0}^3 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^6(I_1)) \right].$$

La preuve d'existence de U^1 suit le même schéma que celle donnée aux théorèmes 4.1.1 et 2.1.2. ■

4.1.2.4 Existence de U^2

Théorème 4.1.3

Sous les hypothèses des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 et avec l'hypothèse supplémentaire $U_0^2 \in \mathbb{H}^5(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)$ et $\frac{\partial U_0^2}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Sigma$, il existe une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^2}{\partial t} - \Delta_\tau U^2 = |\nabla_\tau U^0|^2 U^2 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^2) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^2 + U^2 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ \quad + U^0 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^0) \\ \quad - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ \frac{\partial U^2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ U^2(0, \cdot) = U_0^2(\cdot) \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \end{cases}$$

où

$$F = U_{zz}^0 + |U_z^0|^2 U^0 + U^0 \wedge U_{zz}^0 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^1 + |\nabla_\tau U^1|^2 U^0 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^1 \\ + U^1 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^1) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^0),$$

et $H^2 = \mathcal{H}(U^2) + Q^2$, solution de l'équation (4.1.10), vérifie :

$$Q^2 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \right],$$

où

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (\mathcal{H}(U^2) + \overline{U^2}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_\tau \mathcal{H}(U^2) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [(\mathcal{H}(U^2) + \overline{U^2}) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^2 + \partial_z(H_l^1 + \overline{U_l^1}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^2 \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ \nabla_\tau Q_l^2 = \partial_z H_\tau^1 & \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ [Q_l^2] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases}$$

telle que

$$U^2 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{5-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \right].$$

Preuve. Nous utilisons la linéarité de l'équation (4.1.10) pour découpler l'équation (4.1.10). L'existence et la régularité de $\mathcal{H}(U^2)$ est donnée par la proposition 4.1.2 comme au théorème 4.1.2. La résolution de Q_l^2 suit le même schéma qu'au théorème 4.1.2. Nous découplons maintenant l'équation sur Q_τ^2 en :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^{2,1} + \partial_z \overline{U_l^1} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^{2,1} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^{2,1} \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^{2,2} + \partial_z H_l^1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^{2,2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^{2,2} \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases}$$

où $Q^2 = Q^{2,1} + Q^{2,2}$. La proposition 4.1.3 et le théorème 4.1.2 donnent l'existence et la régularité de $Q^{2,1}$ mais nous ne pouvons pas appliquer cette proposition au cas de $Q^{2,2}$. Comme $H_l^1 = Q_l^1 = \partial_z \varphi^0$, $Q^{2,2}$ est solution de l'équation (4.1.16) avec $u = \partial_z^2 U^0$. Grâce à la proposition 4.1.4 et avec l'étude de la régularité en z , nous obtenons que $Q_\tau^{2,2} = -\nabla_\tau \varphi^2$ avec

$$\begin{aligned} \varphi^2 &\in \mathbb{W}^{3,\infty}(0, T_0; \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)), \\ \nabla_\tau Q^{2,2} &\in \bigcap_{k=0}^3 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^5(I_1)) \right]. \end{aligned}$$

La preuve de l'existence de U^2 suit le même schéma qu'aux théorèmes 4.1.1 et 2.1.3. ■

4.1.2.5 Existence de U^3

Théorème 4.1.4

Sous les hypothèses des théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3 et avec l'hypothèse supplémentaire $U_0^3 \in \mathbb{H}^5(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)$ et $\frac{\partial U_0^3}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Sigma$, il existe une unique solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial U^3}{\partial t} - \Delta_\tau U^3 = |\nabla_\tau U^0|^2 U^3 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^3) U^0 + U^0 \wedge \Delta_\tau U^3 + U^3 \wedge \Delta_\tau U^0 \\ \quad + U^0 \wedge H^3 + U^3 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^3) - U^0 \wedge (U^3 \wedge H^0) \\ \quad - U^3 \wedge (U^0 \wedge H^0) + F \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ \frac{\partial U^3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ U^3(0, \cdot) = U_0^3(\cdot) \quad \text{dans } \Sigma \times I_1, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} F = & \partial_z^2 U^1 + |\nabla_\tau U^1|^2 U^0 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^1) U^2 + 2(\nabla_\tau U^0 \cdot \nabla_\tau U^2) U^1 \\ & + 2(\nabla_\tau U^1 \cdot \nabla_\tau U^2) U^0 + |\partial_z U^0|^2 U^1 + 2(\partial_z U^0 \cdot \partial_z U^1) U^0 \\ & + U^1 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^1 + U^1 \wedge \Delta_\tau U^2 + U^2 \wedge \Delta_\tau U^1 \\ & + U^1 \wedge H^2 + U^2 \wedge H^1 - U^0 \wedge (U^1 \wedge H^2) - U^0 \wedge (U^2 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^0 \wedge H^2) - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^2 \wedge (U^0 \wedge H^1) \\ & - U^1 \wedge (U^2 \wedge H^0) - U^1 \wedge (U^1 \wedge H^1), \end{aligned}$$

et $H^3 = \mathcal{H}(U^3) + Q^3$, solution de l'équation (4.1.12), vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau (\mathcal{H}(U^3) + \overline{U^3}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_\tau \mathcal{H}(U^3) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [(\mathcal{H}(U^3) + \overline{U^3}) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^3 + \partial_z(H_l^2 + \overline{U_l^2}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^3 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^3 \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \\ \nabla_\tau Q_l^3 = \partial_z H_\tau^2 & \text{dans } \Sigma \times I_1, \\ [Q_l^3] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases}$$

telle que

$$U^3 \in \bigcap_{k=0}^2 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{5-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\Sigma) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)) \right].$$

Preuve. Nous utilisons la linéarité pour découpler l'équation (4.1.12). L'existence et la régularité de $\mathcal{H}(U^3)$ est donnée par la proposition 4.1.2 comme dans le théorème 4.1.2. La résolution de Q_l^3 suit le même schéma qu'au théorème 4.1.2. Nous découplons maintenant l'équation sur Q_τ^3 en :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^{3,1} + \partial_z \overline{U_l^2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^{3,1} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^{3,1} \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}_\tau Q_\tau^{3,2} + \partial_z H_l^2 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot}_{2D} Q_\tau^{3,2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [Q_\tau^{3,2} \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \times I_1, \end{cases}$$

où $Q^3 = Q^{3,1} + Q^{3,2}$. La proposition 4.1.3 et le théorème 4.1.2 donnent l'existence et la régularité de $Q^{3,1}$ mais nous ne pouvons pas appliquer cette proposition au cas de $Q^{3,2}$. Comme $H_l^2 = Q_l^2$, $Q^{3,2}$ est somme des solutions de l'équation (4.1.16) avec $u = \partial_z^2 U^1$ et l'équation (4.1.17) avec $f = \partial_z^3 \bar{U}_l^0$. Grâce aux propositions 4.1.4 et 4.1.5 et avec l'étude de la régularité en z , nous obtenons que $Q_\tau^{3,2} = -\nabla_\tau \varphi^3$ avec

$$\begin{aligned} \varphi^3 &\in \mathbb{W}^{3,\infty}(0, T_0; \mathbf{W}_2^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)), \\ \nabla_\tau Q^{3,2} &\in \bigcap_{k=0}^3 \left[\mathbb{W}^{k,\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{6-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)) \cap \mathbb{H}^k(0, T_0; \mathbb{H}^{7-2k}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{H}_p^4(I_1)) \right]. \end{aligned}$$

La preuve de l'existence de U^3 suit le même schéma qu'aux théorèmes 4.1.1 et 2.1.4. ■

4.2 Injections de Sobolev et estimations d'énergie dans les fils

Nous devons maintenant estimer le reste du développement asymptotique. Pour cela, nous effectuons les estimations sur le domaine ω_ε qui dépend de ε . Pour que les estimations obtenues soient indépendantes de ε , nous avons besoin de connaître l'influence du paramètre ε sur les injections de Sobolev et d'autres inégalités classiques.

4.2.1 Injections de Sobolev anisotropes

Nous considérons le domaine $\omega_\varepsilon = \varepsilon \Sigma \times I_1$ pour lequel nous introduisons des espaces de Sobolev anisotropes déduits des espaces de Sobolev usuels par changement d'échelle et renormalisation :

Définition 4.2.1

Pour $1 \leq p < +\infty$, nous définissons les espaces de Lebesgue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\varepsilon^p &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}, \\ |u|_{\varepsilon,p} &= \left(\frac{1}{|\omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,p} = \mathbb{L}_\varepsilon^p$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{n,p}$, $n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p} &= \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^p, \partial_z u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \text{ et } (\varepsilon \nabla_\tau) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,p} \}, \\ \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,p}} &= \left(|u|_{\varepsilon,p}^p + \|\partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p + \|\varepsilon \nabla_\tau u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,p}}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Dans le cas $p = 2$, nous posons $\mathbb{H}_\varepsilon^m = \mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}$, et $\|u\|_{\varepsilon,m} = \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,2}}$.

Dans le cas $p = +\infty$, nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\varepsilon^\infty &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\omega_\varepsilon), \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)| < +\infty \right\}, \\ |u|_{\varepsilon,\infty} &= \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |u(x)|. \end{aligned}$$

En posant $\mathbb{W}_\varepsilon^{0,\infty} = \mathbb{L}_\varepsilon^\infty$, nous définissons les espaces et les normes de Sobolev anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{n,\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty} &= \{ u \in \mathbb{L}_\varepsilon^\infty, \partial_z u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \text{ et } (\varepsilon \nabla_\tau) u \in \mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty} \}, \\ \|u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m+1,\infty}} &= \left(|u|_{\varepsilon,\infty} + \|\partial_z u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} + \|\varepsilon \nabla_\tau u\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{m,\infty}} \right). \end{aligned}$$

Corollaire 4.2.1

Il existe une constante C indépendante de ε telle que :

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$, et pour $1 \leq p \leq 6$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}} \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{p}}. \quad (4.2.1)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$, et pour $2 \leq p \leq +\infty$,

$$|u|_{\varepsilon,p} \leq C |u|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2p}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}}. \quad (4.2.2)$$

– pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$,

$$|u|_{\varepsilon,12} \leq C \|u\|_{\varepsilon,1}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{\varepsilon,2}^{\frac{1}{4}}. \quad (4.2.3)$$

Preuve. Nous nous ramenons au domaine $]0,1[^2 \times]0,1[$ et nous obtenons la première estimation immédiate-ment dans le cas $p = 6$, grâce au théorème 2.2.3. En interpolant $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^6$, nous obtenons le résultat.

En utilisant le changement d'échelle (2.2.5) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\varepsilon}$ et $\lambda_3 = 1$, nous nous ramenons au domaine $(0,1)^3$. Grâce aux équations (2.2.6) et (2.2.7), nous obtenons la deuxième inégalité, en reportant dans (2.2.1) avec $p = +\infty$. Une interpolation entre $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et $\mathbb{L}_\varepsilon^\infty$ conclut.

En effectuant le même changement d'échelle, et en reportant dans (2.2.3) avec $p = 12$, nous obtenons la dernière inégalité. ■

4.2.2 Trace et relèvement

Rappelons tout d'abord une définition des espaces $\mathbb{H}^s(\Omega)$, $s = k + \theta > 0$, $0 < \theta < 1$ (voir [44, 43]) :

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{H}^k(\Omega), \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}.$$

En procédant à des changements d'échelle, nous définissons de même que pour les espaces $\mathbb{H}^p$, des espaces anisotropes sur le bord $\partial\omega_\varepsilon = \varepsilon\Sigma \times I_1$ (I_1 , périodique, n'a pas de bord) :

$$\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon) = \left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^k(\partial\omega_\varepsilon), \frac{1}{|\partial\omega_\varepsilon|^2} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(y) - D_\varepsilon^\alpha u(y')|^2}{(\varepsilon^{-2}|\sigma - \sigma'|^2 + |z - z'|^2)^{n/2+s}} dy dy' < +\infty, \forall |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^s(\partial\omega_\varepsilon)} = \left(\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^k(\partial\omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{|\partial\omega_\varepsilon|^2} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \int_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{|D_\varepsilon^\alpha u(y) - D_\varepsilon^\alpha u(y')|^2}{(\varepsilon^{-2}|\sigma - \sigma'|^2 + |z - z'|^2)^{n/2+s}} dy dy' \right)^{1/2},$$

où $y = (\sigma, z)$, $y' = (\sigma', z')$ et $D_\varepsilon = (\varepsilon\nabla_\tau^t, \partial_z)^t$ et $\alpha \in \mathbb{N}^k$.

Lemme 4.2.1

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon > 0$ suffi samment petit et $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$,

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{\varepsilon,1}.$$

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $0 < \varepsilon$ suffi samment petit et $f \in \mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$, il existe un relèvement $\psi \in \mathbb{H}_\varepsilon^1$ de f tel que :

$$\|\psi\|_{\varepsilon,1} \leq C \|f\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)}.$$

Preuve.

Théorème de trace anisotrope : pour tout $(\sigma, x) \in \Sigma \times I_1$, nous posons $v(\sigma, x) = u(\varepsilon\sigma, z)$. Nous appliquons maintenant le théorème de trace classique à v et nous obtenons :

$$\|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Sigma \times I_1)} \leq c \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma \times I_1)},$$

où c ne dépend pas de ε . Nous effectuons quelques estimations sur v : nous obtenons de même qu'au lemme 4.2.1 qu'il existe des constantes C et C' indépendantes de ε telles que :

$$C \|u\|_{\varepsilon,1} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^1(\Sigma \times I_1)} \leq C' \|u\|_{\varepsilon,1}.$$

Comme nous avons défini les espaces $\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$ tels qu'ils prennent immédiatement en compte l'anisotropie (comme pour les espaces de Sobolev), nous avons les estimations suivantes sur la norme $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}$:

$$C \|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Sigma \times I_1)} \leq C' \|u\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)},$$

ce qui donne le résultat.

Théorème de relèvement anisotrope : De même, nous appliquons le théorème de relèvement classique à $g(\sigma, z) = f(\varepsilon\sigma, z)$, $(\sigma, x) \in \partial\Sigma \times I_1$ et nous obtenons un relèvement $v \in \mathbb{H}^1(\Sigma \times I_1)$. Nous définissons alors u par $u(\varepsilon\sigma, z) = v(\sigma, z)$. u est alors un relèvement de $f \in \mathbb{H}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)$ et les estimations précédentes donnent le résultat. ■

4.2.3 Quelques inégalités

Nous utiliserons aussi des versions anisotropes des inégalités du lemme 2.2.2 :

Lemme 4.2.2

Pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$ tel que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|u\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|u|_{\varepsilon,2}^2 + |\partial_z^2 u|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \Delta_\tau u|_{\varepsilon,2}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.2.4)$$

Pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\varepsilon,m} \leq & C \left(|u|_{\varepsilon,2} + \|\partial_z u\|_{\varepsilon,m-1} + \|\varepsilon \operatorname{div}_\tau u\|_{\varepsilon,m-1} + \|(\nu \partial_z) \wedge u + \varepsilon \operatorname{rot}_\tau u\|_{\varepsilon,m-1} \right. \\ & \left. + \|u \cdot \nu\|_{\mathbb{H}_\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}(\partial\omega_\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Preuve. En posant $v(\sigma, z) = u(\varepsilon\sigma, z)$, nous nous ramenons au domaine $\Sigma \times I_1$. Nous appliquons alors le lemme 2.2.2 à v , et nous en déduisons le résultat grâce au lemme 4.2.1. ■

Corollaire 4.2.2

Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2$ vérifiant $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\omega_\varepsilon$, nous avons :

$$\|(e_3 \partial_z + \varepsilon \nabla_\tau)u\|_{\varepsilon,1} \leq C \left(|\partial_z u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \nabla_\tau u|_{\varepsilon,2} + |\partial_z^2 u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon^2 \Delta_\tau u|_{\varepsilon,2} \right). \quad (4.2.6)$$

De plus, si $u \in \mathbb{H}_\varepsilon^3$, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|(e_3 \partial_z + \varepsilon \nabla_\tau)u\|_{\varepsilon,2} \leq C \left(|\partial_z u|_{\varepsilon,2} + |\varepsilon \nabla_\tau u|_{\varepsilon,2} + \|\partial_z^2 u\|_{\varepsilon,1} + \|\varepsilon^2 \Delta_\tau u\|_{\varepsilon,1} \right). \quad (4.2.7)$$

4.3 Equations du reste - Estimations d'énergie

Pour justifier l'existence du développement asymptotique, nous devons maintenant prouver l'existence du reste de $(u^\varepsilon, H^\varepsilon)$ et l'estimer précisément. Pour cela, nous posons :

– dans ω_ε ,

$$\begin{cases} u^\varepsilon(t, x) = U^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon U^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^2 U^2\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 U^3\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 r^\varepsilon(t, x), \\ H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon H^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^2 H^2\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 H^3\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x), \end{cases}$$

– dans $(\mathbb{R}^2 \times I_1) \setminus \omega_\varepsilon$

$$H^\varepsilon(t, x) = H^0\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon H^1\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^2 H^2\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 H^3\left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right) + \varepsilon^3 Q^\varepsilon(t, x),$$

où r^ε et Q^ε sont les termes de reste de u^ε et H^ε , et $x = (\sigma, z)$. Dans la suite, nous notons $\tilde{V}(x) = V\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}, z\right)$.

4.3.1 Le champ magnétique, existence et régularité

En simplifiant les équations (4.0.2) et (4.1.4) grâce aux équations vérifiées par les profils, nous obtenons :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (Q^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) + \partial_z \left(\widetilde{H_l^3} + \widetilde{U_l^3} \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} Q^\varepsilon + \partial_z \left(e_3 \wedge \widetilde{H^3} \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ [(Q^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ [Q^\varepsilon \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

En oubliant momentanément le couplage entre r^ε et Q^ε et en considérant ce dernier comme une fonction de r^ε , nous obtenons :

Théorème 4.3.1

Sous les hypothèses des théorèmes 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4 et si $r^\varepsilon \in \mathbb{H}_\varepsilon^p$, $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique $Q^\varepsilon = R^\varepsilon + S^\varepsilon$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} (R^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} R^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [(R^\varepsilon + \overline{r^\varepsilon}) \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ [R^\varepsilon \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} S^\varepsilon + \partial_z \left(\widetilde{H_l^2} + \widetilde{U_l^2} \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} S^\varepsilon + \partial_z \left(e_3 \wedge \widetilde{H^2} \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [S^\varepsilon \cdot \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ [S^\varepsilon \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \end{cases}$$

et il existe des constantes c_0 indépendantes de ε telles que

$$\begin{aligned} \|R^\varepsilon\|_{\varepsilon, p} &\leq c_0 \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon, p}, \\ \|S^\varepsilon\|_{\varepsilon, 3} &\leq c_0. \end{aligned}$$

Preuve. Nous utilisons la linéarité pour découpler l'équation (4.3.1).

Equation sur R^ε : Comme $\operatorname{rot} R^\varepsilon = 0$, il existe $\varphi^\varepsilon \in \mathbf{W}^1(\mathbb{R}^2 \times I_1)$ (espace de Beppo-Levi, cf. [24]) tel que $R^\varepsilon = -\nabla \varphi^\varepsilon$ et φ^ε est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi^\varepsilon = -\operatorname{div} r^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ -\Delta \varphi^\varepsilon = 0 & \text{dans } \omega'_\varepsilon, \\ \left[-\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial \nu} + \overline{r^\varepsilon} \cdot \nu \right] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ [\varphi^\varepsilon] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour tout $\Phi, \Psi \in \mathbf{W}^1(\mathbb{R}^2 \times I_1)$, nous posons $\alpha(\Phi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^2 \times I_1} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, dx$ et

$$\beta(\Psi) = - \int_{\Sigma} \Psi \cdot \operatorname{div} r^\varepsilon \, dx + \int_{\partial\omega_\varepsilon} (r^\varepsilon \cdot \nu) \Psi \, \partial\gamma.$$

L'application α est continue et coercive sur $\mathbf{W}^1(\mathbb{R}^2 \times I_1)$ et

$$|\beta(\Psi)| \leq \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)} \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{L}_p^2(\mathbb{R}^2 \times I_1)}.$$

Nous appliquons maintenant le théorème de Lax-Milgram et nous obtenons l'existence de $\varphi^\varepsilon \in \mathbf{W}^1(\mathbb{R}^2 \times I_1)$ et $\|R^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2 \times I_1)} = \|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2 \times I_1)} \leq \|r^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(\omega_\varepsilon)}$. En nous ramenant aux espaces de Sobolev anisotropes, nous avons $|R^\varepsilon|_{\varepsilon,2} \leq |r^\varepsilon|_{\varepsilon,2}$. Pour augmenter la régularité de la solution tout en tenant compte de l'anisotropie des espaces, nous dérivons l'équation portant sur R^ε dans les directions transverses et longitudinales et nous réappliquons les mêmes arguments (nous suivons la stratégie donnée dans [17, 19, 35]). Nous obtenons $\|R^\varepsilon\|_{\varepsilon,p} \leq C \|r^\varepsilon\|_{\varepsilon,p}$.

Equation sur S^ε : En utilisant la linéarité, nous découplons à nouveau l'équation en trois termes, un pour chaque terme du second membre. Nous posons $S^\varepsilon = S^{\varepsilon,1} + S^{\varepsilon,2} + S^{\varepsilon,3}$.

Comme le domaine ω_ε est périodique en z , nous oublions temporairement ce qui se passe dans cette direction. Pour cela, nous décomposons le champ magnétique en séries de Fourier et nous nous ramenons au problèmes résolus pour H^0 , H^1 et H^2 . $S^{\varepsilon,1}$ satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div} S^{\varepsilon,1} + \partial_z \overline{U_l^3} \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, z \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} S^{\varepsilon,1} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [S^{\varepsilon,1} \cdot \nu] = 0, \quad [S^{\varepsilon,1} \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Il existe alors $\varphi^{\varepsilon,1}$ tel que $S^{\varepsilon,1} = -\nabla \varphi^{\varepsilon,1}$, et en décomposant en séries de Fourier dans la direction z l'équation ainsi obtenue, nous avons :

$$-\Delta_\tau c_n(\varphi^{\varepsilon,1}) + n^2 c_n(\varphi^{\varepsilon,1}) = i n c_n(\overline{U_l^3}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2,$$

où $c_n(f)$ est le n -ième coefficient de Fourier de f et $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant la même méthode que dans la proposition 4.1.3 pour l'existence et la régularité, nous obtenons que $-\nabla \varphi^{\varepsilon,1} = S^{\varepsilon,1} \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbb{H}_\varepsilon^4)$ et pour tout $t < T_0$

$$\|S^{\varepsilon,1}\|_{\varepsilon,k} \leq c \|U_l^3\|_{\varepsilon,k}, \quad 0 \leq k \leq 4.$$

L'application $S^{\varepsilon,2}$ satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div} S^{\varepsilon,2} + \partial_z H_l^3 \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, z \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} S^{\varepsilon,2} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [S^{\varepsilon,2} \cdot \nu] = 0, \quad [S^{\varepsilon,2} \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases}$$

De même, nous introduisons $\varphi^{\varepsilon,2}$ tel que $S^{\varepsilon,2} = -\nabla \varphi^{\varepsilon,2}$ et nous utilisons les séries de Fourier en z . Comme $H_l^3 = Q_l^3$ (cf Théorème 4.1.4), nous utilisons la même méthode que dans la proposition 4.1.4 et nous prenons en compte la variable de Fourier pour obtenir de la régularité comme pour $S^{\varepsilon,1}$. Nous obtenons que $S^{\varepsilon,2} \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbb{H}_\varepsilon^4)$ et pour tout $0 \leq k \leq 4$,

$$\|S^{\varepsilon,2}(t, \cdot)\|_{\varepsilon,k} \leq c \left(\left\| \partial_z^3 U^0 \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right) \right\|_{\varepsilon,k} + \left\| \partial_z^2 U^1 \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right) \right\|_{\varepsilon,k} + \left\| \partial_z U^2 \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right) \right\|_{\varepsilon,k} \right).$$

L'application $S^{\varepsilon,3}$ satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div} S^{\varepsilon,3} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ \operatorname{rot} S^{\varepsilon,3} + \partial_z (e_3 \wedge H^3) \left(t, \frac{\cdot}{\varepsilon}, \cdot \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times I_1, \\ [S^{\varepsilon,3} \cdot \nu] = 0, \quad [S^{\varepsilon,3} \wedge \nu] = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Cela s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\tau S_\tau^{\varepsilon,3} + \partial_z S_l^{\varepsilon,3} = 0, \\ \operatorname{rot}_{2D} S_\tau^{\varepsilon,3} = 0, \\ \nabla_\tau S_l^{\varepsilon,3} - \partial_z S^{\varepsilon,3} = \partial_z H_\tau^3. \end{cases}$$

Soit φ_l^ε tel que $S_\tau^{\varepsilon,3} = -\nabla_\tau \varphi_l^\varepsilon$. Comme $H_\tau^3 = -\nabla_\tau \varphi^2$, nous avons $S_l^{\varepsilon,3} + \partial_z \varphi_l^\varepsilon = -\partial_z \varphi^3$ (il n'y a pas de constantes d'intégrations car nous n'imposons pas de champ magnétique extérieur), et finalement, l'équation sur la divergence donne :

$$-\Delta_\tau \varphi_l^\varepsilon - \partial_z^2 \varphi_l^\varepsilon = \partial_z^2 \varphi^3.$$

Ce cas est similaire au cas de $S^{\varepsilon,2}$, sauf que l'équation satisfaite par φ^3 est plus compliquée. En suivant la preuve des propositions 4.1.3 et 4.1.4, la preuve de l'existence de $S^{\varepsilon,1}$ et $S^{\varepsilon,2}$ et avec les résultats de la proposition 4.1.1, nous obtenons que $S^{\varepsilon,3} \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbb{H}_\varepsilon^3)$ et, pour $0 \leq k \leq 3$,

$$\|S^{\varepsilon,3}(t, \cdot)\|_{\varepsilon,k} \leq C \left(\|\partial_z U^3\|_{\varepsilon,k} + \|\partial_z^2 U^2\|_{\varepsilon,k} + \|\partial_z^3 U^1\|_{\varepsilon,k} + \|\partial_z^4 U^1\|_{\varepsilon,k} \right).$$

■

4.3.2 Equations

D'après le théorème 4.3.1, nous posons :

$$\begin{cases} a^\varepsilon(t, x) = U^0 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon U^1 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 U^2 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^3 U^3 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ b^\varepsilon(t, x) = U^1 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon U^2 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 U^3 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ c^\varepsilon(t, x) = U^2 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon U^3 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ Q^\varepsilon = R^\varepsilon + S^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ K^\varepsilon(t, x) = H^0 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon H^1 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 H^2 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^3 U^3 \left(t, \frac{\sigma}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^3 S^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

En revenant aux équations (4.0.3), nous simplifions en utilisant les équations des profils (4.1.7), (4.1.9), (4.1.11) et (4.1.13). Nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta r^\varepsilon = T_1 + \dots + T_8 + F^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial r^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon, \\ r^\varepsilon(0, x) = r_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \varepsilon^8 |\nabla r^\varepsilon|^2 r^\varepsilon, \\ T_2 = \varepsilon^5 (|\nabla r^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) r^\varepsilon), \\ T_3 = \varepsilon^2 (|\nabla a^\varepsilon|^2 r^\varepsilon + 2(\nabla r^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon) a^\varepsilon), \\ T_4 = \varepsilon^2 (r^\varepsilon \wedge \Delta a^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge \Delta r^\varepsilon), \\ T_5 = a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon + r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon + \varepsilon^3 r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon, \\ T_6 = -[a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge K^\varepsilon)], \\ T_7 = -\varepsilon^3 [r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + r^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge R^\varepsilon) + a^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon)], \\ T_8 = -\varepsilon^6 r^\varepsilon \wedge (r^\varepsilon \wedge R^\varepsilon), \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} F^\varepsilon = & \varepsilon [\partial_z^2 c^\varepsilon + |\nabla_\tau b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + \varepsilon^2 |\nabla_\tau c^\varepsilon|^2 c^\varepsilon - 2\varepsilon |\nabla_\tau c^\varepsilon|^2 b^\varepsilon + |\partial_z b^\varepsilon|^2 a^\varepsilon - 2\varepsilon |\partial_z b^\varepsilon|^2 b^\varepsilon - 2\varepsilon |\nabla_\tau b^\varepsilon|^2 U^3 \\ & + |\nabla_\tau c^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + |\partial_z a^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + \varepsilon^2 |\partial_z b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + 2(\nabla_\tau U^3 \cdot \nabla_\tau a^\varepsilon) b^\varepsilon + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z b^\varepsilon) b^\varepsilon \\ & + 2(\nabla_\tau U^3 \cdot \nabla_\tau b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2(\nabla_\tau a^\varepsilon \cdot \nabla_\tau b^\varepsilon) U^3 - 4\varepsilon (\nabla_\tau b^\varepsilon \cdot \nabla_\tau U^3) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) a^\varepsilon \\ & - 2\varepsilon (\nabla_\tau c^\varepsilon \cdot \nabla_\tau U^3) a^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_\tau a^\varepsilon \cdot \nabla_\tau U^3) c^\varepsilon + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) a^\varepsilon \\ & - 2\varepsilon (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z b^\varepsilon) c^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_\tau a^\varepsilon \cdot \nabla_\tau c^\varepsilon) U^3 + 2\varepsilon^2 (\nabla_\tau b^\varepsilon \cdot \nabla_\tau c^\varepsilon) U^3 \\ & + 2(\nabla_\tau a^\varepsilon \cdot \nabla_\tau c^\varepsilon) c^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\nabla_\tau c^\varepsilon \cdot \nabla_\tau U^3) b^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\nabla_\tau b^\varepsilon \cdot \nabla_\tau U^3) c^\varepsilon - 4\varepsilon (\nabla_\tau b^\varepsilon \cdot \nabla_\tau c^\varepsilon) c^\varepsilon \\ & + 2(\nabla_\tau b^\varepsilon \cdot \nabla_\tau c^\varepsilon) b^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \partial_z^2 a^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \Delta_\tau c^\varepsilon - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \partial_z^2 b^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \partial_z^2 c^\varepsilon + b^\varepsilon \wedge \partial_z^2 b^\varepsilon \\ & + b^\varepsilon \wedge \Delta_\tau U^3 + U^3 \wedge \Delta_\tau b^\varepsilon - \varepsilon U^3 \wedge \Delta_\tau c^\varepsilon - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \Delta_\tau U^3 - \varepsilon b^\varepsilon \wedge \partial_z^2 c^\varepsilon + U^3 \wedge H^1 + b^\varepsilon \wedge H^3 \\ & + c^\varepsilon \wedge H^2 - U^3 \wedge (a^\varepsilon \wedge H^1) - a^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) - \varepsilon^4 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) \\ & + \varepsilon^3 b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) - b^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^3) - b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) - \varepsilon^4 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) + \varepsilon U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) \\ & + \varepsilon^3 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) - a^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) + \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) - c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) \\ & + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) - \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) - c^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^2) \\ & + 2\varepsilon b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) + \varepsilon^2 \beta^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) - \varepsilon^2 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) - \varepsilon^3 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) \\ & + a^\varepsilon (c^\varepsilon \wedge H^2) + 2\varepsilon U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) + \varepsilon^2 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) - b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) \\ & + 2\varepsilon c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) - c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) - b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2)] \\ & + a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon - a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon) \end{aligned}$$

D'après les résultats de régularité obtenus sur les profils, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.3.1

Sous les hypothèses des théorèmes 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4, pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T_0]$, et $i = 0, 1, 2$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{i,p}} \leq C_p.$$

Pour tout p , $2 \leq p < +\infty$ et pour tout $0 < T < T_0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\|a^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{3,p}} \leq C_p,$$

Pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $0 < T < T_0$, il existe des constantes positives C_p indépendantes de ε telles que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|K^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\mathbb{W}_\varepsilon^{1,p}} &\leq C_p, \\ \|F^\varepsilon(t, \cdot)\|_{\varepsilon,1} &\leq C_2. \end{aligned}$$

Preuve. Grâce aux résultats de régularité, nous avons les estimations sur les profils dans les espaces $\mathbb{W}^{k,\infty}(\Sigma \times I_1)$. En effectuant le changement d'échelle adéquat dans les équations, nous nous ramenons aux espaces anisotropes $\mathbb{W}_\varepsilon^{k,\infty}$. Nous obtenons le résultat en interpolant ces estimations avec celles obtenues dans $\mathbb{L}_\varepsilon^2$ et celles obtenues sur S^ε dans le théorème 4.3.1. ■

4.3.3 Le moment magnétique, estimation du reste

Grâce au formalisme donné aux opérateurs différentiels, aux lemmes anisotropes et aux résultats de régularité (mêmes pertes dans l'exposant de ε), nous pouvons effectuer les mêmes estimations qu'au chapitre 2. La principale différence réside dans les intégrations par parties que nous avons effectuées : au chapitre 2, le découplage entre les directions tangentielles et normales nous permettait de procéder à toutes les intégrations par parties que l'on souhaitait à condition qu'il reste un terme avec une seule dérivée en ∂_z , la condition de Neumann au bord se transformant immédiatement en une condition de Dirichlet sur la dérivée normale. Dans le cas des fils, nous remarquons que nous avons droit à deux intégrations par parties dans la direction tangentielle, ce qui nous permet d'obtenir les mêmes estimations qu'au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon} a \wedge u \cdot \Delta_\tau^2 u \, dx &= \int_{\partial\omega_\varepsilon} (a \wedge u) \cdot \partial_\nu \Delta_\tau u \, \partial\gamma - \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_\tau (a \wedge u) \cdot \nabla_\tau \Delta_\tau u \, dx \\ &= \int_{\partial\omega_\varepsilon} (a \wedge u) \cdot \partial_\nu \Delta_\tau u \, \partial\gamma - \int_{\partial\omega_\varepsilon} \partial_\nu (a \wedge u) \cdot \Delta_\tau u \, d\gamma + \int_{\omega_\varepsilon} \Delta_\tau (a \wedge u) \cdot \Delta_\tau u \, dx, \end{aligned}$$

à la condition que a et u vérifient toutes deux la condition de Neumann au bord.

Les estimations sont réalisées sur une approximation de Galerkin, ce qui nous permettra de justifier toutes les intégrations par parties effectuées. Nous considérons pour l'équation de Landau-Lifschitz un espace d'approximation construit à partir d'une base de fonctions propres de l'opérateur de Laplace anisotrope de domaine

$$\left\{ u \in \mathbb{H}_\varepsilon^2, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\omega_\varepsilon \right\}.$$

De même qu'au chapitre 2, nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= |r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\partial_z r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \nabla_\tau r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(|\partial_z^2 r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon \nabla_\tau \partial_z r_n^\varepsilon|_{\varepsilon,2}^2 + |\varepsilon^2 \Delta_\tau r_n^\varepsilon(t, \cdot)|_{\varepsilon,2}^2 \right), \end{aligned}$$

et nous supposons que $\mathbf{Q}(0) \leq \|r_0^\varepsilon\|_{\varepsilon,1}^2 + \varepsilon^2 \|r_0^\varepsilon\|_{\varepsilon,2}^2$ est borné.

Comme nous considérons une approximation de Galerkin de r^ε , nous avons l'existence de $\mathbf{Q}$ sur un intervalle maximal $[0, T_{n,\varepsilon}^*]$ où $0 < T_{n,\varepsilon}^* \leq T_0$. Nous voulons prouver ici qu'il existe ε_T suffisamment petit tel que $\mathbf{Q}$ existe sur l'intervalle $[0, T]$ indépendamment de n si $\varepsilon \leq \varepsilon_T$. Nous démontrerons aussi les estimations données dans le théorème 4.0.1. Nous procédons de la façon suivante :

Nous choisissons $0 < T < T_0$ et grâce aux estimations d'énergie que nous obtenons au moyen d'intégrations par parties, nous prouvons que $\mathbf{Q}$ satisfait sur $[0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*]$ l'inégalité différentielle :

$$\mathbf{Q}'(t) \leq C_T(1 + \mathbf{Q}(t)) + \varepsilon P_T(\mathbf{Q}(t)), \quad t \in [0, T] \cap [0, T_{n,\varepsilon}^*], \quad (4.3.3)$$

où C_T est une constante et P_T un polynôme, tous deux indépendants de n et ε (mais pas de T). Cette inégalité implique que $T_{n,\varepsilon}^* \geq T$ dès que $\varepsilon \in]0, \varepsilon_T]$ où ε_T est une constante suffisamment petite. $\mathbf{Q}(t)$ satisfait alors (4.3.3) sur l'intervalle $[0, T]$, pour tout $T \leq T_0$. En utilisant les injections de Sobolev anisotropes et en tenant compte de la renormalisation des espaces de Sobolev, nous obtenons le théorème principal.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Aux chapitres 2 et 3, nous avons étudié le comportement des équations de Landau-Lifschitz dans le cas d'un coefficient ε^2 et d'une couche mince d'épaisseur ε , c'est-à-dire le cas où l'épaisseur de la couche limite (s'il y en avait une, cf [19]) et l'épaisseur du domaine sont de la même taille. Si nous avons considéré à la place une couche mince d'épaisseur ε^α ($\alpha > 0$, $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$), nous aurions effectué un développement

asymptotique à l'échelle $\varepsilon^{\frac{1}{q}}$ et nous aurions vu apparaître deux types de comportements. Si $\alpha > 1$, nous avons le même type de comportement que précédemment avec le cas $\alpha = 1$, c'est-à-dire le comportement d'une couche mince et la localisation de H aux petits ordres en $\varepsilon^{\frac{1}{q}}$. Si $\alpha < 1$, l'épaisseur de la couche est plus grande que l'épaisseur caractéristique de la couche limite. Nous obtenons alors une couche limite dans la couche mince mais d'une épaisseur caractéristique plus petite ($\varepsilon^{1-\alpha}$). Nous gardons par contre la localisation aux petits ordres du champ magnétique.

Il se passe la même chose dans le cas des fils ferromagnétiques pour le développement asymptotique et les équations obtenues, la principale différence étant que l'on n'a pas localisation du champ magnétique.

Au cours de cette étude, nous avons obtenu les modèles limites des équations de Landau-Lifschitz couplées à celles de la magnétostatique dans le cas de couches minces et de fils ferromagnétiques. En particulier, dans le cas des couches minces, nous observons, conformément à la physique, la localisation du champ magnétique et un comportement bidimensionnel pour les équations dans le cas limite. Le cas des fils se révèle quant à lui beaucoup plus compliqué et ne donne pas de modèle aussi simple.

Nous nous sommes placés dans toute cette étude à l'équilibre électromagnétique, utilisant ainsi les équations de la magnétostatique pour déterminer le champ magnétique H . Les couches minces de matériau ferromagnétique étant entre autres utilisés dans l'aéronautique afin de réduire la signature radar des appareils, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante. En suivant la démarche de G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès [20], nous pourrions tout d'abord étendre ces résultats au cas plus général où le champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell complètes, puis étudier plus précisément la réponse d'une couche mince à une onde, en particulier la dispersion du spectre.

Deuxième partie

Ondes longues en ferromagnétisme

Chapitre 6

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à de petites perturbations de l'état d'équilibre d'un matériau ferromagnétique. Nous montrons que celles-ci donnent naissance à des ondes stationnaires et progressives qui restent stables en temps long. L'évolution de leurs profils est régie par l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya qui peut être considérée comme une équation de la chaleur monodimensionnelle et semi-linéaire, perturbée dans la direction transverse.

Ces résultats sont obtenus dans le cadre du micromagnétisme, et nous nous plaçons dans le cas instationnaire : l'évolution du moment magnétique, qui décrit l'état du matériau, est régie par l'équation de Landau-Lifschitz [36] :

$$\partial_t M = -M \wedge H - \gamma M \wedge (M \wedge H) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

dont T.L. Gilbert a donné une forme équivalente [28], à un changement d'échelle de temps de facteur $1 + \gamma^2$ près :

$$\partial_t M = -M \wedge H + \gamma (M \wedge \partial_t M).$$

Cette équation est complétée par les équations de Maxwell pour le champ électromagnétique :

$$\begin{cases} \partial_t (H + M) - \text{rot } E = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t E + \text{rot } H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Nous supposons ici que le matériau ferromagnétique emplit l'espace tout entier.

Remarque 6.0.1

Un changement de l'orientation de l'espace entraîne un changement dans l'équation de Landau-Lifschitz, transformant $M \wedge H$ en $-M \wedge H$.

Les équations de Landau-Lifschitz-Maxwell admettent des solutions stationnaires stables où la magnétisation est uniforme et parallèle en tout point au champ magnétique effectif :

$$(M, H, E)_\alpha = (M_0, \alpha^{-1} M_0, 0), \quad \alpha > 0,$$

où M_0 est un vecteur arbitraire dans $\mathbb{R}^3$ et $\alpha > 0$ assure que la solution est stable. Nous supposons, sans restriction, que $|M_0| = 1$. Nous nous intéressons à de petites perturbations transverses de tels états d'équilibre et à leur évolution spatio-temporelle en temps long. Dans [39], H. Leblond et M. Manna en ont donné une dérivation formelle. T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper ont étudié le cas de perturbations $1D$ [23] et prouvé que l'évolution des profils d'ondes monodimensionnelles est régie en temps long par une équation de la chaleur semi-linéaire.

Nous étudions ici le cas de perturbations $2D$: nous ajoutons une dépendance faible dans la direction d'espace

transverse y et recherchons leur comportement. L'échelle des perturbations est donnée par une petite constante positive ε , et la perturbation est choisie sous la forme :

$$\begin{aligned} M(t, x, y) &= M_0 + \varepsilon^s \widetilde{M}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ H(t, x, y) &= \alpha^{-1} M_0 + \varepsilon^s \widetilde{H}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ E(t, x, y) &= \varepsilon^s \widetilde{E}(\widetilde{t}, \tau, \widetilde{x}, \widetilde{y}), \end{aligned}$$

où $\widetilde{M}$, $\widetilde{H}$ et $\widetilde{E}$ sont en $O(1)$ quand ε tend vers 0, et où $\widetilde{t}$, τ , $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ sont les nouvelles variables obtenues par changement d'échelle :

$$\widetilde{x} = \varepsilon^n x, \quad \widetilde{y} = \varepsilon^p y, \quad \widetilde{t} = \varepsilon^n t, \quad \tau = \varepsilon^r t.$$

En suivant la modélisation donnée par H. Leblond et M. Manna [38, 39], nous définissons les tailles caractéristiques du problème. Nous supposons tout d'abord que nous travaillons dans le cas faiblement non-linéaire, $s > 0$, qui est nécessaire pour les développements de type NLS ou optique géométrique. Nous recherchons des solutions se propageant le long de l'axe des x (dont la direction n'est pas encore déterminée), ce qui explique le choix de la même échelle pour $\widetilde{x}$ et $\widetilde{t}$; le cas des ondes longues, basses fréquences que nous considérons correspond au choix $n > 0$. Ce paramètre n décide du temps au bout duquel la dispersion sera sensible. La valeur de s fixe, elle, l'intensité de l'effet non-linéaire, et donc le temps au bout duquel il sera sensible. On s'arrange pour que ces deux effets se produisent simultanément et, de surcroît, en temps long mesuré par r . Ceci donne donc les valeurs relatives de n , r et s . En fixant arbitrairement une de ces valeurs, nous obtenons :

$$r = 4, \quad n = 2, \quad s = 2.$$

Ces choix correspondent au cas étudié par T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper [23]. Nous nous intéressons ici aussi aux déformations transverses de ces ondes planes. Ces déformations sont mesurées par le paramètre p , où $p > n = 2$ ($p < n$ donnerait de la propagation le long de l'axe des y , et $p = n$ reviendrait à ne pas donner de direction de propagation). Un effet de diffraction dominant apparaît pour la plus petite valeur de p pour laquelle on parvient à "boucler" les équations, ici $p = 3$. En termes d'optique, le paramètre p donne l'ordre de grandeur du faisceau. On sait que si le faisceau est assez large, $p > 3$, la diffraction est négligeable. Si, au contraire, $n = 2 < p < 3$, la diffraction va dominer sur la dispersion. Le faisceau se sera élargi de façon excessive avant que la dispersion et les effets non-linéaires ne puissent être pris en compte, son intensité étant alors insuffisante pour observer un quelconque effet. On se restreint donc au cas $p = 3$ pour lequel dispersion, diffraction et effets non-linéaires apparaissent sur des distances et à des temps comparables.

Si (M, H, E) est une solution des équations de Landau-Lifschitz-Maxwell alors $\widetilde{M}$, $\widetilde{H}$ et $\widetilde{E}$ satisfont :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{M} + \varepsilon^4 \partial_{\tau} \widetilde{M} &= -M_0 \wedge \widetilde{H} + \alpha^{-1} M_0 \wedge \widetilde{M} - \varepsilon^2 \widetilde{M} \wedge \widetilde{H} - \gamma \left[M_0 \wedge (M_0 \wedge \widetilde{H}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge \widetilde{M}) + \varepsilon^2 M_0 \wedge (\widetilde{M} \wedge \widetilde{H}) + \varepsilon^2 \widetilde{M} \wedge (M_0 \wedge \widetilde{H}) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \alpha^{-1} \widetilde{M} \wedge (M_0 \wedge \widetilde{M}) + \varepsilon^4 \widetilde{M} \wedge (\widetilde{M} \wedge \widetilde{H}) \right], \\ \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{H} + \varepsilon^4 \partial_{\tau} \widetilde{H} - \varepsilon^2 \widetilde{\nabla}_{\widetilde{x}} \wedge \widetilde{E} - \varepsilon^3 \widetilde{\nabla}_{\widetilde{y}} \wedge \widetilde{E} = -\varepsilon^2 \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{M} - \varepsilon^4 \partial_{\tau} \widetilde{M}, \\ \varepsilon^2 \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{E} + \varepsilon^4 \partial_{\tau} \widetilde{E} + \varepsilon^2 \widetilde{\nabla}_{\widetilde{x}} \wedge \widetilde{H} + \varepsilon^3 \widetilde{\nabla}_{\widetilde{y}} \wedge \widetilde{H} = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Nous nous intéressons aux solutions des équations perturbées de Landau-Lifschitz-Maxwell qui décrivent une onde progressive se propageant dans la direction $\widetilde{k}$ avec des perturbations transverses dans la direction $\widetilde{l}$ où $\widetilde{k}$ et $\widetilde{l}$ sont des vecteurs unitaires fixés donnant respectivement les directions de l'axe des x et de l'axe des y , $\widetilde{k}$ n'étant pas colinéaire à M_0 et $\widetilde{l}$ n'étant pas colinéaire à $\widetilde{k}$. En supposant que $\widetilde{x}$ est la coordonnée dans la direction $\widetilde{k}$ et $\widetilde{y}$ celle dans la direction $\widetilde{l}$, nous effectuons les substitutions :

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{x}} = \widetilde{k} \partial_{\widetilde{x}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{y}} = \widetilde{l} \partial_{\widetilde{y}}.$$

En omettant le tilde, les équations que nous considérons sont désormais :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \partial_t M + \varepsilon^4 \partial_\tau M = & -M_0 \wedge H + \alpha^{-1} M_0 \wedge M - \varepsilon^2 M \wedge H - \gamma [M_0 \wedge (M_0 \wedge H) \\ & - \alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge M) + \varepsilon^2 M_0 \wedge (M \wedge H) + \varepsilon^2 M \wedge (M_0 \wedge H) \\ & - \varepsilon^2 \alpha^{-1} M \wedge (M_0 \wedge M) + \varepsilon^4 M \wedge (M \wedge H)] , \end{aligned} \quad (6.0.1)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t H + \varepsilon^4 \partial_\tau H - \varepsilon^2 k \wedge \partial_x E - \varepsilon^3 l \wedge \partial_y E = -\varepsilon^2 \partial_t M - \varepsilon^4 \partial_\tau M, \quad (6.0.2)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t E + \varepsilon^4 \partial_\tau E + \varepsilon^2 k \wedge \partial_x H + \varepsilon^3 l \wedge \partial_y H = 0. \quad (6.0.3)$$

Nous introduisons alors le vecteur

$$U(\tilde{t}, \tau, \tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\alpha^{-1/2} \tilde{M}, \tilde{H}, \tilde{E} \right)^t (\tilde{t}, \tau, \tilde{x}, \tilde{y}),$$

et la perturbation satisfait une équation de la forme (en “oubliant” les $\sim$ sur les variables t, x, y) :

$$\begin{cases} \partial_t U + \varepsilon^2 \partial_\tau U + A_1 \partial_x U + \varepsilon A_2 \partial_y U + \varepsilon^{-2} L U = B(U, U) + \varepsilon^2 T(U, U, U), \\ U(0, 0) = U_0^0, \end{cases} \quad (6.0.4)$$

où les termes A_1, A_2, L, B et T sont précisés dans la section 7.1.2.

En effectuant un développement asymptotique de U , nous obtenons au cours de l’étude que les profils se découpent en ondes progressives ou stationnaires. Nous faisons aussi apparaître un couplage entre les termes de dérivées temporelles ∂_t et ∂_τ . Pour les découpler, nous moyennons les équations le long des caractéristiques (voir [37]) et nous obtenons que le terme principal U_0 se décompose en cinq ondes stationnaires et progressives, $U_0 = \sum_{j=1}^5 u_j$, qui vérifient :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_j \partial_x) u_j = 0, \\ \partial_x (\partial_\tau u_j - D_j \partial_x^2 u_j + B_j(u_j, \partial_x u_j) + F_j(u_j, u_j, u_j)) = C_j \partial_y^2 u_j, \end{cases} \quad (6.0.5)$$

où la dernière équation est l’équation dite de Khokhlov-Zabolotskaya, une équation apparue pour la première fois en théorie des gaz [67] et qui décrit le comportement d’ondes diffractives non linéaires [22, 27, 38], et où

$$v_j \in \left\{ 0, \pm \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/2}, \pm \left(\frac{1 + (1 - |k \cdot M_0|^2) \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2} \right\}$$

est la vitesse de l’onde dans la direction k (l’axe des x).

Lors de l’étude du profil principal du développement asymptotique, nous obtenons le résultat suivant qui n’a pas été établi à notre connaissance :

Théorème 6.0.2

Soient $D > 0, C \neq 0, B : (\mathbb{R}^k)^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application bilinéaire et

$F : (\mathbb{R}^k)^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application trilinéaire. Soit la donnée initiale $u^0 \in (\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))^k, s > 1$. Il existe alors un temps $T > 0$ et une unique fonction $u \in C^0([0, T]; (\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))^k)$ solution de l’équation de Khokhlov-Zabolotskaya :

$$\begin{cases} \partial_x (\partial_\tau u - D \partial_x^2 u + B(u, \partial_x u) + F(u, u, u)) = C \partial_y^2 u & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ u(\tau = 0, x, y) = u^0(x, y) & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nous prouvons ensuite que la solution générale de l’équation (6.0.4) reste proche de U_0 , le terme principal du développement asymptotique, pour une échelle de temps lente (i.e. avec le changement de variable $\tau = \varepsilon^2 t$) :

Théorème 6.0.3

Pour une donnée initiale $U_0^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$, ($s > 6$), soit $T_0 > 0$ tel que $U_0 = \sum_{j=1}^5 u_j$, solution des équations (6.0.5), existe dans l'espace $\mathcal{C}([0, T_0/\varepsilon^2]; \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R}^2))$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il y a une unique solution $\mathcal{U}^\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0, T_0/\varepsilon^2]; \mathbb{H}^{s-5}(\mathbb{R}^2))$ de

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A_1 \partial_x \mathcal{U}^\varepsilon + A_2 \partial_y \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} L \mathcal{U}^\varepsilon = B(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon) + \varepsilon^2 T(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon),$$

avec la condition initiale $\mathcal{U}^\varepsilon(0, x, y) = U_0^0(x, \varepsilon y)$. De plus

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - \mathcal{U}_0^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_0/\varepsilon^2] \times \mathbb{R}^2)} = o(1) \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{U}_0^\varepsilon(t, x, y) = U_0(t, \varepsilon^2 t, x, \varepsilon y)$.

Pour démontrer ce résultat, nous devons prouver l'existence des termes suivants dans le développement asymptotique et estimer le reste. Le lemme de moyenne le long des caractéristiques que nous avons utilisé pour obtenir les équations formelles satisfaites par les profils imposait aux profils suivants dans le développement, U_1 et U_2 , de satisfaire une hypothèse de croissance sous-linéaire. La construction de ces termes malheureusement ne permet pas la vérification d'une telle hypothèse. Le problème venant de termes basse fréquence, en espace dans la direction principale, du profil principal, nous utilisons des méthodes de coupure des basses fréquences [7, 8, 56] pour obtenir une approximation du profil principal qui, elle, nous permettra de construire le reste du développement asymptotique et de prouver le théorème 6.0.3.

Nous complétons cette étude par une étude numérique des équations afin de vérifier les résultats obtenus théoriquement. Pour cela, nous travaillons avec les équations (6.0.1), (6.0.2) et (6.0.3), sans faire intervenir l'échelle de temps lente τ , jusqu'à des temps de l'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$. Ces équations satisfaisant une égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|H\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \alpha^{-1} \|M\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right) + \gamma \left\| \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H + \varepsilon M \wedge H - \frac{1}{\varepsilon \alpha} M_0 \wedge M \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0,$$

nous développons des schémas numériques qui la vérifient : un premier schéma, semi-implicite, appelé SIS, correspond à la transcription des équations (6.0.1)-(6.0.2)-(6.0.3) et satisfait :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|H^{n+1}\|^2 + \|E^{n+1}\|^2 + \alpha^{-1} \|M^{n+1}\|^2) \\ & + dt \gamma \left\| \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H^{n+1/2} + \varepsilon M^n \wedge H^{n+1/2} - \frac{1}{\varepsilon \alpha} M_0 \wedge M^{n+1/2} \right\|^2 \\ & = \frac{1}{2} (\|H^n\|^2 + \|E^n\|^2 + \alpha^{-1} \|M^n\|^2), \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme $\mathbb{L}^2$ sur l'espace discrétisé, $M^{n+1/2} = \frac{M^{n+1} + M^n}{2}$ et $H^{n+1/2} = \frac{H^{n+1} + H^n}{2}$.

Après avoir étudié la conservation de l'énergie pour le *splitting* de Strang, nous introduisons un second schéma, noté ECSpS, vérifiant la même égalité, mais avec

$$M^{n+1/2} = \frac{M^{n+3/4} + M^{n+1/4}}{2} \quad \text{et} \quad H^{n+1/2} = \frac{H^{n+3/4} + H^{n+1/4}}{2},$$

où $M^{n+1/4}$, $M^{n+3/4}$, $H^{n+1/4}$ et $H^{n+3/4}$ sont les quantités intermédiaires obtenues lors des étapes du *splitting*. Nous vérifions alors numériquement la conservation de ces égalités (Fig. 6.0.1)

Les schémas précédents étant coûteux en temps de calcul, nous en développons un troisième, noté SpS, dans

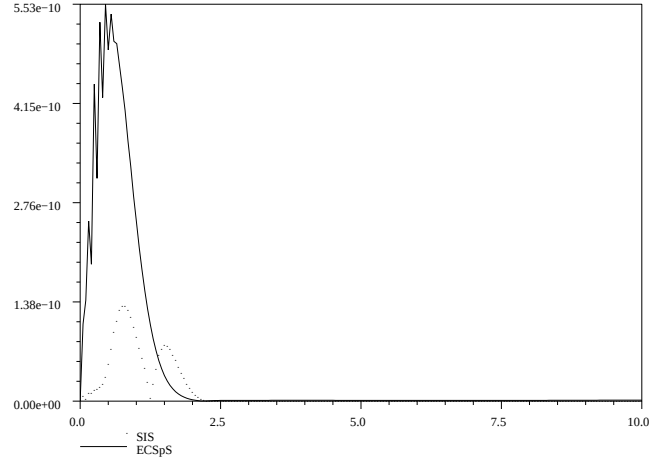


FIG. 6.0.1: Evolution de l'erreur numérique sur la loi de conservation jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon}$.

lequel nous sacrifions la conservation de l'égalité d'énergie pour plus d'efficacité : ce schéma, basé lui aussi sur du *splitting*, effectue tout d'abord une résolution des équations de Maxwell au moyen du schéma de Yee, puis une résolution implicite de l'équation de Landau-Lifschitz.

Nous comparons enfin numériquement ces trois schémas, ce qui nous permet de valider le schéma SpS dans le cadre de résultats qualitatifs. Nous retrouvons alors des propriétés obtenues au cours de l'étude des ondes longues : nous observons en particulier la propagation le long de l'axe des x et la diffraction dans la direction des y de la perturbation (Fig. 6.0.2),

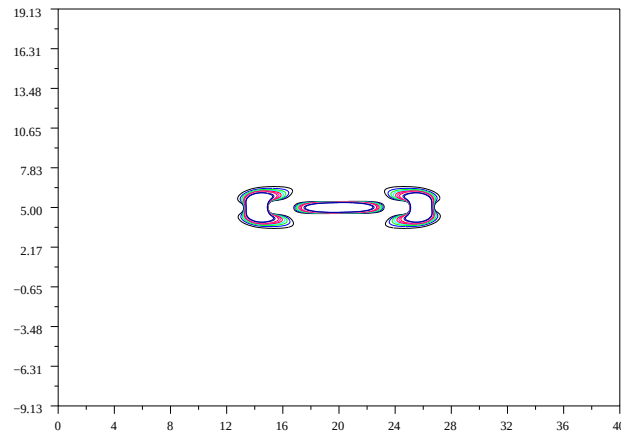
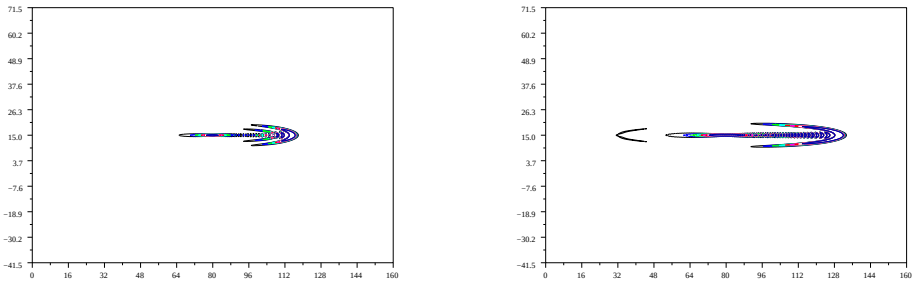


FIG. 6.0.2: M_3 à $\frac{T}{\varepsilon}$.

et nous retrouvons l'influence de l'angle φ entre la direction de propagation k et le moment magnétique M_0 (Fig. (6.0.3)).



$$\varphi = \frac{\pi}{6}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, v_2 = 1$$

FIG. 6.0.3: E_3 à $\frac{T}{2\varepsilon^2}$.

Chapitre 7

Ondes longues pour un système hyperbolique général

Nous mettons tout d'abord en évidence quelques propriétés des équations (6.0.1), (6.0.2) et (6.0.3) où l'on n'a pas introduit la variable de temps lente τ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M = \frac{1}{\varepsilon^2} [-M_0 \wedge H + \alpha^{-1} M_0 \wedge M] - M \wedge H - \frac{\gamma}{\varepsilon^2} [M_0 \wedge (M_0 \wedge H) \\ \quad - \alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge M)] - \gamma [M_0 \wedge (M \wedge H) + M \wedge (M_0 \wedge H) \\ \quad - \alpha^{-1} M \wedge (M_0 \wedge M) + \varepsilon^2 M \wedge (M \wedge H)] , \\ \partial_t H - k \wedge \partial_x E - \varepsilon l \wedge \partial_y E = -\partial_t M, \\ \partial_t E + k \wedge \partial_x H + \varepsilon l \wedge \partial_y H = 0, \end{array} \right. \quad (7.0.1)$$

puis nous réécrivons les équations (6.0.1)-(6.0.2)-(6.0.3) sous une forme plus générale, en donnons quelques propriétés et nous prouvons le théorème 6.0.3 dans le cas général de cette formulation.

7.1 Quelques propriétés du système

7.1.1 Energie du système

Comme nous avons existence locale de solutions régulières des équations (7.0.1) (voir [3], par exemple), nous procédons à des estimations d'énergie sur les solutions :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|M\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} ((M_0 \wedge H) \cdot M - \gamma (M_0 \wedge H) \cdot (M_0 \wedge M) \right. \\ & \quad \left. - \alpha^{-1} \gamma |M_0 \wedge M|^2) \, dxdy \right] - \gamma \int_{\mathbb{R}^2} (M_0 \wedge M) \cdot (M \wedge H) \, dxdy = 0. \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^2} (k \wedge \partial_x E + \varepsilon l \wedge \partial_y E) \cdot H \, dxdy = - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t M \cdot H \, dxdy. \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} (k \wedge \partial_x H + \varepsilon l \wedge \partial_y H) \cdot E \, dxdy \\ & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} (k \wedge \partial_x E + \varepsilon l \wedge \partial_y E) \cdot H \, dxdy \\ & = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t M \cdot H = & \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha^{-1}(M_0 \wedge M) \cdot H + \gamma |M_0 \wedge H|^2 - \gamma \alpha^{-1}(M_0 \wedge H) \cdot (M_0 \wedge M)] \, dx dy & \\ + \gamma \int_{\mathbb{R}^2} [2(M_0 \wedge H) \cdot (M \wedge H) - \alpha^{-1}(M_0 \wedge M) \cdot (M \wedge H) + \varepsilon^2 |M \wedge H|^2] \, dx dy. & \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|H\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \alpha^{-1} \|M\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right) + \gamma \left\| \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H + \varepsilon M \wedge H - \frac{1}{\varepsilon \alpha} M_0 \wedge M \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0. \quad (7.1.1)$$

7.1.2 Formulation vectorielle

La formulation et les propriétés suivantes ont été obtenues en suivant le travail de T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper [23].

Le système d'équations (6.0.1)-(6.0.3) peut s'écrire sous la forme d'une seule équation pour une fonction : $U : \mathbb{R}_t^{+*} \times [0, T] \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \rightarrow \mathbb{R}^9 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$U(t, \tau, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2} M(t, \tau, x, y) \\ H(t, \tau, x, y) \\ E(t, \tau, x, y) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \tau \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Le facteur $\alpha^{-1/2}$ est introduit afin de donner certaines propriétés de symétrie au problème (cf partie 7.2). En divisant une fois de plus les équations par ε^2 , U doit vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\tau \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t U + \varepsilon^2 \partial_\tau U + A_1 \partial_x U + \varepsilon A_2 \partial_y U + \varepsilon^{-2} (L_0 + L_1) U = B(U, U) + \varepsilon^2 T(U, U, U), \quad (7.1.2)$$

où A_1, A_2, L_0 et L_1 sont des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^9$,

$$\begin{aligned} A_1 u &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \wedge \cdot \\ 0 & k \wedge \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l \wedge \cdot \\ 0 & l \wedge \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \\ L_0 u &= \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} M_0 \wedge \cdot & \alpha^{-1/2} M_0 \wedge \cdot & 0 \\ \alpha^{-1/2} M_0 \wedge \cdot & -M_0 \wedge \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \\ L_1 u &= \gamma \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & \alpha^{-1/2} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & 0 \\ \alpha^{-1/2} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & -M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

B est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$,

$$B(u, v) = \begin{pmatrix} B_1(u, v) \\ -\alpha^{1/2} B_1(u, v) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} B_1(u, v) = & -\frac{1}{2} (u_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge u_2) - \frac{1}{2} \gamma M_0 \wedge (u_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge u_2) \\ & - \frac{1}{2} \gamma \left[u_1 \wedge (M_0 \wedge (v_2 - \alpha^{-1/2} v_1)) + v_1 \wedge (M_0 \wedge (u_2 - \alpha^{-1/2} u_1)) \right], \end{aligned}$$

et T est une application trilinéaire sur $\mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$,

$$T(u, v, w) = \alpha^{1/2} \gamma \begin{pmatrix} T_1(u, v, w) \\ -\alpha^{1/2} T_1(u, v, w) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$T_1(u, v, w) = \frac{1}{6} [u_1 \wedge (v_2 \wedge w_1) + u_1 \wedge (w_2 \wedge v_1) + w_1 \wedge (v_2 \wedge u_1) \\ + w_1 \wedge (u_2 \wedge v_1) + v_1 \wedge (u_2 \wedge w_1) + v_1 \wedge (w_2 \wedge u_1)].$$

Les variables u, v et w sont ici des vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^9$, $u = (u_1, u_2, u_3)^t$, $v = (v_1, v_2, v_3)^t$, $w = (w_1, w_2, w_3)^t$ avec $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$.

7.1.3 Quelques propriétés

Le produit vectoriel étant antisymétrique, les opérateurs A_1 et A_2 sont symétriques pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^9$: $A_i u \cdot v = u \cdot A_i v$, $u, v \in \mathbb{R}^9$, $i = 1, 2$.

Les opérateurs L_0 et L_1 sont respectivement antisymétriques et symétriques pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^9$: $L_0 u \cdot v = -u \cdot L_0 v$, $L_1 u \cdot v = u \cdot L_1 v$, $u, v \in \mathbb{R}^9$.

Les applications bilinéaire B et trilinéaire T sont symétriques, i.e. $B(u, v) = B(v, u)$ et $T(u, v, w) = T(\pi(u, v, w))$ pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^9$ et toute permutation $\pi \in \mathcal{S}_3$.

Lemme 7.1.1

L'opérateur $L = L_0 + L_1$ induit une décomposition orthogonale de $\mathbb{R}^9$,

$$\mathbb{R}^9 = \text{Ker } L \oplus \text{Im } L,$$

où,

$$\begin{aligned} \text{Ker } L &= \left\{ v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^9, (\alpha^{-1/2} v_1 - v_2) \wedge M_0 = 0 \right\}, \\ \text{Im } L &= \left\{ v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^9, v_1 \cdot M_0 = 0, v_2 = -\alpha^{1/2} v_1, v_3 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Soient P et Q les projecteurs orthogonaux respectivement sur $\text{Ker } L$ et sur $\text{Im } L$, et soit R l'inverse partiel de L sur $\text{Im } L$, étendu trivialement à $\mathbb{R}^9$. Nous avons alors $RL = LR = I - P = Q$. De plus, $Lu = v$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^9$ entraîne $Pv = 0$ et $Qu = Rv$. Nous avons aussi le lemme suivant :

Lemme 7.1.2

L'opérateur L_1 est coercif sur $\text{Im } L$,

$$(L_1 Qv) \cdot (Qv) = \gamma(1 + \alpha^{-1})(Qv) \cdot (Qv), \quad v \in \mathbb{R}^9.$$

Les applications B et T sont transparentes sur $\text{Ker } L$,

$$PB(Pu, Pv) = 0, \quad PT(Pu, Pv, Pw) = 0, \quad u, v, w \in \mathbb{R}^9.$$

7.2 Une équation plus générale

L'équation (7.1.2) est un cas particulier de l'équation aux dérivées partielles plus générale :

$$\partial_t U + \varepsilon^2 \partial_\tau U + A_1 \partial_x U + \varepsilon A_2 \partial_y U + \varepsilon^{-2} L U = B(U, U) + \varepsilon^2 T(U, U, U) \quad (7.2.1)$$

dans $\mathbb{R}^n$ où A_1 et A_2 sont des applications linéaires et symétriques, L est une application linéaire, B une application bilinéaire symétrique et T une application trilinéaire symétrique. Dans cette section, nous considérons l'équation (7.2.1), l'application au cas particulier de l'équation (7.1.2) suit au chapitre 8. Nous construisons tout d'abord un développement asymptotique de la solution de l'équation (7.2.1) en utilisant un développement formel en puissance du petit paramètre ε (Section 7.2.1). Nous donnons ensuite des estimations asymptotiques précises des différents termes du développement (Section 7.2.2.1) pour finalement montrer que le développement asymptotique reste proche en temps long de la solution de l'équation (7.2.1) quand ε tend vers 0 (Section 7.2.2.3).

7.2.1 Développement asymptotique

Nous recherchons maintenant un développement asymptotique formel de $U \equiv U(t, \tau, x, y)$ sous la forme

$$U \equiv (U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots).$$

Cette construction requiert trois hypothèses :

Hypothèse 1. $\mathbb{R}^n = \text{Ker } L \oplus \text{Im } L$.

Les opérateurs P et Q sont ici respectivement les projections orthogonales sur $\text{Ker } L$ et $\text{Im } L$.

Hypothèse 2. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $(Lu) \cdot u \geq C\|Qu\|^2$, c'est-à-dire que L est coercive sur son image.

Hypothèse 3. Les applications bilinéaire B et trilinéaire T sont transparentes sur $\text{Ker } L$: $PB(Pu, Pv) = 0$ et $PT(Pu, Pv, Pw) = 0$ pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Soit R l'inverse partiel de L sur $\text{Im } L$, trivialement étendu à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Alors $RL = LR = Q$ et nous avons :

Lemme 7.2.1

Si $Lu = v$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ alors $Pv = 0$ (condition de compatibilité) et $Qu = Rv$.

Nous substituons à U son développement asymptotique dans (7.2.1) et nous supposons que $U_0 = O(1)$, $\varepsilon U_i = o(1)$, $i \geq 1$, quand ε tend vers 0. Nous obtenons alors :

A l'ordre ε^{-2} : $LU_0 = 0$, i.e. $QU_0 = 0$ et donc $U_0 = PU_0$.

A l'ordre ε^{-1} : $LU_1 = 0$, i.e. $QU_1 = 0$ et donc $U_1 = PU_1$.

A l'ordre ε^0 : $LU_2 = V_2 := B(U_0, U_0) - (\partial_t + A_1 \partial_x) U_0$.

Comme $U_0 = PU_0$ et B est transparent sur $\text{Ker } L$ (Hypothèse 3), la condition de compatibilité $PV_2 = 0$, obtenue grâce au lemme 7.2.1, se réduit à

$$(\partial_t + PA_1 P \partial_x) U_0 = 0$$

L'opérateur $PA_1 P$ est symétrique, il existe donc k projections P_j et k nombres réels v_j ($j = 1, \dots, k$, $k \leq n$) tels que :

$$P = \sum_{j=1}^k P_j, \quad PA_1 PP_j = v_j P_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

La condition de compatibilité est donc satisfaite si

$$(\partial_t + v_j \partial_x) P_j U_0 = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.2.2)$$

Comme $U_0 = PU_0$ et $R = 0$ sur $\text{Ker } L$, l'équation $QU_2 = RV_2$ se réduit à :

$$QU_2 = RB(U_0, U_0) - RA_1 \partial_x U_0. \quad (7.2.3)$$

A l'ordre ε : $LU_3 = V_3 := 2B(U_0, U_1) - (\partial_t + A_1 \partial_x) U_1 - A_2 \partial_y U_0$.

De même, grâce à l'hypothèse 3 et au lemme 7.2.1, la condition de compatibilité $PV_3 = 0$ devient :

$$(\partial_t + PA_1 P \partial_x) U_1 + PA_2 P \partial_y U_0 = 0,$$

et donc,

$$(\partial_t + v_j \partial_x) P_j U_1 + P_j A_2 \sum_{i=1}^k \partial_y P_i U_0 = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.2.4)$$

Remarque 7.2.1

Cette équation permet de déterminer U_1 en fonction de U_0 .

L'équation $QU_3 = RV_3$ s'écrit aussi :

$$QU_3 = 2RB(U_0, U_1) - RA_1 \partial_x U_1 - RA_2 \partial_y U_0.$$

A l'ordre ε^2 :

$$LU_4 = V_4 := 2B(U_0, U_2) + B(U_1, U_1) + T(U_0, U_0, U_0) - \partial_\tau U_0 - A_2 \partial_y U_1 - (\partial_t + A_1 \partial_x) U_2. \quad (7.2.5)$$

Comme B et T sont transparentes sur $\text{Ker } L$ (Hypothèse 3), la condition de compatibilité $PV_4 = 0$ se réduit à :

$$\partial_\tau U_0 + PA_2 \partial_y U_1 + (\partial_t PU_2 + PA_1 \partial_x U_2) = 2PB(U_0, U_2).$$

Comme $U_1 = PU_1$, et $U_2 = PU_2 + QU_2$, nous réécrivons l'équation sous la forme :

$$\partial_\tau U_0 + (\partial_t PU_2 + PA_1 P \partial_x U_2) + PA_1 P \partial_y U_1 + PA_2 \partial_x QU_2 = 2PB(U_0, PU_2 + QU_2)$$

En réécrivant l'équation grâce à l'équation (7.2.3) et à la transparence de B sur $\text{Ker } L$ ($U_0 = PU_0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \partial_\tau U_0 + (\partial_t + PA_1 P \partial_x) PU_2 + PA_2 P \partial_y U_1 - PA_1 RA_1 P \partial_x^2 U_0 \\ & = 2PB(U_0, RB(U_0, U_0)) - 2PB(U_0, RA_1 \partial_x U_0) - PA_1 R \partial_x B(U_0, U_0). \end{aligned}$$

Cette équation représente un système de k équations,

$$\begin{aligned} & \partial_\tau P_j U_0 + (\partial_t + v_j \partial_x) P_j U_2 + P_j A_2 \sum_{i=1}^k \partial_y P_i U_1 - P_j A_1 RA_1 \sum_{i=1}^k \partial_x^2 P_i U_0 \\ & = 2P_j B(U_0, RB(U_0, U_0)) - 2P_j B(U_0, RA_1 \partial_x U_0) \\ & - P_j A_1 R \partial_x B(U_0, U_0), \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

La j -ème équation fait intervenir le taux d'évolution de $P_j U_0$ selon l'échelle de temps lente (τ) ainsi que le taux d'évolution de $P_i U_1$, $i = 1, \dots, k$ dans la direction transverse (y) et le taux d'évolution de $P_j U_2$ le long des caractéristiques déterminées par v_j selon l'échelle de temps usuelle (t). Nous pouvons séparer les deux premiers effets du dernier si U_2 vérifie une hypothèse de croissance sous-linéaire,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \|U_2(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s} = 0, \quad (7.2.7)$$

uniformément sur $[0, T]$ pour un s suffisamment grand, $\mathbb{H}^s$ étant l'espace de Sobolev usuel d'ordre s . La condition (7.2.7) implique aussi que $\varepsilon \|U_2\|_{\mathbb{H}^s} = o(1)$ quand ε tend vers 0. La séparation s'effectue en moyennant en temps (t) les équations le long des caractéristiques. Formellement, nous définissons l'opérateur de moyennisation G_v , pour $v \in \mathbb{R}$, par :

$$(G_v u)(t, x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T u(x + vs, t + s) ds, \quad (7.2.8)$$

quand la limite existe. Le lemme suivant est tiré de [37].

Lemme 7.2.2

- (i) Si $(\partial_t + v\partial_x)u = 0$ alors $G_{v'}u$ existe pour tout v' . De plus, $G_{v'}u = u$ si $v' = v$ et $G_{v'}u = 0$ sinon.
- (ii) Si $(\partial_t + v\partial_x)u = 0$ et $(\partial_t + v'\partial_x)u' = 0$ alors $G_{v''}(uu') = uu'$ si $v'' = v' = v$ et $G_{v''}(uu') = 0$ sinon.
- (iii) Si u satisfait l'hypothèse de croissance sous-linéaire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \|u(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

alors $G_v(\partial_t + v\partial_x)u$ existe et $G_v(\partial_t + v\partial_x)u = 0$.

L'application de G_{v_j} aux deux côtés de l'équation (7.2.6) élimine le terme de transport et réduit l'équation à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\tau P_j U_0 + P_j A_2 \sum_{i=1}^k \partial_y G_{v_j} P_i U_1 - P_j A_1 R A_1 P_j \partial_x^2 P_j U_0 \\ = 2P_j B(P_j U_0, RB(P_j U_0, P_j U_0)) - 2P_j B(P_j U_0, RA_1 \partial_x P_j U_0) \\ - P_j A_1 R \partial_x B(P_j U_0, P_j U_0), \quad j = 1, \dots, k. \end{array} \right. \quad (7.2.9)$$

Nous devons maintenant déterminer le terme $G_{v_j} P_i U_1$. Nous utilisons alors l'équation (7.2.4) et nous supposons que U_1 satisfait la même hypothèse de croissance sous-linéaire que U_2 . Nous avons :

$$\begin{aligned} & G_{v_j} \left[(\partial_t + v_i \partial_x) P_i U_1 + P_i A_2 \sum_{l=1}^k \partial_y P_l U_0 \right] \\ & = (v_i - v_j) \partial_x G_{v_j} P_i U_1 + P_i A_2 P_j \partial_y P_j U_0 = 0, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

pour tous $i, j = 1, \dots, k$. Nous obtenons alors la condition de compatibilité $P_i A_2 P_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$.

Remarque 7.2.2

Cette condition de compatibilité donne des informations sur la direction de la perturbation transverse comme nous le verrons au chapitre 8. Nous obtenons : $l \cdot k = l \cdot M_0 = 0$.

Nous remarquons aussi que l'opérateur $P_j A_1 R A_1 P_j$ est positif grâce à l'hypothèse 2, et proportionnel à P_j , $P_j A_1 R A_1 P_j = D_j P_j$ où D_j est un scalaire, $D_j \geq 0$.

Après avoir dérivé l'équation (7.2.9) par rapport à x , nous obtenons que la condition de compatibilité $PV_4 = 0$ donne un système de k équations non-linéaires en la variable de temps lente τ du type de l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya, pour $j = 1, \dots, k$,

$$\partial_x \left(\partial_\tau P_j U_0 - D_j \partial_x^2 P_j U_0 + B_j(P_j U_0, \partial_x P_j U_0) + F_j(P_j U_0, P_j U_0, P_j U_0) \right) = C_j \partial_y^2 P_j U_0, \quad (7.2.11)$$

où B_j est une application bilinéaire qui s'écrit grâce à la symétrie de B sous la forme

$$B_j(u, v) = 2P_j B(u, RA_1 v) + 2P_j A_1 RB(u, v),$$

F_j une application trilinéaire, $F_j(u, v, w) = 2P_j B(u, RB(v, w))$, et C_j l'opérateur

$$C_j = \sum_{i \neq j} \frac{1}{v_i - v_j} P_j A_2 P_i A_2 P_j.$$

De plus, si nous utilisons l'équation (7.2.9) pour éliminer la dérivée en τ dans l'équation (7.2.6), nous obtenons que la condition de compatibilité $PV_4 = 0$ donne aussi un système de k équations de transport pour $P_j U_2$ sur l'échelle de temps usuelle (t),

$$(\partial_t + v_j \partial_x) P_j U_2 = S_j(U_0, U_1), \quad j = 1, \dots, k, \quad (7.2.12)$$

où :

$$\begin{aligned} S_j(U_0, U_1) = & P_j A_1 R A_1 \sum_{i \neq j} \partial_x^2 P_i U_0 - P_j A_2 \sum_{i \neq j} (\partial_y P_i U_1 - \partial_y G_{v_j} P_i U_1) \\ & + 2P_j (B(U_0, RB(U_0, U_0)) - B(P_j U_0, RB(P_j U_0, P_j U_0))) \\ & - 2P_j (B(U_0, R A_1 \partial_x U_0) - B(P_j U_0, R A_1 \partial_x P_j U_0)) \\ & - P_j A_1 R \partial_x (B(U_0, U_0) - B(P_j U_0, P_j U_0)). \end{aligned}$$

Quand les équations (7.2.11)-(7.2.12) sont satisfaites, l'équation $QU_4 = RV_4$, obtenue grâce au lemme 7.2.1 et à l'équation (7.2.5), se réduit alors à :

$$QU_4 = 2RB(U_0, U_2) + RB(U_1, U_1) + RT(U_0, U_0, U_0) - RA_2 \partial_y U_1 - R \partial_t U_2 - RA_1 \partial_x U_2.$$

Si U_1 et U_2 satisfont l'hypothèse de croissance sous-linéaire (7.2.7), nous avons donc obtenu que $U_0 = \sum_{j=1}^k P_j U_0$ où chaque $P_j U_0$ satisfait une équation de transport homogène sur l'échelle de temps usuelle t (Eq. (7.2.2)) et une équation de Khoklov-Zabolotskaya non-linéaire sur l'échelle de temps lente τ (Eq. (7.2.11)).

7.2.2 Estimations asymptotiques

Lors de la preuve de convergence dans la prochaine partie, nous avons besoin d'estimations asymptotiques des termes U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 . Ces estimations requièrent des hypothèses supplémentaires :

Hypothèse 4. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, soit $D_j > 0$, soit, si $D_j = 0$, le terme faisant intervenir la dérivée en x dans l'équation (7.2.11), i.e. B_j , est nul.

Hypothèse 5. $U(t = 0, \tau = 0, x, y) = U_0^0(x, y) = PU_0^0(x, y)$.

Nous établissons tout d'abord l'existence et l'unicité de U_0 .

7.2.2.1 Existence des profils

Théorème 7.2.1

Dans les conditions des hypothèses 4 et 5, et si $U_0^0 = PU_0^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 1$, il existe un temps $T > 0$ et une unique fonction

$$U_0 \in \mathcal{C}^0 \left([0, T]; \bigcap_{1 \leq l \leq s} \mathbb{W}^{l, \infty}(\mathbb{R}_t; \mathbb{H}^{s-l}(\mathbb{R}^2)) \right),$$

telle que $U_0 = \sum_{j=1}^k P_j U_0 = \sum_{j=1}^k u_j$, où les fonctions u_j , $j = 1, \dots, k$ vérifient les équations (7.2.2) et (7.2.11) :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_j \partial_x) u_j = 0 & \text{(Equation de transport),} \\ \partial_x (\partial_\tau u_j - D_j \partial_x^2 u_j + B_j(u_j, \partial_x u_j) + F_j(u_j, u_j, u_j)) = C_j \partial_y^2 u_j, \end{cases} \quad (7.2.13)$$

(où la seconde équation est l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya quand $D_j > 0$ et $C_j \neq 0$ (voir l'équation (7.2.2) pour la définition de v_j et l'équation 7.2.11 pour celle B_j, C_j, D_j et F_j).

De plus $U_0(0, 0, \cdot) = U_0^0$.

Preuve. Soit $u_j = P_j U_0$ et $u_j^0 = P_j U_0^0$.

Nous avons à résoudre les équations (7.2.13). Nous ne considérons, pour commencer, que l'équation (7.2.11) puisque l'équation (7.2.2) est une équation de transport et que ses solutions se déduisent aisément de celles de l'équation (7.2.11). Nous notons $\tilde{u}_j$ la solution de l'équation (7.2.11).

En écrivant l'équation (7.2.11) sous la forme d'une équation d'évolution, nous faisons apparaître l'opérateur formel $\partial_x^{-1} \partial_y^2$ qui peut poser des problèmes de résolution. Afin de nous débarrasser de ce terme, nous définissons le groupe unitaire suivant sur $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$: soit $S_j(\tau)$ l'opérateur défini par :

$$\mathcal{F}_{x,y}(S_j(\tau)u)(\xi, \eta) = e^{i\tau C_j \frac{\eta^2}{\xi}} (\mathcal{F}_{x,y}(u))(\xi, \eta), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

où $\mathcal{F}_{x,y}$ est la transformée de Fourier $2D$. Nous considérons maintenant la fonction

$w_j(\tau, x, y) = S_j(-\tau)\tilde{u}_j(\tau, x, y)$ qui vérifie :

$$\partial_\tau w_j - D_j \partial_x^2 w_j + \tilde{A}_j(\tau, w_j) \partial_x w_j + \tilde{F}_j(\tau, w_j) = 0, \quad (7.2.14)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j(\tau, u)v &= S_j(-\tau)B_j(S_j(\tau)u, S_j(\tau)v), \\ \tilde{F}_j(\tau, v) &= S_j(-\tau)F_j(S(\tau)v, S(\tau)v). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous notons $\Lambda := (I - \Delta)^{1/2}$ le multiplicateur de Fourier de symbole :

$$\sigma(\zeta) = (1 + |\zeta|^2)^{1/2}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2). \quad (7.2.15)$$

En notant $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$, le produit scalaire de $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$ est défini par $(u, v)_s = (\Lambda^s u, \Lambda^s v)$.

A cause de l'hypothèse 4, si $D_j = 0$, l'équation (7.2.14) se réduit à : $\partial_\tau w_j + \tilde{F}_j(\tau, w_j) = 0$.

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, nous obtenons l'existence d'un temps $T_j > 0$ et de

$w_j \in \mathcal{C}^0([0, T_j]; \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))$.

Si maintenant $D_j > 0$, nous approchons la solution de l'équation (7.2.14) sur $[-L, L]^2$ par une méthode de Galerkin avec des conditions de Dirichlet au bord. Nous devons alors effectuer des estimations d'énergie sur v_j dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$ avant de passer à la limite dans l'approximation et en L (nous réalisons ces estimations sur v_j plutôt que sur son approximation pour alléger la preuve). Nous avons déjà :

$$\|\tilde{A}_j(\tau, u)v\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}^s}\|v\|_{\mathbb{H}^s}, \quad \|\tilde{F}_j(\tau, v)\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\|v\|_{\mathbb{H}^s}^3,$$

où C ne dépend ni de τ ni de L . En appliquant l'opérateur Λ^s à l'équation (7.2.14) et en effectuant les estimations, nous obtenons :

$$\frac{d}{d\tau} \|w_j\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}^2 + D_j \|\partial_x w_j\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \left(\|w_j\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}^2 + \|w_j\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}^4 \right).$$

Il existe donc $T_j > 0$ et $v_j \in \mathcal{C}^0([0, T_j]; \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))$ solution de l'équation (7.2.14). En revenant à la fonction $\tilde{u}_j$ ($\tilde{u}_j(\tau, x, y) = S_j(\tau)w_j(\tau, x, y)$), nous obtenons $\tilde{u}_j \in \mathcal{C}^0([0, T_j]; \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))$ et l'équation de transport donne :

$$u_j(t, \tau, x, y) = \tilde{u}_j(\tau, x - v_j t, y).$$

Nous obtenons finalement u_j grâce à une translation en temps de $\tilde{u}_j$. L'opérateur de translation étant unitaire dans $\mathbb{H}^s$, nous avons finalement :

$$u_j \in \mathcal{C}^0 \left(\left[0, T_j \right]; \bigcap_{0 \leq l \leq s} \mathbb{W}^{l, \infty}(\mathbb{R}_t; \mathbb{H}^{s-l}(\mathbb{R}^2)) \right).$$

■

Remarque 7.2.3

Au passage, nous avons aussi prouvé le théorème 6.0.2 sur l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya donné dans l'introduction.

En suivant le travail de Ukai [62] sur l'équation KP, nous aurions aussi pu prouver l'existence de solutions à l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya (KZ) mais au prix de conditions beaucoup trop restrictives et non physiques sur la donnée initiale.

Les équations satisfaites par les autres profils posent problème : nous voulons obtenir l'existence des profils dans des espaces dérivés de $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$ mais l'opérateur ∂_x^{-1} nous impose leur existence dans $\mathbb{H}_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$ seulement et nous empêche d'obtenir des profils (U_1 et U_2) qui satisfont la condition de croissance sous-linéaire (7.2.7). Afin de contourner ce problème, nous utilisons une technique de troncature des basses fréquences (voir [7, 8, 56]) et travaillons sur une approximation “bien-préparée” du profil principal. Nous modifions en conséquence les équations satisfaites par $U_1, U_2, \dots$ afin qu'elles dépendent de la troncature du profil principal plutôt que du profil lui-même. Nous utilisons ensuite ces profils modifiés pour obtenir une solution approchée de l'équation (7.2.1) et prouvons enfin la stabilité de l'approximation.

Définition 7.2.1 (Troncature basse fréquence)

Soit χ une fonction régulière sur $\mathbb{R}_x$, telle que $|\chi| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ pour $|x| < 1$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \geq 2$. Nous définissons le multiplicateur de Fourier $\chi^\delta(D_x)$ comme l'opérateur agissant sur $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\chi^\delta(D_x) : f \mapsto \mathcal{F}_{\xi, \eta \rightarrow x, y}^{-1} \left(\chi \left(\frac{\xi}{\delta} \right) \hat{f}(\xi, \eta) \right).$$

Le théorème de convergence dominée donne que :

$$\chi^\delta f - f \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{H}^s.$$

De plus, nous avons le lemme suivant :

Lemme 7.2.3

Si $f \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2))$ alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|\chi^\delta f(t, \cdot) - f(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Preuve. Soit $I^\delta(t) = \|\chi^\delta f(t, \cdot) - f(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}$. La suite $(I^\delta)_\delta$ est une suite strictement décroissante de fonctions continues et strictement positives qui converge vers zéro lorsque δ tend vers zéro. Le théorème de Dini nous donne le résultat. ■

Soit $X_{s,T}$ l'espace de fonctions définies sur $[0, T] \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2$ par :

$$X_{s,T} = \left\{ u, \sup \left\{ \|\partial_t^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma u(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} : t \in [0, \infty), \tau \in [0, T] \right\} < \infty \right\},$$

pour tout $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ tel que $0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq s$.

Lemme 7.2.4

Si $U_0^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 1$, il existe un unique $U_1^\delta \in X_{s-1,T}$ tel que :

$$\begin{cases} U_1^\delta = P U_1^\delta = \sum_{j=1}^k P_j U_1^\delta, \\ (\partial_t + v_j \partial_x) P_j U_1^\delta + P_j A_2 \sum_{i \neq j} \partial_y P_i U_0^\delta = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

De plus $\|U_1^\delta\|_{X_{s-1,T}} \leq \frac{C}{\delta} \|U_0\|_{X_{s,T}}$, où C ne dépend ni de δ ni de $\|U_0\|_{X_{s,T}}$.

Preuve. Comme nous avons tronqué les basses fréquences de U_0 , il existe des applications φ_j^δ , $j = 1, \dots, k$, telles que :

$$P_j U_0^\delta(t, \tau, x, y) = (\partial_x \varphi_j^\delta)(t, \tau, x, y) = (\partial_x \tilde{\varphi}_j^\delta)(\tau, x - v_j t, y),$$

avec $\|\varphi^\delta(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\delta} \|U_0^\delta(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)}$.

Comme nous supposons que $U_1(t=0) = 0$, nous obtenons que, pour tout $j = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} P_j U_1^\delta &= - \sum_{i \neq j} P_j A_2 P_i \int_0^t \partial_y P_i U_0^\delta(s, \tau, x - v_j(t-s), y) ds \\ &= - \sum_{i \neq j} P_j A_2 P_i \int_0^t \partial_y \partial_x \tilde{\varphi}_i^\delta(\tau, x - v_j t + (v_j - v_i)s, y) ds \\ &= - \sum_{i \neq j} \frac{1}{v_j - v_i} P_j A_2 P_i \left(\partial_y \tilde{\varphi}_i^\delta(\tau, x - v_i t, y) - \partial_y \tilde{\varphi}_i^\delta(\tau, x - v_j t, y) \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $P_j U_1^\delta \in X_{s-1, T}$ et $\|U_1^\delta\|_{X_{s-1, T}} \leq \frac{C}{\delta} \|U_0\|_{X_{s, T}}$. ■

De la même façon, nous prouvons :

Lemme 7.2.5

Si nous supposons de plus que $U_0^\delta \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 3$ et que $\delta < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|QU_2^\delta\|_{X_{s-1, T}} &\leq C, & \|PU_2^\delta\|_{X_{s-2, T}} &\leq \frac{C}{\delta^2}, \\ \|QU_3^\delta\|_{X_{s-2, T}} &\leq \frac{C}{\delta}, & \|QU_4^\delta\|_{X_{s-3, T}} &\leq \frac{C}{\delta^2}, \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de $\|U_0\|_{X_{s, T}}$.

7.2.2.2 Estimation du reste

Nous considérons maintenant le développement asymptotique bâti sur la troncature :

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon, \delta}(t, \tau, x, y) &= U_0^\delta(t, \tau, x, y) + \varepsilon U_1^\delta(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 U_2^\delta(t, \tau, x, y) \\ &\quad + \varepsilon^3 QU_3^\delta(t, \tau, x, y) + \varepsilon^4 QU_4^\delta(t, \tau, x, y). \end{aligned}$$

Nous recherchons la solution $\mathcal{U}^\varepsilon$ de l'équation

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A_1 \partial_x \mathcal{U}^\varepsilon + A_2 \partial_y \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} L \mathcal{U}^\varepsilon = B(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon) + \varepsilon^2 T(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon),$$

sous la forme $\mathcal{U}^\varepsilon(t, x, y) = u^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 t, x, \varepsilon y) + \tilde{U}^\delta(t, x, \varepsilon y)$. $\tilde{U}^\delta$ satisfait alors l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U}^\delta + A_1 \partial_x \tilde{U}^\delta + \varepsilon A_2 \partial_y \tilde{U}^\delta + \frac{1}{\varepsilon^2} L \tilde{U}^\delta &= 2B(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta) + B(\tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) \\ &\quad + 3\varepsilon^2 T(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta) \\ &\quad + 3\varepsilon^2 T(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) \\ &\quad + \varepsilon^2 T(\tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) + \mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}, \end{aligned} \tag{7.2.16}$$

où $\mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}(t, x, y) = R^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 t, x, y)$, et $R^{\varepsilon, \delta}$ est le résidu de $u^{\varepsilon, \delta}$ dans l'équation (7.2.1). Nous souhaitons donc prouver que le résidu $R^{\varepsilon, \delta}(t, \tau, x, y) = \sum_{i=-2}^{14} \varepsilon^i R_i^{\delta}(t, \tau, x, y)$ reste petit :

$$\begin{aligned} R_{-2}^{\delta} &= LU_0^{\delta} = 0, \\ R_{-1}^{\delta} &= LU_1^{\delta} = 0, \\ R_0^{\delta} &= \partial_t U_0^{\delta} + A_1 \partial_x U_0^{\delta} - B(U_0^{\delta}, U_0^{\delta}) + LQU_2^{\delta} = 0, \\ R_1^{\delta} &= \partial_t U_1^{\delta} + A_1 \partial_x U_1^{\delta} + A_2 \partial_y U_0^{\delta} + LQU_3^{\delta} - 2B(U_0^{\delta}, U_1^{\delta}) = 0, \\ R_2^{\delta} &= \partial_t U_2^{\delta} + A_1 \partial_x U_2^{\delta} + A_2 \partial_y U_1^{\delta} + LQU_4^{\delta} - B(U_1^{\delta}, U_1^{\delta}) - 2B(U_0^{\delta}, U_2^{\delta}) \\ &\quad + \partial_{\tau} U_0^{\delta} - T(U_0^{\delta}, U_0^{\delta}, U_0^{\delta}) \\ &= \sum_j \left(B_j(P_j U_0^{\delta}, \partial_x P_j U_0^{\delta}) + F_j(P_j U_0^{\delta}, P_j U_0^{\delta}, P_j U_0^{\delta}) \right) \\ &\quad - \chi^{\delta} \left(\sum_j (B_j(P_j U_0, \partial_x P_j U_0) + F_j(P_j U_0, P_j U_0, P_j U_0)) \right), \end{aligned}$$

Nous n'avons pas $R_2^{\delta} = 0$ puisque U_0^{δ} n'est pas solution de l'équation (7.2.11) mais de :

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\partial_{\tau} P_j U_0^{\delta} - D_j \partial_x^2 P_j U_0^{\delta} + \chi^{\delta} (B_j(P_j U_0, P_j U_0) + F_j(P_j U_0, P_j U_0, P_j U_0)) \right) \\ = C_j \partial_y^2 P_j U_0^{\delta} \end{aligned}$$

Les résidus suivants $(R_i^{\delta})_{i=3, \dots, 14}$ dépendent polynomialement de $U_0^{\delta}, U_1^{\delta}, U_2^{\delta}, QU_3^{\delta}, QU_4^{\delta}$ et de leurs dérivées en la variable de temps lente τ (voir l'annexe 11.3).

Proposition 7.2.1

Si $s > 5$, le résidu satisfait les estimations suivantes :

$$\sup_{t \in [0, T/\varepsilon^2]} \|R^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}(\mathbb{R}^2)} = \left(f(\delta) + \frac{\varepsilon}{\delta^6} \right) O(\varepsilon^2) + \varepsilon^2 g(\varepsilon),$$

et si $s > 6$,

$$\|\mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}\|_{\mathbb{L}^{\infty}([0, T/\varepsilon^2] \times \mathbb{R}^2)} = \left(f(\delta) + \frac{\varepsilon}{\delta^6} \right) O(\varepsilon^2) + \varepsilon^2 g(\varepsilon)$$

où $\mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}(t, x, y) = R^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 t, x, \varepsilon y)$, f est une fonction positive strictement décroissante telle que $f(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, et g est une fonction positive telle que $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Comme nous l'avons précisé au-dessus, $R_{-2}^{\delta} = R_{-1}^{\delta} = R_0^{\delta} = R_1^{\delta} = 0$. Le lemme 7.2.3 donne

$\sup_{t \in [0, T/\varepsilon^2]} \|R_2^{\delta}(t, \varepsilon^2 \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)} = f(\delta)$ où f satisfait les hypothèses de la proposition 7.2.1.

Afin d'estimer les termes suivants, nous avons besoin de majorations de $\partial_{\tau} U_0, \partial_{\tau} U_1, \dots$. En utilisant l'équation (7.2.11), nous obtenons $\|\partial_{\tau} U_0\|_{X_{s-2, T}} \leq \frac{C}{\delta}$. En procédant de même qu'aux lemmes 7.2.4 et 7.2.5, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\tau} U_1^{\delta}\|_{X_{s-3, T}} &\leq \frac{C}{\delta^2}, & \|\partial_{\tau} QU_2^{\delta}\|_{X_{s-3, T}} &\leq \frac{C}{\delta}, & \|\partial_{\tau} PU_2^{\delta}\|_{X_{s-4, T}} &\leq \frac{C}{\delta^3}, \\ \|\partial_{\tau} QU_3^{\delta}\|_{X_{s-4, T}} &\leq \frac{C}{\delta^2}, & \|\partial_{\tau} QU_4^{\delta}\|_{X_{s-5, T}} &\leq \frac{C}{\delta^3}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant estimer chaque terme du résidu. Nous obtenons finalement le résultat annoncé. Nous déduisons les estimations $\mathbb{L}^{\infty}$ des injections de Sobolev usuelles quand $s > 6$. ■

7.2.2.3 Stabilité de l'approximation KZ

Nous avons montré jusqu'à présent l'existence d'un développement asymptotique $u^{\varepsilon, \delta}$ bâti sur une troncature du profil principal. De plus, son résidu dans l'équation (7.2.1) est petit pour des temps de l'ordre $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$. Nous montrons maintenant que le profil principal, non tronqué en fréquence, U_0 reste proche de la solution exacte pour des temps d'ordre $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$. Plus précisément, en suivant [8], nous montrons que pour tout $T > 0$ tel que le terme principal existe, la solution exacte de l'équation (7.2.1) existe sur $[0, T/\varepsilon^2]$ et reste proche du terme principal du développement.

Théorème 7.2.2

Dans le cadre des hypothèses 1 à 5, soit $U_0^0 = PU_0^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 6$. Soit le temps $T_0 > 0$ tel que $U_0 = \sum_{j=1}^k P_j U_0$ appartienne à $\mathcal{C}^0([0, T_0/\varepsilon^2]; \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ et $(P_j U_0)_{j=1, \dots, k}$ vérifie les équations (7.2.2) et (7.2.11). Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une unique solution $\mathcal{U}^\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0, T_0/\varepsilon^2]; \mathbb{H}^{s-5}(\mathbb{R}^2))$ de

$$\partial_t \mathcal{U}^\varepsilon + A_1 \partial_x \mathcal{U}^\varepsilon + A_2 \partial_y \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} L \mathcal{U}^\varepsilon = B(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon) + \varepsilon^2 T(\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{U}^\varepsilon),$$

avec $\mathcal{U}^\varepsilon(0, x, y) = U_0^0(x, \varepsilon y)$. De plus

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon - U_0^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty([0, T_0/\varepsilon^2] \times \mathbb{R}^2)} = o(1) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $U_0^\varepsilon(t, x, y) = U_0(t, \varepsilon^2 t, x, \varepsilon y)$.

Remarque 7.2.4

Nous nous intéressons maintenant au comportement en temps long de l'équation. Nous ne considérons donc plus que la variable de temps rapide t , mais jusqu'à des temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ provenant de l'étude faite en τ .

Preuve. Nous recherchons la solution exacte $\mathcal{U}^\varepsilon$ sous la forme d'une perturbation du développement asymptotique tronqué $\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}$:

$$\mathcal{U}^\varepsilon(t, x, y) = \mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}(t, x, \varepsilon y) + \tilde{U}^\delta(t, x, \varepsilon y),$$

où $\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}(t, x, y) = u^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 t, x, y)$. Le terme d'erreur satisfait :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U}^\delta + A_1 \partial_x \tilde{U}^\delta + \varepsilon A_2 \partial_y \tilde{U}^\delta + \frac{1}{\varepsilon^2} L \tilde{U}^\delta = & 2B(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta) + B(\tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) \\ & + 3\varepsilon^2 T(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta) \\ & + 3\varepsilon^2 T(\mathcal{U}^{\varepsilon, \delta}, \tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) \\ & + \varepsilon^2 T(\tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta, \tilde{U}^\delta) + \mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}, \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

avec la donnée initiale $\tilde{U}^\delta(t=0, x, y) = (U_0^0 - \chi^\delta U_0^0)(x, y)$, et où $\mathcal{R}^{\varepsilon, \delta}(t, x, y) = R^{\varepsilon, \delta}(t, \varepsilon^2 t, x, y)$.

L'existence locale de $\tilde{U}^\delta$ dans $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{H}^{s-5}(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}^{s-6}(\mathbb{R}^2))$ peut être prouvée par des techniques classiques (voir, par exemple, [3]).

Afin d'obtenir les estimations $\mathbb{H}^{s-5}$, nous appliquons l'opérateur Λ^{s-5} que nous avons précédemment défini (voir (7.2.15)) à l'équation (7.2.17) et nous prenons le produit scalaire avec $\Lambda^{s-5} \tilde{U}^\delta$ dans $\mathbb{L}^2$. Comme $\mathbb{H}^l(\mathbb{R}^2)$ est une algèbre dès que $l > 1$, il existe des constantes $C > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} (B(V, V'), V'')_{s-5} \leq & C \|V\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|V'\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|QV''\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \\ & + C \|V\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|V''\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|QV'\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \\ & + C \|V'\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|V''\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|QV\|_{\mathbb{H}^{s-5}}, \end{aligned}$$

$$\|T(V, V', V'')\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \leq C \|V\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|V'\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|V''\|_{\mathbb{H}^{s-5}},$$

$$(LV, V)_{s-5} \geq C \|QV\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \quad (\text{Hypothèse 2}).$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + \frac{C}{\varepsilon^2} \|Q\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \leq & C \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|Q\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \\ & + C \|Q\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + C \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \|Q\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \\ & + C\varepsilon^2 \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + C\varepsilon^2 \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^3 \\ & + C\varepsilon^2 \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^4 + \|R^{\varepsilon,\delta}(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \end{aligned}$$

De même que dans [8], nous introduisons $t_0(\varepsilon, \delta)$ défini par :

$$t_0(\varepsilon, \delta) = \sup \left\{ t \in [0, T_0/\varepsilon^2], \|\tilde{U}^\delta(t)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \leq 1 \right\}.$$

Nous remarquons aussi (d'après les lemmes 7.2.4 et 7.2.5) que :

$$\|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{\delta^4}\right), \quad \|Q\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \leq C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right).$$

Au moyen de l'inégalité de Young, nous absorbons tous les termes faisant intervenir $Q\tilde{U}^\delta$ et nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + \frac{C}{\varepsilon^2} \|Q\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \leq C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^8}{\delta^8}\right) \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + C\varepsilon^2 \left(f(\delta) + \frac{\varepsilon}{\delta^6} + g(\varepsilon)\right),$$

où f et g vérifient les conditions établies dans la proposition 7.2.1. D'après le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}^\delta\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 \leq & \left(\|\tilde{U}^\delta(t=0)\|_{\mathbb{H}^{s-5}}^2 + C \left(f(\delta) + \frac{\varepsilon}{\delta^6} + g(\varepsilon) \right) \right) \\ & \exp \left(C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^8}{\delta^8} \right) t \right). \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Comme $\|\tilde{U}^\delta(t=0)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, nous pouvons prendre, par exemple, $\delta = \varepsilon^{1/7}$ et pour ε suffisamment petit, nous déduisons de l'équation (7.2.18) que $t_0(\varepsilon, \delta) = \frac{T_0}{\varepsilon^2}$.

Nous devons maintenant prouver que le profil principal $\mathcal{U}_0^\varepsilon$ reste proche de la solution approchée $\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}$ sur l'intervalle $[0, T_0/\varepsilon^2]$, pour $\delta = \varepsilon^{1/7}$:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta} - U_0(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} & \leq \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta} - U_0^\delta(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \\ & + \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|U_0^\delta(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot) - U_0(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta}(t, x, y) - U_0^\delta(t, \varepsilon^2 t, x, y) = (\varepsilon U_1^\delta + \varepsilon^2 U_2^\delta + \varepsilon^3 Q U_3^\delta + \varepsilon^4 Q U_4^\delta)(t, \varepsilon^2 t, x, y),$$

et ces profils vérifient les inégalités des lemmes 7.2.4 et 7.2.5, nous avons

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\mathcal{U}^{\varepsilon,\delta} - U_0(t, \varepsilon^2 t, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \leq C\varepsilon^{6/7} + \sup_{t \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T_0]} \|U_0^\delta(t, \tau, \cdot, \cdot) - U_0(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}},$$

En revenant à la définition de U_0 , nous estimons le dernier terme :

$$U_0(t, \tau, x, y) = \sum_{j=1, \dots, k} \tilde{u}_j(\tau, x - v_j t, y)$$

et nous posons $I_j^\delta(\tau) = \|\tilde{u}_j - \chi^\delta \tilde{u}_j\|_{\mathbb{H}^{s-5}}$ pour $j = 1, \dots, k$. En reprenant la preuve du lemme 7.2.3, nous obtenons que pour tout $j = 1, \dots, k$, $\sup_{\tau \in [0, T_0]} I_j^\delta(\tau) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. De la même façon que nous avons obtenu la régularité en la variable t auparavant, nous obtenons que, quand $\delta \rightarrow 0$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T_0]} \|U_0^\delta(t, \tau, \cdot, \cdot) - U_0(t, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbb{H}^{s-5}} \rightarrow 0.$$

Finalement, quand $s > 6$ les injections de Sobolev usuelles nous donnent les estimations $\mathbb{L}^\infty$ annoncées. ■

Chapitre 8

Ondes longues : le cas des équations de Landau-Lifschitz-Maxwell

Nous revenons maintenant à l'équation (7.1.2) et au système d'équations aux dérivées partielles du micro-magnétisme (6.0.1)-(6.0.3).

Comme nous l'avons observé dans la section 7.1.2, l'équation (7.1.2) est un cas particulier de l'équation générale (7.2.1). Les hypothèses 1-3 sont vérifiées (voir les lemmes 7.1.1 et 7.1.2). L'hypothèse 5 est une hypothèse que nous effectuons sur la donnée initiale. Nous vérifierons l'hypothèse restante 4 une fois que nous aurons trouvé les réels D_j et les applications B_j . Le développement asymptotique que nous avons obtenu étant unique et valide en temps long, la façon dont il a été construit n'est donc pas primordiale. Cette observation est importante car elle nous permet d'utiliser l'équation de Landau-Lifschitz sous la forme donnée par Gilbert :

$$\partial_t M = -M \wedge H + \gamma (M \wedge \partial_t M). \quad (8.0.1)$$

Cette équation, connue sous le nom d'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert, est équivalente à l'équation de Landau-Lifschitz, à un changement d'échelle de temps près de facteur $(1 + \gamma^2)$. Comme nous le verrons dans la suite, l'équation (8.0.1) est plus pratique pour construire le développement asymptotique. En effectuant les mêmes changements d'échelles et de variables qu'au chapitre 6, nous sommes amenés à considérer le système suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \partial_t M + \varepsilon^4 \partial_\tau M = & -M_0 \wedge H + \alpha^{-1} M_0 \wedge M - \varepsilon^2 M \wedge H + \gamma [\varepsilon^2 M_0 \wedge \partial_t M \\ & + \varepsilon^4 M_0 \wedge \partial_\tau M + \varepsilon^4 M \wedge \partial_t M + \varepsilon^6 M \wedge \partial_\tau M], \end{aligned} \quad (8.0.2)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t H + \varepsilon^4 \partial_\tau H - \varepsilon^2 k \wedge \partial_x E - \varepsilon^3 l \wedge \partial_y E = -\varepsilon^2 \partial_t M - \varepsilon^4 \partial_\tau M, \quad (8.0.3)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t E + \varepsilon^4 \partial_\tau E + \varepsilon^2 k \wedge \partial_x H + \varepsilon^3 l \wedge \partial_y H = 0. \quad (8.0.4)$$

Nous effectuons maintenant un développement asymptotique des équations (8.0.2)-(8.0.4) suivant le plan de la section 7.2.1 :

$$\begin{aligned} M &= M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^3 M_3 + \dots \\ H &= H_1 + \varepsilon H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots \\ M &= E_1 + \varepsilon E_2 + \varepsilon^3 E_3 + \dots \end{aligned} \quad (8.0.5)$$

8.1 Equations à l'ordre 0

Le terme dominant des équations (8.0.2)-(8.0.4) se réduit à une unique équation,

$$-M_0 \wedge (H_1 - \alpha^{-1} M_1) = 0, \quad (8.1.1)$$

qui nous donne une expression pour M_1 en fonction de $M_1 \cdot M_0$ et H_1 ,

$$M_1 = (M_1 \cdot M_0) M_0 - \alpha M_0 \wedge (M_0 \wedge H_1). \quad (8.1.2)$$

8.2 Equations à l'ordre 1

Au premier ordre, nous obtenons,

$$-M_0 \wedge (H_2 - \alpha^{-1} M_2) = 0, \quad (8.2.1)$$

d'où l'expression pour M_2 ,

$$M_2 = (M_2 \cdot M_0) M_0 - \alpha M_0 \wedge (M_0 \wedge H_2). \quad (8.2.2)$$

8.3 Equations à l'ordre 2

$$\begin{cases} \partial_t M_1 = -M_0 \wedge (H_3 - \alpha^{-1} M_3) - M_1 \wedge H_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_t M_1, \\ \partial_t H_1 - k \wedge \partial_x E_1 = -\partial_t M_1 \\ \partial_t E_1 + k \wedge \partial_x H_1 = 0. \end{cases} \quad (8.3.1)$$

En prenant le produit scalaire de l'équation (8.3.1) avec M_0 et en ajoutant celui de l'équation (8.1.1) avec M_1 , nous obtenons que $\partial_t (M_1 \cdot M_0) = 0$, donc :

$$M_1 \cdot M_0 = f_0, \quad f_0 \equiv f_0(x, y, \tau). \quad (8.3.2)$$

(Notons au passage que $M_1 \cdot M_0$ est le terme d'ordre ε^2 dans le développement de $|M|^2$, qui est constant) Si nous utilisons maintenant le produit vectoriel au lieu du produit scalaire, nous obtenons une expression pour M_3 en fonction de $M_3 \cdot M_0$ et H_2 .

$$M_3 = (M_3 \cdot M_0) M_0 - \alpha M_0 \wedge (M_0 \wedge H_3) + \alpha M_0 \wedge q_1, \quad (8.3.3)$$

où le vecteur q_1 est donné par :

$$q_1 = -\partial_t M_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_t M_1 - M_1 \wedge H_1.$$

Nous substituons l'expression (8.1.2) dans la seconde équation de (8.3.1), utilisons $\partial_t (M_1 \cdot M_0) = 0$ et résolvons l'équation ainsi obtenue en $\partial_t H_1$ pour obtenir un système d'équations pour H_1 et E_1 ,

$$\begin{cases} \partial_t H_1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} (k \cdot (M_0 \wedge \partial_x E_1)) M_0 - \frac{1}{1 + \alpha} k \wedge \partial_x E_1 = 0, \\ \partial_t E_1 + k \wedge \partial_x H_1 = 0. \end{cases} \quad (8.3.4)$$

8.3.1 Choix des coordonnées

Le système d'équations (8.3.4) se résout plus facilement si nous choisissons le système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ engendré par k , $k \wedge M_0$ et M_0 (nous avons fait l'hypothèse que k et M_0 n'étaient pas colinéaires.) Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, nous posons :

$$v_a = v \cdot M_0, \quad v_b = v \cdot (k \wedge M_0), \quad v_c = v \cdot k. \quad (8.3.5)$$

Alors

$$v = \frac{1}{1 - k_a^2} [(v_a - k_a v_c) M_0 + v_b (k \wedge M_0) + (v_c - k_a v_a) k], \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

où $k_a = M_0 \cdot k$. Un calcul immédiat montre que :

$$u \cdot v = \frac{1}{1 - k_a^2} [u_a v_a + u_b v_b + u_c v_c - k_a (u_a v_c + u_c v_a)], \quad u, v \in \mathbb{R}^3,$$

$$u \wedge v = \frac{1}{1 - k_a^2} \begin{vmatrix} M_0 & k \wedge M_0 & k \\ u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \end{vmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Le système d'équations (8.3.4) devient :

$$\partial_t u_1 + K \partial_x u_1 = 0, \quad (8.3.6)$$

où $u_1 = (H_{1a}, H_{1b}, H_{1c}, E_{1a}, E_{1b}, E_{1c})^t$ et

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 + \alpha)^{-1} & 0 & k_a(1 + \alpha)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_a \alpha (1 + \alpha)^{-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.3.2 Solution de l'équation (8.3.6)

Le polynôme caractéristique de K est $\det(\lambda I - K) = (\lambda^2 - v_0^2)(\lambda^2 - v_1^2)(\lambda^2 - v_2^2)$, où

$$v_0 = 0, \quad v_1 = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/2}, \quad v_2 = \left(\frac{1 + (1 - k_a^2)\alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2}.$$

Les valeurs propres de K sont donc $v_0 = 0$ (de multiplicité algébrique 2), $\pm v_1$ et $\pm v_2$. Nous avons aussi $v_0 < v_1 < v_2$ et $1 - v_2^2 = k_a^2(1 - v_1^2)$. Nous diagonalisons la matrice K grâce à l'application linéaire F , $K = F^{-1}VF$, $V = \text{diag}(v_0, v_0, v_1, -v_1, v_2, -v_2)$ et

$$F = \begin{pmatrix} k_a(1 - v_1^{-2}) & 0 & v_1^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_1 & 0 & k_a v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_1 & 0 & -k_a v_1 \\ v_2^{-1} & 0 & -k_a v_2^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -v_2^{-1} & 0 & k_a v_2^{-1} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant F à l'équation (8.3.6), nous obtenons le système diagonal,

$$(\partial_t + V \partial_x) F u_1 = 0.$$

Ce système correspond à l'équation (7.2.2). Ces équations sont découplées et chacune peut être intégrée le long de sa caractéristique. Nous trouvons $u_1 = F^{-1}f$ où $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t$ et

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv f_1(\tau, x, y), & f_2 &\equiv f_2(\tau, x, y), \\ f_3 &\equiv f_3(\tau, x - v_1 t, y), & f_4 &\equiv f_4(\tau, x + v_1 t, y), \\ f_5 &\equiv f_5(\tau, x - v_2 t, y), & f_6 &\equiv f_6(\tau, x + v_2 t, y), \end{aligned}$$

Les fonctions f_1 et f_2 représentent des ondes stationnaires, f_3 et f_4 des ondes progressives de vitesses respectives v_1 et $-v_1$, et f_5 et f_6 des ondes progressives de vitesses respectives v_2 et $-v_2$.

Les composantes de M_1 se déduisent des équations (8.1.2)-(8.3.2) et de l'expression de u_1 ,

$$M_{1a} = f_0, \quad M_{1b} = \frac{1 - v_1^2}{2v_1^2}(f_3 + f_4), \quad M_{1c} = k_a f_0 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2^2} f_1 - k_a \frac{1 - v_1^2}{2v_2^2}(f_5 - f_6). \quad (8.3.7)$$

Ceci conclut l'analyse de l'approximation au second ordre. Nous savons à présent que les coefficients d'ordre 0 dans les développements (8.0.5) sont des combinaisons linéaires d'ondes stationnaires ($v_0 = 0$) et progressives ($\pm v_1, \pm v_2$). Dans les sections suivantes, nous étudions l'évolution des profils $f_0, \dots, f_6$ sur l'échelle de temps lente (τ) et le long de la direction transverse (y).

8.4 Equations à l'ordre 3

Au troisième ordre, les équations (8.0.2)-(8.0.4) donnent les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \partial_t M_2 = -M_0 \wedge (H_4 - \alpha^{-1} M_4) - M_1 \wedge H_2 - M_2 \wedge H_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_t M_2, \\ \partial_t H_2 - k \wedge \partial_x E_2 - l \wedge \partial_y E_1 = -\partial_t M_2, \\ \partial_t E_2 + k \wedge \partial_x H_2 + l \wedge \partial_y H_1 = 0. \end{cases} \quad (8.4.1)$$

Nous suivons la même démarche qu'à la section précédente. Nous prenons le produit scalaire de la première équation de (8.4.1) avec M_0 et nous utilisons les équations (8.1.2) et (8.2.2) pour obtenir :

$$\partial_t (M_2 \cdot M_0) = 2\alpha M_0 \cdot H_1 \wedge H_2. \quad (8.4.2)$$

En prenant maintenant le produit vectoriel par M_0 ,

$$M_4 = (M_0 \cdot M_4) M_0 - \alpha M_0 \wedge (M_0 \wedge H_4) + \alpha M_0 \wedge q_2, \quad (8.4.3)$$

où le vecteur q_2 est donné par :

$$q_2 = -\partial_t M_2 - M_1 \wedge H_2 - M_2 \wedge H_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_t M_2.$$

Nous substituons l'expression (8.2.2) dans la seconde équation de (8.4.1) et nous résolvons l'équation ainsi obtenue pour $\partial_t H_2$ afin d'obtenir un système d'équations pour H_2 et E_2 ,

$$\begin{cases} \partial_t H_2 + \frac{\alpha}{1+\alpha} (k \cdot M_0 \wedge \partial_x E_2 + l \cdot M_0 \wedge \partial_y E_1) M_0 \\ \quad - \frac{1}{1+\alpha} (k \wedge \partial_x E_2 + l \wedge \partial_y E_1) + 2\alpha (M_0 \cdot H_1 \wedge H_2) M_0 = 0, \\ \partial_t E_2 + k \wedge \partial_x H_2 + l \wedge \partial_y H_1 = 0. \end{cases} \quad (8.4.4)$$

8.4.1 Représentation en coordonnées

Nous utilisons le système de coordonnées introduit dans la section 8.3.1 ainsi que les abréviations définies dans l'équation (8.3.5). Les équations (8.4.4) correspondent au système d'équations suivant :

$$\partial_t u_2 + K \partial_x u_2 + K' \partial_y u_1 + A(u_1) u_2 = 0, \quad (8.4.5)$$

où K est la matrice définie à la section 8.3.1, $u_2 = (H_{2a}, H_{2b}, H_{2c}, E_{2a}, E_{2b}, E_{2c})^t$,

$$K' = \frac{1}{1-k_a^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_a l_b & l_c - k_a l_a & -l_b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_c}{1+\alpha} & 0 & \frac{l_a}{1+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\alpha k_a^2) l_b}{1+\alpha} & k_a l_c - \frac{(1+\alpha k_a^2) l_a}{1+\alpha} & -k_a l_b \\ -k_a l_b & k_a l_a - l_c & l_b & 0 & 0 & 0 \\ l_c & 0 & -l_a & 0 & 0 & 0 \\ -l_b & l_a - k_a l_c & k_a l_b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A(u_1) = \frac{2\alpha}{1-k_a^2} \begin{pmatrix} -k_a H_{1b} & k_a H_{1a} - H_{1c} & H_{1b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_a^2 H_{1b} & k_a^2 H_{1a} - k_a H_{1c} & k_a H_{1b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la transformation linéaire F , nous obtenons :

$$\partial_t F u_2 + V \partial_x F u_2 + F K' F^{-1} \partial_y f + (F A(F^{-1} f) F^{-1}) F u_2 = 0. \quad (8.4.6)$$

Reprenant le schéma donné à la section 7.2.1, nous supposons que u_2 satisfait l'hypothèse de croissance sous-linéaire (7.2.7) et nous prenons la moyenne de l'équation (8.4.6) le long des caractéristiques que nous utilisons dans la section 8.3.2. Nous posons $g = F u_2 = (g_1, \dots, g_6)^t$ et $V' = F K' F^{-1}$ et nous obtenons :

$$(V - v \text{Id}) \partial_x G_v g + V' \partial_y G_v f + F A(F^{-1} G_v f) F^{-1} G_v g = 0, \quad (8.4.7)$$

avec $v \in \{0, \pm v_1, \pm v_2\}$, où

$$V' = \frac{1}{1 - k_a^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & -a_2 & -a_3 & a_3 \\ -a_4 & a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 & a_8 \\ a_4 & a_5 & a_7 & -a_6 & a_8 & -a_8 \\ -a_9 & -a_{10} & -a_{11} & a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_9 & a_{10} & a_{11} & -a_{11} & a_{13} & -a_{12} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{l_b}{2v_1^3}, & a_2 &= \frac{k_a l_c - l_a}{2}, & a_3 &= \frac{l_b v_2}{2}, \\ a_4 &= l_b \frac{v_1^3}{v_2^2} (1 - k_a^2), & a_5 &= v_1^2 (l_a - k_a l_c), & a_6 &= \frac{l_c v_1}{2} (2 - k_a^2), \\ a_7 &= \frac{l_c v_1}{2} k_a^2, & a_8 &= \frac{k_a l_b v_1}{2 v_2} (v_2^2 - v_1^2), & a_9 &= (l_a - k_a l_c) \frac{v_1^2}{v_2^2}, \\ a_{10} &= l_b v_2 (1 - k_a^2), & a_{11} &= \frac{l_b k_a v_2^2 - v_1^2}{2 v_1 v_2}, \\ a_{12} &= \frac{1}{2} \frac{2 - k_a^2}{v_2} (l_c - l_a k_a (1 - v_1^2)), & a_{13} &= \frac{k_a^2}{2 v_2} (l_c - l_a k_a (1 - v_1^2)). \end{aligned}$$

Deux des vingt-neuf équations (la troisième quand on applique G_{v_1} et la quatrième quand on applique G_{-v_1}) que l'on déduit des équations (8.4.7) donnent la même condition de compatibilité :

$$\frac{l_c v_1}{2} (2 - k_a^2) \partial_y f_3 = 0, \quad -\frac{l_c v_1}{2} (2 - k_a^2) \partial_y f_4 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$l_c = l \cdot k = 0,$$

ce qui signifie que la direction des perturbations transverses est orthogonale à la direction de propagation. Cette condition de compatibilité est l'une des deux conditions que H. Leblond et M. Manna ont mis en évidence dans [38].

8.5 Equations à l'ordre 4

Au quatrième ordre, les équations (8.0.2)-(8.0.4) donnent les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \partial_t M_3 + \partial_\tau M_1 = -M_0 \wedge (H_5 - \alpha^{-1} M_5) - M_1 \wedge H_3 - M_2 \wedge H_2 - M_3 \wedge H_1 \\ \quad + \gamma [M_0 \wedge \partial_t M_3 + M_0 \wedge \partial_\tau M_1 + M_1 \wedge \partial_t M_1], \\ \partial_t H_3 + \partial_\tau H_1 - k \wedge \partial_x E_3 - l \wedge \partial_y E_2 = -\partial_t M_3 - \partial_\tau M_1, \\ \partial_t E_3 + \partial_\tau E_1 + k \wedge \partial_x H_3 + l \wedge \partial_y H_2 = 0. \end{cases} \quad (8.5.1)$$

Nous suivons la même démarche qu'à la section précédente. Nous prenons le produit scalaire de la première équation de (8.5.1) avec M_0 et nous utilisons les équations (8.1.1), (8.2.1) et (8.3.3) pour obtenir

$$\partial_t \left(M_3 \cdot M_0 + \frac{1}{2} |M_1|^2 \right) + \partial_\tau (M_1 \cdot M_0) = 0. \quad (8.5.2)$$

Nous savons déjà que $M_0 \cdot M_1 = f_0$ où f_0 ne dépend pas de t . L'équation (8.5.2) implique donc que $M_3 \cdot M_0 + \frac{1}{2} |M_1|^2$ croît linéairement en temps jusqu'à $t \rightarrow +\infty$, à moins que f_0 soit aussi indépendant de τ . Nous évitons ce type de comportement en imposant la condition $f_0 \equiv f_0(x, y)$. Si $M_1 \cdot M_0 = 0$ à $t = 0$ alors cette condition donne $f_0 \equiv 0$, et les expressions (8.3.7) se simplifient,

$$M_{1a} = 0, \quad M_{1b} = \frac{1 - v_1^2}{2v_1^2} (f_3 + f_4), \quad M_{1c} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2^2} f_1 - k_a \frac{1 - v_1^2}{2v_2} (f_5 - f_6).$$

Si M_1 et M_0 ne sont pas orthogonaux à $t = 0$, une composante constante non nulle doit être ajoutée à M_{1a} , M_{1c} et aux quantités qui en dérivent.

Le produit scalaire de l'équation (8.5.1) avec M_0 donne donc la relation :

$$2M_3 \cdot M_0 + |M_1|^2 = g_0, \quad g_0 \equiv g_0(\tau, x, y). \quad (8.5.3)$$

Nous prenons maintenant le produit vectoriel par M_0 ,

$$M_5 = (M_0 \cdot M_5)M_0 - \alpha M_0 \wedge (M_0 \wedge H_5) + \alpha M_0 \wedge q_3, \quad (8.5.4)$$

où le vecteur q_3 est donné par :

$$q_3 = -\partial_t M_3 - \partial_\tau M_1 - M_1 \wedge H_3 - M_2 \wedge H_2 - M_3 \wedge H_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_t M_3 \\ + \gamma M_1 \wedge \partial_t M_1 + \gamma M_0 \wedge \partial_\tau M_1.$$

Nous substituons l'expression (8.1.2) dans la seconde équation de (8.5.1) et nous résolvons l'équation ainsi obtenue en $\partial_t H_3$ pour obtenir un système d'équations pour H_3 et E_3 ,

$$\begin{cases} \partial_t H_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha} (k \cdot (M_0 \wedge \partial_x E_3) + l \cdot (M_0 \wedge \partial_y E_2)) M_0 \\ \quad - \frac{1}{1+\alpha} (k \wedge \partial_x E_3 + l \wedge \partial_y E_2) \\ \quad = \frac{\alpha}{1+\alpha} (M_0 \cdot v_H) M_0 + \frac{1}{1+\alpha} v_H, \\ \partial_t E_2 + k \wedge \partial_x H_2 + l \wedge \partial_y H_1 = v_E, \end{cases} \quad (8.5.5)$$

où les vecteurs v_H et v_E sont :

$$v_H = -\partial_\tau (H_1 + M_1) + \partial_t \left(\frac{1}{2} |M_1|^2 M_0 - \alpha M_0 \wedge q_1 \right), \\ v_E = -\partial_\tau E_1.$$

8.5.1 Représentation en coordonnées

Nous utilisons le système de coordonnées introduit à la section 8.3.1 ainsi que les abréviations définies dans l'équation (8.3.5). Les équations (8.5.5) correspondent au système d'équations suivant :

$$\partial_t u_3 + K \partial_x u_3 + K' \partial_y u_2 = -\partial_\tau u_1 + \partial_t r, \quad (8.5.6)$$

où K et K' sont les matrices définies dans les sections 8.3.1 et 8.4.1 ,

$u_3 = (H_{3a}, H_{3b}, H_{3c}, E_{3a}, E_{3b}, E_{3c})^t$ et

$$r = \left(\frac{1}{2} |M_1|^2, \frac{\alpha}{1+\alpha} q_{1c}, \frac{1}{2} k_a |M_1|^2 - \frac{\alpha}{1+\alpha} q_{1b}, 0, 0, 0 \right)^t.$$

Les éléments de r sont connus (en fonction de f_1 et f_3 à f_6 ; f_2 n'intervient pas). Notons cependant que f_1 ne dépend pas de t et que les dérivées en t de f_3 à f_6 peuvent être exprimées en fonctions de leurs dérivées en x .

8.5.2 Solution de l'équation (8.5.6)

Nous appliquons la transformation F définie à la section 8.3.2 aux deux côtés de l'équation (8.5.6) et nous absorbons la dérivée en t du membre de gauche en rajoutant une dérivée en x au membre de droite afin de compenser,

$$(\partial_t + V\partial_x) F(u_3 - r) = -\partial_\tau f - \partial_x(VFr) - V'\partial_y g. \quad (8.5.7)$$

Comme V est diagonal, l'équation (8.5.7) se décompose en six équations hyperboliques du premier ordre à coefficients constants, qui peuvent être intégrées le long de leurs caractéristiques. Si la solution doit rester bornée, le membre de droite ne doit pas croître linéairement en temps. Cette condition impose des contraintes que nous obtenons en utilisant les résultats de moyenne de la section 7.2.1, lemme 7.2.2.

Nous décomposons $VF r$, séparant les termes constants le long des caractéristiques de ceux qui ne le sont pas,

$$VF r = -D_1 \partial_x f + D_2 f^2 + w.$$

Les deux premiers termes sont constants le long des caractéristiques ; D_1 et D_2 sont des matrices diagonales positives obtenues facilement à partir des équations (8.3.7) et (8.5.1),

$$D_1 = \frac{1}{2}g(1 - v_1^2) \text{diag}(0, 0, 1 - v_1^2, 1 - v_1^2, 1 - v_2^2, 1 - v_2^2),$$

$$D_2 = \frac{3(1 - v_1)^2(1 - v_2^2)}{8v_2^2} \text{diag}(0, 0, 0, 0, 1, 1),$$

où $f^2 = (f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2, f_5^2, f_6^2)^t$ et le terme de reste w se compose exclusivement de termes variant le long des caractéristiques : ses deux premières composantes font intervenir au moins un des f_i , $i = 3, \dots, 6$, sa troisième composante au moins un terme parmi f_1 et f_4 à f_6 , et ainsi de suite. L'équation (8.5.7) devient alors :

$$(\partial_t + V\partial_x) F(u_3 - r) = -[\partial_\tau f - D_1 \partial_x^2 f + D_2 \partial_x f^2 - V'\partial_y g] + w. \quad (8.5.8)$$

En appliquant l'opérateur de moyenne à chaque composante, nous obtenons l'équation

$$\partial_\tau f - D_1 \partial_x^2 f + D_2 \partial_x f^2 = \partial_y \widetilde{V'g}, \quad (8.5.9)$$

où $\widetilde{h} = (G_0 h_1, G_0 h_2, G_{v_1} h_3, G_{-v_1} h_4, G_{v_2} h_5, G_{-v_2} h_6)^t$.

Nous utilisons les équations obtenues à la section 8.4.1. Après quelques calculs, nous avons :

$$\partial_x \widetilde{V'g} = - \begin{pmatrix} L_1 (W_0 C_1 \partial_y f_1 + W_0 C_2 \partial_y f_2) \\ L_2 (W_0 C_1 \partial_y f_1 + W_0 C_2 \partial_y f_2) \\ L_3 W_1 C_3 \partial_y f_3 \\ L_4 W_{-1} C_4 \partial_y f_4 \\ L_5 W_2 (C_5 - a_{12} u_1) \partial_y f_5 + a_{12} \partial_x G_{v_2} g_5 \\ L_6 W_{-2} (C_6 + a_{12} u_2) \partial_y f_6 - a_{12} \partial_x G_{-v_2} g_6 \end{pmatrix}, \quad (8.5.10)$$

où C_i et L_i sont les colonnes et les lignes de la matrice V' , W_i est l'inverse de la matrice diagonale $V - v_i \text{Id}$ restreinte à $\text{Im}(V - v_i \text{Id})$ et étendue trivialement par 0 sur $\text{Ker}(V - v_i \text{Id})$ pour $i \in \{0, \pm v_1, \pm v_2\}$ et $u_1 = (\beta, 0, 0, 0, 0, -1)^t$, $u_2 = (-\beta, 0, 0, 0, -1, 0)^t$ où β est un coefficient que l'on peut déterminer grâce à l'équation de la section 8.4.1 et qui nous permet de nous débarrasser du second membre dans l'équation sur $G_{\pm v_2} g$.

Dans l'équation (8.5.10), nous voyons que $\partial_x \widetilde{V'g}$ dépend encore de $\partial_x G_{v_2} g_5$ et $G_{-v_2} g_6$, mais nous n'avons aucun contrôle sur ces deux termes. Nous imposons alors une nouvelle condition, $a_{12} = 0$, qui donne

$$l_a = l \cdot M_0 = 0.$$

Remarque 8.5.1

Nous avons donc $l_a = l_c = 0$, i.e. la direction de la perturbation transverse est orthogonale à la direction de propagation k et au moment magnétique M_0 . Ces deux conditions sont les conditions de compatibilité que H. Leblond et M. Manna obtiennent dans [38].

En prenant la dérivée en x de l'équation (8.5.9), nous obtenons l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya,

$$\partial_x (\partial_\tau f - D_1 \partial_x^2 f + D_2 \partial_x f^2) = -B \partial_y^2 f, \quad (8.5.11)$$

où

$$B = \text{diag} \left(0, 0, -\frac{l_b^2 v_1}{2(1 - k_a^2)}, \frac{l_b^2 v_1}{2(1 - k_a^2)}, -\frac{l_b^2}{2v_2(1 - k_a^2)}, \frac{l_b^2}{2v_2(1 - k_a^2)} \right).$$

Une condition nécessaire pour que la solution de l'équation (8.5.7) reste bornée en temps long quand ε tend vers zéro est donc que les profils du premier ordre f_1 à f_6 vérifient l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya sur l'échelle de temps lente τ . Les équations pour f_1 et f_2 sont simples : $\partial_\tau f_1 = 0$, $\partial_\tau f_2 = 0$, f_1 et f_2 sont donc constantes sur l'échelle de temps lente et $f_i \equiv f_i(x)$, $i = 1, 2$. Les équations pour f_3 et f_4 sont linéaires, celles pour f_5 et f_6 non-linéaires avec une non-linéarité quadratique.

L'équation (8.5.11) correspond à l'équation (7.2.11). Les valeurs non nulles de D_1 sont strictement positives, et les équation pour f_1 et f_2 , qui font intervenir les zéros de D_1 , sont triviales, c'est-à-dire que le terme faisant intervenir la dérivée en x est nul. Le système de Landau-Lifschitz-Maxwell vérifie donc l'hypothèse 4, en plus des hypothèse 1, 2, 3 et 5. Nous pouvons donc appliquer le théorème 7.2.2, ce qui démontre le théorème 6.0.3.

Chapitre 9

Etude numérique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des approximations numériques du système (9.0.1) étudié aux chapitres 7 et 8 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M = \frac{1}{\varepsilon^2} [-M_0 \wedge H + \alpha^{-1} M_0 \wedge M] - M \wedge H - \frac{\gamma}{\varepsilon^2} [M_0 \wedge (M_0 \wedge H) \\ \quad - \alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge M)] - \gamma [M_0 \wedge (M \wedge H) + M \wedge (M_0 \wedge H) \\ \quad - \alpha^{-1} M \wedge (M_0 \wedge M) + \varepsilon^2 M \wedge (M \wedge H)], \\ \partial_t H - \varepsilon^2 k \wedge \partial_x E - \varepsilon^3 l \wedge \partial_y E = -\varepsilon^2 \partial_t M, \\ \partial_t E + \varepsilon^2 k \wedge \partial_x H + \varepsilon^3 l \wedge \partial_y H = 0, \end{array} \right. \quad (9.0.1)$$

Comme nous avons prouvé que ce système vérifie une estimation d'énergie (Section 7.1.1), nous construisons des schémas numériques satisfaisant le même type de loi de conservation. Nous comparons ensuite ces schémas dans les cas mono- et bi-dimensionnels, et nous mettons en évidence quelques propriétés du système (Section 9.3).

9.1 Discrétisation spatiale

Comme les solutions du problème se propagent à vitesse finie (voir [23] et le chapitre 8) :

$$v_{\pm 1} = \pm \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/2}, \quad v_{\pm 2} = \pm \left(\frac{1 + (1 - (k \cdot M_0)^2) \alpha}{1 + \alpha} \right)^{1/2},$$

nous considérons le domaine périodique $\Omega = [0, l] \times [0, h]$ au lieu de $\mathbb{R}^2$ avec l et h tels que le support de M , H , E n'atteigne pas le bord de Ω pour les temps sur lesquels nous travaillons ($t \leq 1/\varepsilon^2$).

Nous utilisons un maillage classique $n \times m$ où les inconnues pour le champ magnétique et le moment magnétique sont prises aux coins et au milieu de la cellule. Pour le champ électrique, nous utilisons une grille translatée pour laquelle les inconnues sont prises au milieu des côtés de la cellule :

Nous exprimons alors les dérivées spatiales de H (resp. E) sur la grille de E (resp. H). Nous notons D_x^E et D_y^E (resp. D_x^H et D_y^H) les opérateurs de dérivation numérique $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sur la grille de E (resp. H) exprimés sur la grille de H (resp. E).

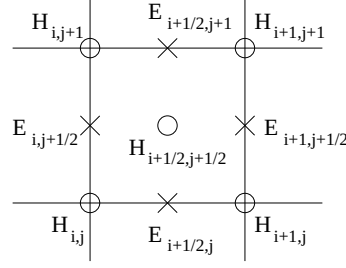


FIG. 9.1.1: Discrétisation spatiale (schéma de Yee)

9.2 Discrétisation temporelle

Les équations (6.0.1)-(6.0.2)-(6.0.3) satisfaisant une loi de conservation, nous nous intéressons à des schémas ayant les mêmes propriétés :

9.2.1 Schéma semi-implicite

En revenant à la forme générale des équations de Landau-Lifschitz-Maxwell utilisée dans [23] et au chapitre 7, nous posons :

$$U^n = (\alpha^{-1/2} M^n, H^n, E^n)^t,$$

et nous utilisons la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{dt} + A_x^1 \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) + \varepsilon A_y^2 \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (L_0 + L_1) \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) \\ + \begin{pmatrix} B_1(U^n) & B_2(U^n) & 0 \\ B_3(U^n) & B_4(U^n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} A_x^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(k \wedge)(D_x^{HM}) \\ 0 & (k \wedge)(D_x^E) & 0 \end{pmatrix}, & A_y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l \wedge)(D_y^{HM}) \\ 0 & (l \wedge)(D_y^E) & 0 \end{pmatrix}, \\ L_0(\cdot) &= \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} M_0 \wedge \cdot & \alpha^{-1/2} M_0 \wedge \cdot & 0 \\ \alpha^{-1/2} M_0 \wedge \cdot & -M_0 \wedge \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_1(\cdot) &= \gamma \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & \alpha^{-1/2} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & 0 \\ \alpha^{-1/2} M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & -M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1(u)v &= v_1 \wedge u_2 + \gamma v_1 \wedge (M_0 \wedge u_2) - \gamma \alpha^{-1/2} v_1 \wedge (M_0 \wedge u_1) + \varepsilon^2 \gamma \alpha^{1/2} v_1 \wedge (u_1 \wedge u_2), \\ B_2(u)v &= \gamma M_0 \wedge (u_1 \wedge v_2), \\ B_3(u)v &= \gamma \alpha^{1/2} u_1 \wedge (M_0 \wedge v_2), \\ B_4(u)v &= -\alpha^{1/2} u_1 \wedge v_2 - \gamma \alpha^{1/2} M_0 \wedge (u_1 \wedge v_2) - \gamma \alpha^{1/2} u_1 \wedge (M_0 \wedge v_2) - \varepsilon^2 \alpha \gamma u_1 \wedge (u_1 \wedge v_2), \end{aligned} \right.$$

où $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ et $v = (v_1, v_2, v_3)^t$.

A cause de la non-linéarité, ce schéma est de premier ordre en temps, mais est de second ordre en espace. En suivant la preuve de l'estimation d'énergie (7.1.1), nous prouvons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|H^{n+1}\|^2 + \|E^{n+1}\|^2 + \alpha^{-1} \|M^{n+1}\|^2) \\ & + dt\gamma \left\| \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H^{n+1/2} + \varepsilon M^n \wedge H^{n+1/2} - \frac{1}{\varepsilon\alpha} M_0 \wedge M^{n+1/2} \right\|^2 \\ & = \frac{1}{2} (\|H^n\|^2 + \|E^n\|^2 + \alpha^{-1} \|M^n\|^2), \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

où $H^{n+1/2} = \frac{H^{n+1} + H^n}{2}$ et $M^{n+1/2} = \frac{M^{n+1} + M^n}{2}$.

Bien que ce schéma soit $\mathbb{L}^2$ -stable, il nécessite à chaque étape l'inversion d'une matrice de taille $18nm \times 18nm$ (où n (resp. m) est le nombre de points de discrétisation dans la direction x (resp. y)). Dans la suite, nous appellerons ce schéma "SIS" (pour "Semi-Implicit Scheme").

9.2.2 Splitting

Une autre solution consiste à utiliser des techniques de *splitting* pour travailler séparément sur les équations de Maxwell et l'équation de Landau-Lifschitz : nous résolvons tout d'abord l'équation de Maxwell sur $[t, t + dt/2]$,

$$\begin{cases} \partial_t M_1 = 0, \\ \partial_t H_1 - k \wedge \partial_x E_1 - \varepsilon l \wedge \partial_y E_1 = 0, \\ \partial_t E_1 + k \wedge \partial_x H_1 + \varepsilon l \wedge \partial_y H_1 = 0, \\ M_1(t) = M^n, H_1(t) = H^n, E_1(t) = E^n, \end{cases} \quad (9.2.2)$$

puis l'équation de Landau-Lifschitz sur $[t, t + dt]$:

$$\begin{cases} \partial_t M_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} (-M_0 \wedge H_2 + \alpha^{-1} M_0 \wedge M_2) - M_2 \wedge H - \gamma \frac{1}{\varepsilon^2} [M_0 \wedge (M_0 \wedge H_2) \\ - \alpha^{-1} M_0 \wedge (M_0 \wedge M_2)] - \gamma [M_0 \wedge (M_2 \wedge H_2) + M_2 \wedge (M_0 \wedge H_2) \\ - \alpha^{-1} M_2 \wedge (M_0 \wedge M_2) + \varepsilon^2 M_2 \wedge (M_2 \wedge H_2)], \\ \partial_t (H_2 + M_2) = 0, \\ \partial_t E_2 = 0, \\ M_2(t) = M_1(t + dt/2), H_2(t) = H_1(t + dt/2), E_2(t) = E_1(t + dt/2). \end{cases} \quad (9.2.3)$$

et finalement les équations de Maxwell sur $[t + dt/2, t + dt]$:

$$\begin{cases} \partial_t M_3 = 0, \\ \partial_t H_3 - k \wedge \partial_x E_3 - \varepsilon l \wedge \partial_y E_3 = 0, \\ \partial_t E_3 + k \wedge \partial_x H_3 + \varepsilon l \wedge \partial_y H_3 = 0, \\ M_3(t) = M_2(t + dt), H_3(t) = H_2(t + dt), E_3(t) = E_2(t + dt), \end{cases} \quad (9.2.4)$$

Nous posons alors $M^{n+1} = M_3(t + dt)$, $H^{n+1} = H_3(t + dt)$, $E^{n+1} = E_3(t + dt)$.

9.2.2.1 Splitting et énergie

Dans ce cas continu, nous obtenons aussi des estimations d'énergie :

Etape 1 :

$$\begin{cases} M_1(t + dt) = M^n, \\ \frac{1}{2} (\|E_1\|^2 + \|H_1\|^2) (t + dt/2) = \frac{1}{2} (\|E^n\|^2 + \|H^n\|^2). \end{cases}$$

Etape 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{n+1} = E_1(t + dt/2), \\ \frac{1}{2} (\|H^{n+1}\|^2 + \alpha^{-1} \|M^{n+1}\|^2) + \int_t^{t+dt} \partial_t M_2(s) \cdot (C - (1 + \alpha^{-1}) M_2(s)) ds \\ \\ = \frac{1}{2} (\|H_1(t + dt)\|^2 + \alpha^{-1} \|M_1(t + dt)\|^2), \end{array} \right.$$

où $C = H_1(t + dt/2) + M_1(t + dt/2) = H_2(s) + M_2(s)$ pour tout $t \leq s \leq t + dt$ et

$$\partial_t M_2 \cdot (C - (1 + \alpha^{-1}) M_2) = \gamma \|\varepsilon M_2 \wedge H_2 + \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H_2 - \alpha^{-1} M_0 \wedge M_2\|^2.$$

Etape 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_3(t + dt) = M_2(t + dt), \\ \frac{1}{2} (\|E_3\|^2 + \|H_3\|^2) (t + dt) = \frac{1}{2} (\|E_2\|^2 + \|H_2\|^2) (t + dt). \end{array} \right.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|E^{n+1}\|^2 + \|H^{n+1}\|^2 + \alpha^{-1} \|M^{n+1}\|^2) \\ & + \gamma \int_t^{t+dt} \left\| \varepsilon M_2 \wedge H_2 + \frac{1}{\varepsilon} M_0 \wedge H_2 - \alpha^{-1} M_0 \wedge M_2 \right\|^2 (s) ds \\ & = \frac{1}{2} (\|E^n\|^2 + \|H^n\|^2 + \alpha^{-1} \|M^n\|^2). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

La difficulté réside maintenant dans le choix des schémas que nous utiliserons sur chaque morceau du *splitting*.

9.2.2.2 Un premier schéma

Schéma semi-implicite pour les équations de Maxwell.

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{n+1/4} = M^n, \\ \frac{H^{n+1/4} - H^n}{\delta t/2} - \left(k \wedge D_x^E \frac{E^{n+1/4} + E^n}{2} + \varepsilon l \wedge D_y^E \frac{E^{n+1/4} + E^n}{2} \right) = 0, \\ \frac{E^{n+1/4} - E^n}{\delta t/2} + \left(k \wedge D_x^H \frac{H^{n+1/4} + H^n}{2} + \varepsilon l \wedge D_y^H \frac{H^{n+1/4} + H^n}{2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Schéma pour l'équation de Landau-Lifschitz.

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{n+3/4} = E^{n+1/4}, \\ C = H^{n+1/4} + M^{n+1/4} = H^{n+1/4} + M^n, \\ \frac{M^{n+3/4} - M^{n+1/4}}{\delta t} = \frac{1}{\varepsilon^2} L \left(-C + (1 + \alpha^{-1}) \frac{M^{n+3/4} + M^{n+1/4}}{2} \right) + L' \left(\frac{M^{n+3/4} + M^{n+1/4}}{2} \right) \\ \quad + B \left(\frac{M^{n+3/4} + M^{n+1/4}}{2}, \frac{M^{n+3/4} + M^{n+1/4}}{2} \right), \\ H^{n+3/4} = C - M^{n+3/4}, \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\cdot) = (M_0 \wedge \cdot) + \gamma M_0 \wedge (M_0 \wedge \cdot), \\ L'(\cdot) = (C \wedge \cdot) + \gamma M_0 \wedge (C \wedge \cdot) + \gamma ((M_0 \wedge C) \wedge \cdot), \\ B(U, V) = \gamma U \wedge ((1 + \alpha^{-1}) M_0 + \varepsilon^2 C) \wedge V. \end{array} \right.$$

La non-linéarité nous empêchant d'obtenir $M^{n+3/4}$ implicitement, nous contournons cette difficulté en utilisant une méthode de point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = M^{n+1/4}, \\ U^{k+1} = M^{n+1/4} + \delta t \left(\frac{1}{\varepsilon^2} L \left(-C + (1 + \alpha^{-1}) \frac{U^{k+1} + M^{n+1/4}}{2} \right) + L' \left(\frac{U^{k+1} + M^{n+1/4}}{2} \right) \right. \\ \quad \left. + B \left(\frac{U^{k+1} + M^{n+1/4}}{2}, \frac{U^k + M^{n+1/4}}{2} \right) \right), \\ M^{n+3/4} = \lim_{k \rightarrow +\infty} U^k. \end{array} \right.$$

Nous réappliquons enfin le schéma semi implicite pour les équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{n+1} = M^{n+3/4}, \\ \frac{H^{n+1} - H^{n+3/4}}{\delta t/2} - \left(k \wedge D_x^E \frac{E^{n+1} + E^{n+3/4}}{2} + \varepsilon l \wedge D_y^E \frac{E^{n+1} + E^{n+3/4}}{2} \right) = 0, \\ \frac{E^{n+1} - E^{n+3/4}}{\delta t/2} + \left(k \wedge D_x^H \frac{H^{n+1} + H^{n+3/4}}{2} + \varepsilon l \wedge D_y^H \frac{H^{n+1} + H^{n+3/4}}{2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Ce schéma satisfait les mêmes estimations d'énergie que celles obtenues dans le cas d'un *splitting* continu. Il requiert à chaque étape l'inversion de deux matrices de taille $12nm \times 12nm$ (équations de Maxwell) et l'inversion à chaque étape de la méthode de point fixe d'une matrice de taille $6nm \times 6nm$. Dans la suite, nous ferons référence à ce schéma par "ECSpS" (pour "Energy Conserving Splitting Scheme")

9.2.2.3 Quelques améliorations

Comme la méthode de point fixe converge rapidement (la constante de Lipschitz est proportionnelle à δt), nous n'avons pas besoin d'effectuer de trop nombreuses inversion pour obtenir $M^{n+3/4}$. Il reste malgré tout la résolution des équations de Maxwell qui est relativement coûteuse. Nous choisissons donc d'utiliser le schéma de Yee [66] pour la résolution des équations de Maxwell à la place du schéma semi-implicite : nous obtenons alors le champ électrique aux temps $(n + 1/2)\delta t$ et les champ et moment magnétiques aux temps $n\delta t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{n+1/2} = M^n, \\ E^n = E^{n-1/2} - \delta t (k \wedge D_x^H H^n + \varepsilon l \wedge D_y^H H^n), \\ H^{n+1/2} = H^n + \delta t (k \wedge D_x^E E^{n+1/2} + \varepsilon l \wedge D_y^E E^{n+1/2}). \end{array} \right.$$

Le schéma de Yee est inadapté à l'obtention d'estimations d'énergie dans cette méthode de *splitting*, mais il nous permet de calculer le champ électromagnétique explicitement.

Suite aux remarques précédentes, nous simplifions aussi le schéma utilisé pour l'équation de Landau-Lifschitz en n'effectuant qu'une seule étape dans la méthode de point fixe au lieu d'utiliser la méthode complète :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{n+1/2} = E^n, \\ C = M^{n+1/2} + H^{n+1/2} = M^n + H^{n+1/2}, \\ M^{n+1} = M^{n+1/2} + \delta t \left(\frac{1}{\varepsilon^2} L (-C + (1 + \alpha^{-1}) M^{n+1}) + L'(M^{n+1}) + B(M^{n+1}, M^{n+1/2}) \right), \\ H^{n+1} = C - M^{n+1}. \end{array} \right.$$

Nous changeons aussi le schéma pour n'effectuer qu'une seule étape sur l'intervalle $[t, t + dt]$ pour les équations de Maxwell puis une étape sur $[t, t + dt]$ pour l'équation de Landau-Lifschitz. Nous ferons référence à ce schéma dans la suite par "SpS" (pour "Splitting Scheme").

9.3 Résultats numériques

Comme nous l'avons exposé dans l'introduction, nous nous intéressons au comportement de petites perturbations de solutions stationnaires des équations de Maxwell-Landau-Lifschitz. Ces solutions sont données par :

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_0 = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour $\varphi \in]0, \pi[$. A $t = 0$, nous perturbons cette solution élémentaire près de l'origine. La perturbation dépend de deux paramètres d'espaces qui varient le long des axes définis par les vecteurs $\tilde{k}$ et $\tilde{l}$:

$$\tilde{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La perturbation est prise uniforme dans la troisième direction définie par $\tilde{k} \wedge \tilde{l}$, fortement concentrée près du centre du domaine $[0, a] \times [0, b]$ en x et y , où x et y sont les coordonnées le long des axes définis respectivement par $\tilde{k}$ et $\tilde{l}$:

$$M(0, x, y) = e^{-4(X^2+Y^2)} M_0^0, \quad H(0, x, y) = e^{-4(X^2+Y^2)} H_0^0, \quad E(0, x, y) = e^{-4(X^2+Y^2)} E_0^0,$$

où $X = x - a/2$ et $Y = y - b/2$.

Conformément aux chapitres 7 et 8, la donnée initiale vérifie la condition de polarisation suivante :

$$(\alpha^{-1} M_0^0 - H_0^0) \wedge M_0 = 0.$$

Toutes les simulations dans les sections suivantes ont été faites dans le cas $\varepsilon^2 = 0.01$, $g = 1$ et $\alpha = 2$.

9.3.1 Comparaison entre les schémas

Dans la section précédente, nous introduisons trois schémas numériques, le schéma semi-implicite (SIS) et le premier schéma de *splitting* (ECSpS) satisfaisant tous deux des lois de conservation, la principale différence résidant dans la façon dont nous estimons la partie dissipative des équations.

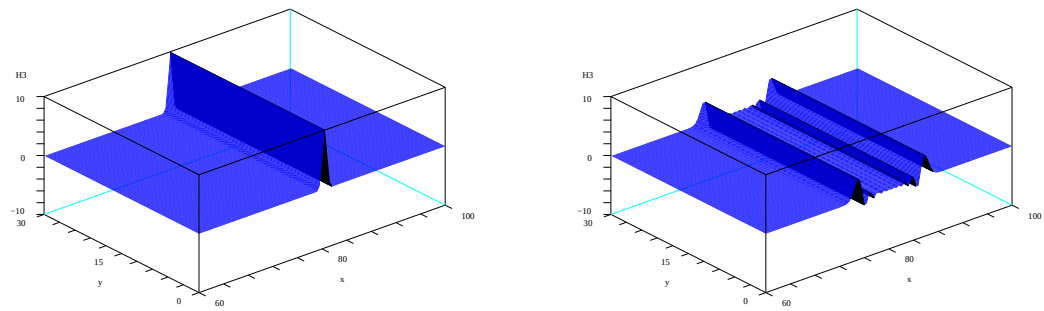
Dans cette section, nous prenons :

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad M_0^0 = \alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9.3.1.1 Comparaison entre les schémas 1D

Dans une première tentative de comparaison de ces schémas, nous considérons le cas monodimensionnel, c'est-à-dire le cas où la donnée initiale est uniforme le long de l'axe y (dirigé par $\tilde{l}$). Comme les trois schémas SIS, ECSpS et SpS utilisent la même discrétisation spatiale et préservent le caractère monodimensionnel de la solution (nous ne le montrons que pour un schéma (SpS) (Fig. 9.3.1)), nous sommes ramenés au cas étudié par T. Colin, C. Galusinski et H. Kaper dans [23].

Nous considérons l'évolution de l'énergie au cours du temps pour les trois schémas (Fig. 9.3.2) :



$t = 0$: Donnée initiale 1D pour H_3

$t = 10$: H_3 est toujours 1D

FIG. 9.3.1: Conservation du caractère monodimensionnel pour SpS.

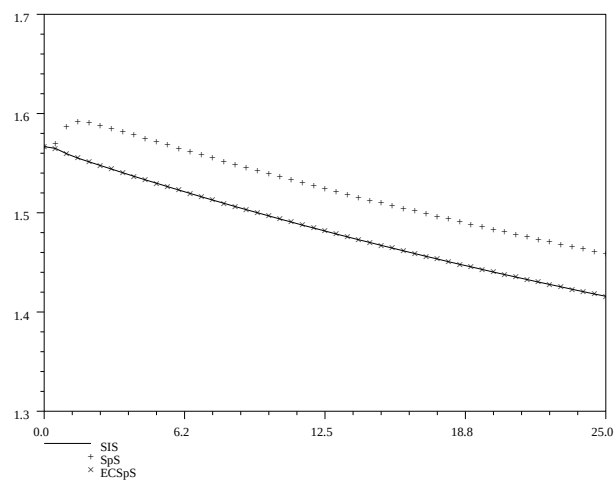


FIG. 9.3.2: Evolution de l'énergie au cours du temps jusqu'à $\frac{T}{4\varepsilon^2}$.

Nous obtenons le même type de comportement pour les trois schémas. Les schémas SIS et ECSpS vérifiant théoriquement des estimations d'énergie (respectivement (9.2.1) et (9.2.5)), nous regardons à quel point elles sont vérifiées numériquement (Fig. 9.3.3).

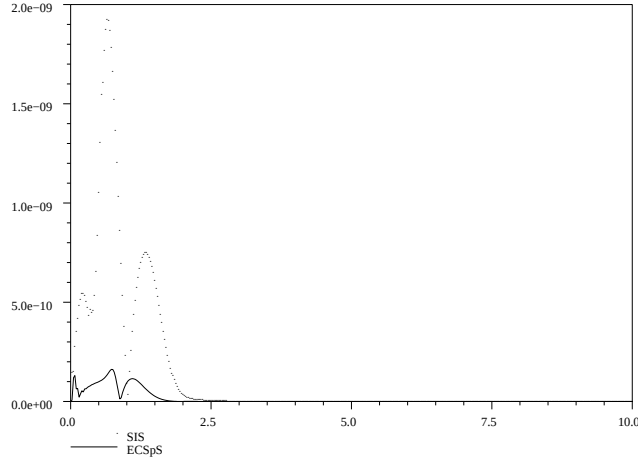


FIG. 9.3.3: Evolution de l'erreur numérique sur la loi de conservation jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon}$.

Même si le schéma SpS ne satisfait pas le même type d'estimation d'énergie que ECSpS et SIS, nous observons une décroissance de l'énergie au même taux que les deux autres. Plus précisément, nous considérons l'évolution en temps de la différence relative entre l'énergie obtenue par les différents schémas (Fig. 9.3.4).

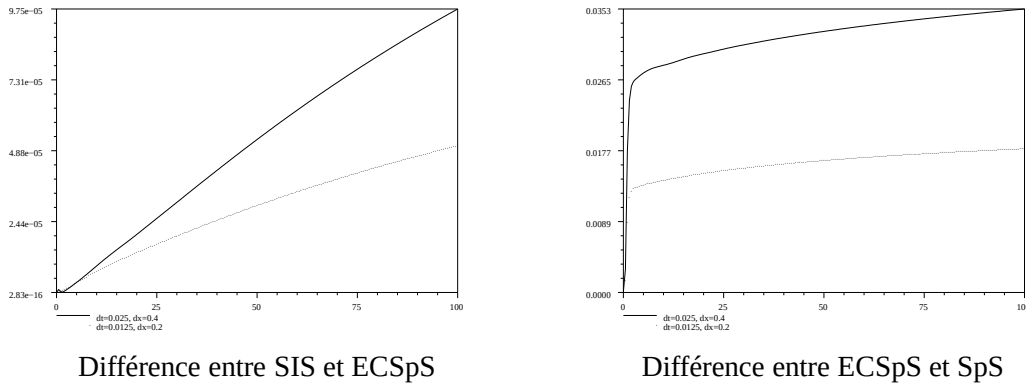


FIG. 9.3.4: Différence relative entre les énergies des schémas 1D jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon^2}$.

Nous observons donc de la convergence numérique pour les trois schémas lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro. Comme nous considérons des ondes, nous montrons maintenant une composante du champ magnétique à des temps différents (Figure 9.3.5) et nous observons que la propagation des données s'effectue à la même vitesse pour les trois schémas.

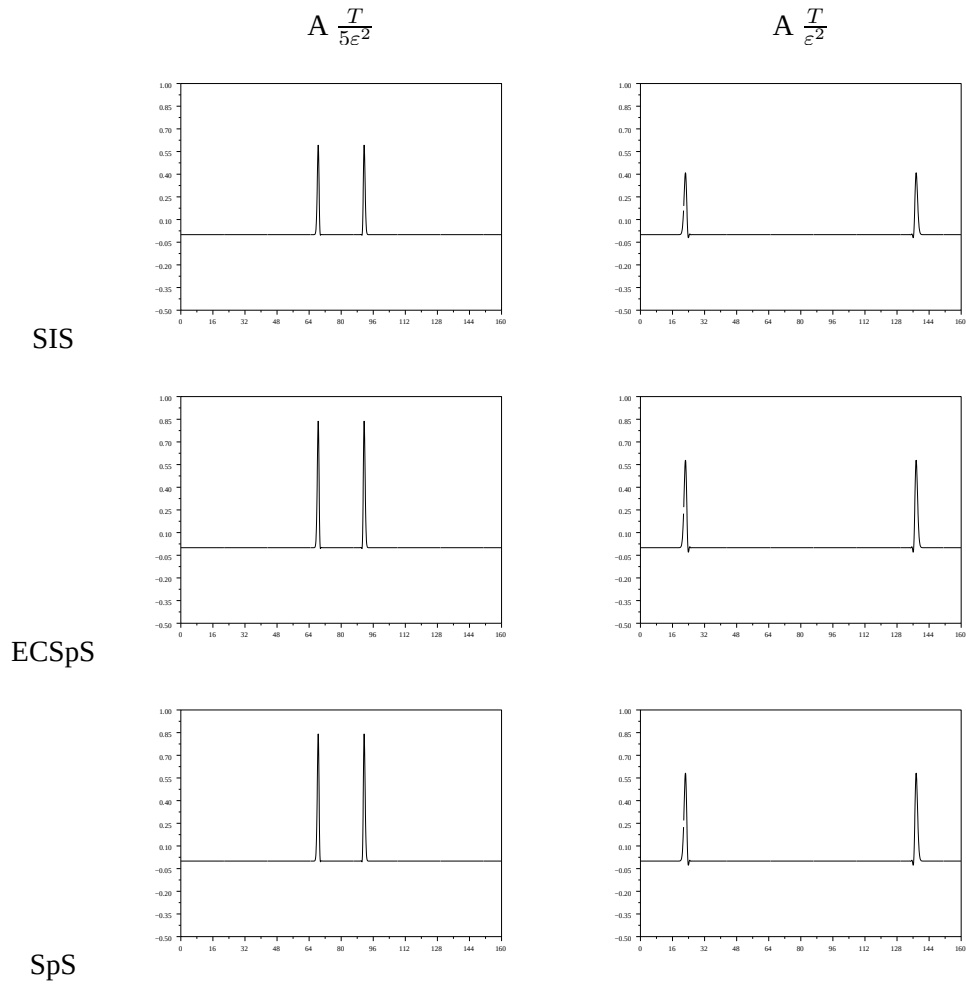


FIG. 9.3.5: M_3 à divers temps pour SIS, ECSpS et SpS.

9.3.1.2 Comparaison entre les schémas 2D

Tout d'abord, considérons une petite perturbation transverse d'une solution monodimensionnelle :

$$\begin{aligned} M(0, x, y) &= e^{-4X^2} (1 + \varepsilon e^{-4Y^2}) M_0^0, \\ H(0, x, y) &= e^{-4X^2} (1 + \varepsilon e^{-4Y^2}) H_0^0, \\ E(0, x, y) &= e^{-4X^2} (1 + \varepsilon e^{-4Y^2}) E_0^0. \end{aligned}$$

Pour observer les effets de cette petite perturbation, nous affichons la différence entre la solution ainsi obtenue et celle obtenue à partir de la donnée initiale 1D non perturbée (Figure 9.3.6). Nous observons un comportement bidimensionnel de cette perturbation.

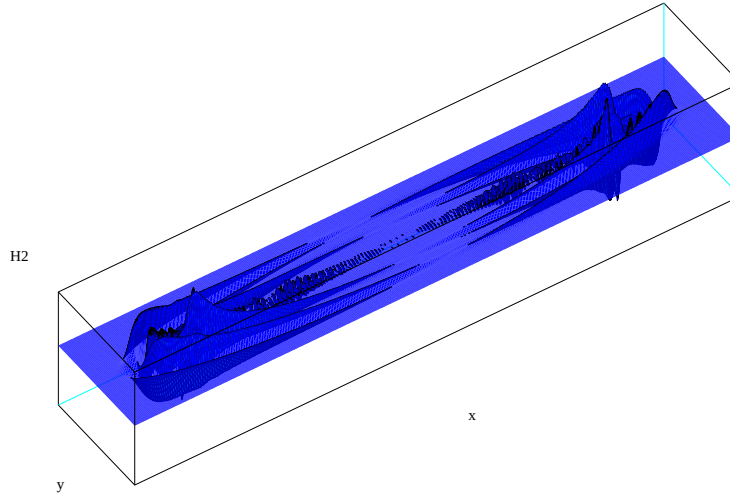


FIG. 9.3.6: Perturbation du cas 1D pour H_2 à $\frac{T}{\varepsilon^2}$ (SpS).

Nous comparons maintenant les trois schémas dans le cas 2D. Comme les schémas SIS et ECSpS demandent beaucoup plus de calculs que SpS, nous réduisons l'intervalle de temps sur lequel nous les comparerons. Cela nous permet, par la même occasion de réduire le domaine d'espace sur lequel nous les étudions, puisque les solutions se propagent à vitesse finie.

Comme dans le cas monodimensionnel, nous vérifions que l'énergie décroît conformément aux estimations obtenues pour SIS et ECSpS (Figure 9.3.7).

Comme nous avons prouvé que les schémas SIS et ECSpS satisfont respectivement les lois de conservation (9.2.1) et (9.2.5), nous vérifions ces résultats en regardant l'erreur numérique effectuée sur ces lois (Fig. 9.3.8).

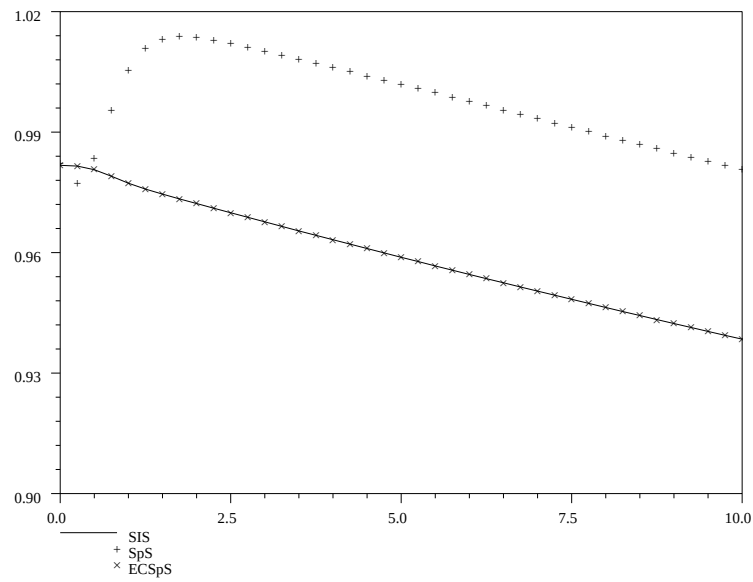


FIG. 9.3.7: Evolution temporelle de l'énergie jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon}$.

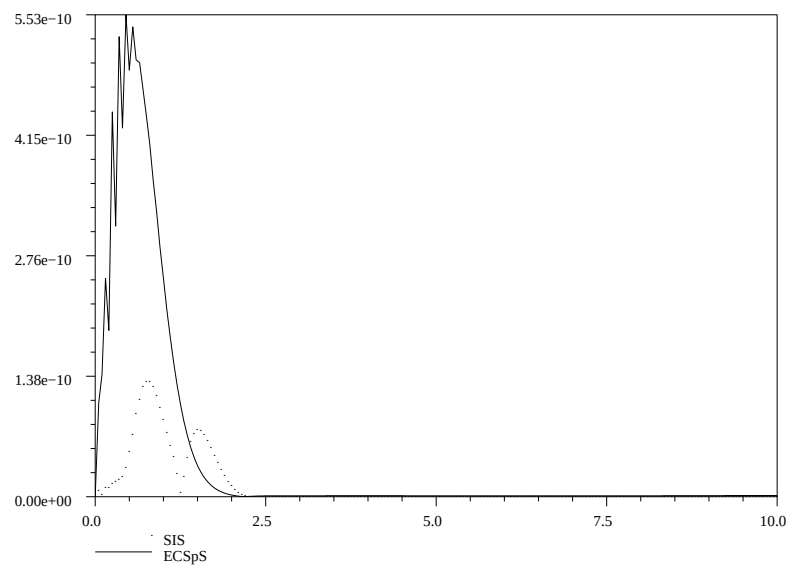


FIG. 9.3.8: Evolution temporelle de l'erreur numérique sur la loi de conservation jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon}$.

Nous observons maintenant l'évolution en temps de la différence relative entre les énergies (Figure 9.3.9).

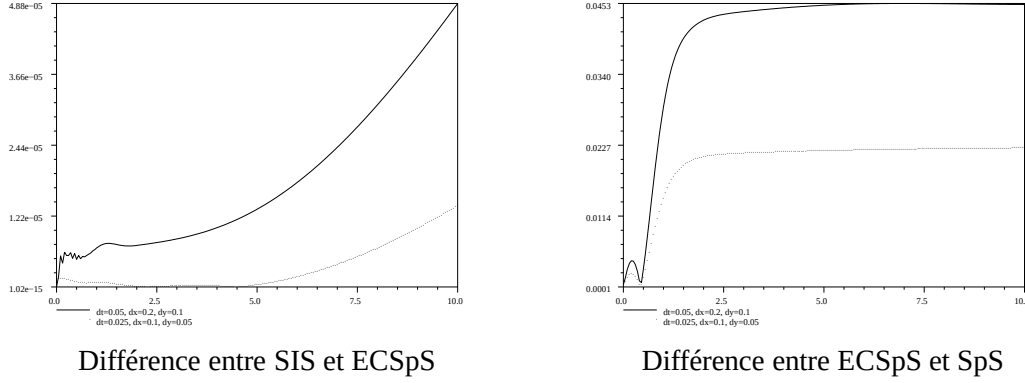


FIG. 9.3.9: Différence relative entre les énergies des schémas 2D jusqu'à $\frac{T}{\varepsilon}$.

Comme la figure 9.3.9 le suggère, les trois schémas donnent des résultats consistants. Nous comparons maintenant visuellement les solutions obtenues à $\frac{T}{\varepsilon}$ (Fig. 9.3.10).

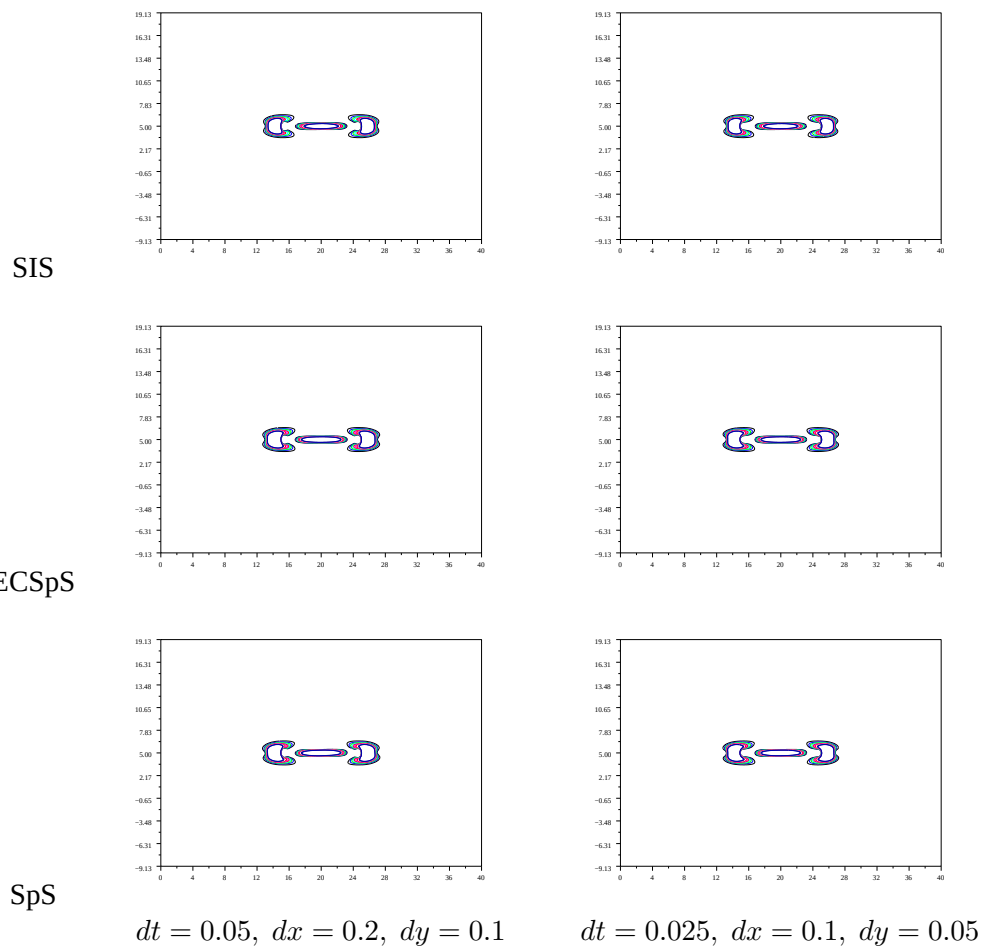
Comme dans le cas monodimensionnel, nous observons que les pics apparaissent aux mêmes endroits et donc que les informations se propagent bien à la même vitesse.

Les trois schémas donnent donc des résultats comparables. Même si nous n'avons pas de résultats théoriques de stabilité sur le schéma SpS, il est numériquement stable et converge vers la solution donnée par SIS et ECSpS quand les pas de discrétisation tendent vers zéro. Comme il est beaucoup plus efficace en terme de complexité et de temps de calculs, nous l'utiliserons dans la suite.

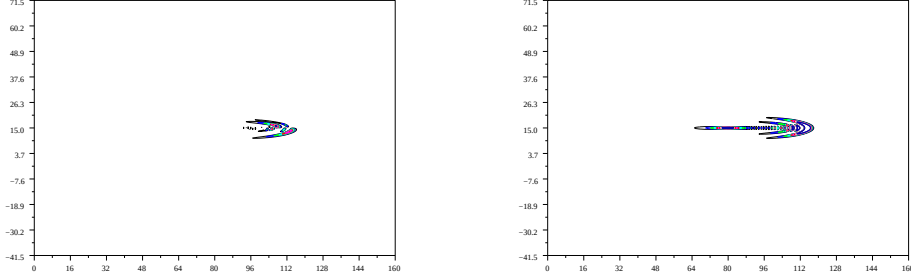
9.3.2 Vitesses et influence de φ

Au chapitre 8, nous montrons que la solution se décompose en cinq ondes progressives ou stationnaires. Les vecteurs propres (M_0^i, H_0^i, E_0^i) associés aux vitesses non nulles $v_i, i = \pm 1, \pm 2$ sont :

$$\begin{aligned}
 M_0^{\pm 1} &= \pm \alpha k \wedge M_0, & M_0^{\pm 2} &= \mp \alpha \cos \varphi M_0 \wedge (k \wedge M_0), \\
 H_0^{\pm 1} &= \pm k \wedge M_0, & H_0^{\pm 2} &= \mp (\alpha \cos \varphi M_0 \wedge (k \wedge M_0) - (1 + \alpha) \sin^2 \varphi M_0), \\
 E_0^{\pm 1} &= \sqrt{1 + \alpha} k \wedge (k \wedge M_0), & E_0^{\pm 2} &= \sqrt{1 + \alpha} \sqrt{1 + \alpha \sin^2 \varphi} k \wedge M_0.
 \end{aligned}$$

FIG. 9.3.10: M_3 à $\frac{T}{\varepsilon}$.

Pour mettre en évidence les différentes vitesses, nous utilisons SpS avec les données initiales M_0^i , H_0^i et E_0^i , $i = 1, 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (Fig. 9.3.11).



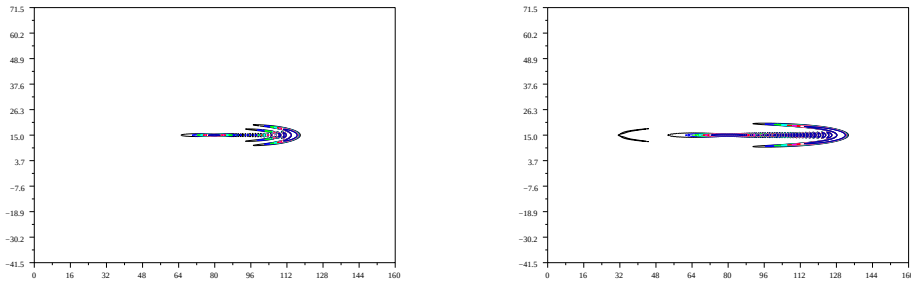
$$v_1 = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_2 = \left(\frac{1 + \alpha \sin^2 \varphi}{1 + \alpha} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

FIG. 9.3.11: E_3 à $\frac{T}{2\varepsilon^2}$.

Nous retrouvons effectivement la différence de vitesse : la donnée initiale étant placée au centre, nous tombons bien sur un rapport proche de $\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 1.225$. Nous observons aussi, de même que sur les autres courbes, la diffraction (dans la direction transverse) de la perturbation, et ceci conformément à l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya régissant le profil principal.

Comme la vitesse $v_{\pm 2}$ dépend de φ , nous montrons le comportement de M_3 pour la donnée initiale M_0^2 , H_0^2 et E_0^2 quand $\varphi = \pi/6$ et $\varphi = \pi/2$ (Fig. 9.3.12).



$$\varphi = \frac{\pi}{6}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, v_2 = 1$$

FIG. 9.3.12: E_3 à $\frac{T}{2\varepsilon^2}$.

Dans le cas présent, nous vérifions aussi que le schéma numérique est bien en accord avec les équations que nous avons trouvées pour le profil. Nous retrouvons effectivement les vitesses de propagation attendues.

Chapitre 10

Conclusion et perspectives

Au cours de cette étude, nous avons retrouvé les développements effectués par H. Leblond et M. Manna, retrouvant en particulier les conditions qu'ils avaient énoncées pour que les phénomènes se produisent, à savoir les conditions sur les directions de propagation et de perturbation. Ce faisant, nous avons aussi prouvé l'existence d'une solution à l'équation satisfaite par le profil principal (équation de Khokhlov-Zabolotskaya) et justifié le développement asymptotique obtenu en temps long.

Les simulations numériques permettent de comparer trois schémas : deux d'entre eux satisfont des estimations d'énergie similaires à celles du problème continu, le troisième schéma les sacrifiant pour un peu plus d'efficacité. Ils donnent néanmoins des résultats comparables et permettent de retrouver ou d'observer certains comportements des équations, que ce soit dans le cas mono- ou bidimensionnel. Une amélioration possible consisterait à reprendre l'étude numérique réalisée par S. Labbé dans sa thèse [34] et à l'adapter au cas que nous considérons.

Chapitre 11

Annexe

11.1 Invariance dans l'épaisseur de la couche mince

Lemme 11.1.1 (Gronwall uniforme)

voir [54]

Soient g_1 et g_2 deux fonctions positives de $\mathbb{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ qui satisfont :

$$\exists k_1, \forall t \in \mathbb{R}^+, \int_t^{t+1} g_1(s) ds \leq k_1,$$

$$\exists k_2, \forall t \in \mathbb{R}^+, \int_t^{t+1} g_2(s) ds \leq k_2.$$

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que :

1. $y'(t) \leq g_1(t) + g_2(t)y(t),$
2. $\forall t \leq 0, \int_t^{t+1} y(s) ds \leq k_3,$

Nous avons alors :

$$\forall t > 1, y(t) \leq (k_1 + k_3)e^{k_2}.$$

Soient $I_1 = (-1, 1)$ et $\Gamma = (0, 1)^2$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ périodique.

Théorème 11.1.1

Soit U_0^0 tel que $|U_0^0| \equiv 1$ et $U_0^0 \in \mathbb{W}^{m,\infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{2k}(I_1)$ avec $m \geq 7$, il existe alors une unique solution à (11.1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^0}{\partial t} - \partial_z^2 U^0 = |\partial_z U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ U_z^0 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \partial I_1, \\ H^0 = -(U^0 \cdot e_3)e_3 \text{ dans } \Gamma \times I_1, \\ U^0(0) = U_0^0 \text{ dans } \Gamma \times I_1, \end{array} \right. \quad (11.1.1)$$

telle que $|U^0| = 1$ et $U^0 \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathbb{W}^{i,\infty}(\mathbb{R}^+; \mathbb{W}^{m,\infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{2i+2}(I_1))$ dès que U_z^0 est suffisamment petit. De plus, si $\partial_z U_0^0 = 0$, alors $\partial_z U^0 = 0$ pour tout t .

Preuve. L'existence, l'unicité et la régularité de U^0 a été prouvée par G. Carbou et P. Fabrie dans les cas bi- et tri-dimensionnels [17]. La preuve que nous donnons dans le cas monodimensionnel suit le même schéma. Nous aurons par contre besoin de plus de régularité en z et en $\sigma \in \Gamma$. Nous nous intéressons ici à l'existence globale de U^0 .

Pour l'instant $\sigma \in \Gamma$ est considéré comme un paramètre uniquement. Nous notons V_n l'espace de dimension fini bâti à partir des n premières fonctions propres de l'opérateur $I - \partial_z^2$ de domaine

$$D(A) = \{u \in \mathbb{H}^2(I_1), \partial_z u = 0 \text{ sur } \{\pm 1\}\},$$

et par P_n la projection orthogonale de $\mathbb{L}^2(I_1)$ sur V_n .

Nous recherchons une solution $u^n \in V_n$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n}{\partial t} - \partial_z^2 u^n - P_n \left[|\partial_z u^n|^2 u^n + u^n \wedge (\partial_z^2 u^n + H(u^n)) - u^n \wedge (u^n \wedge H(u^n)) \right] = 0, \\ u^n(0) = P_n(u_0), \end{cases} \quad (11.1.2)$$

où $H(u^n) = -(u^n \cdot e_3) e_3$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne alors l'existence d'une unique solution à (11.1.2) définie sur $[0, T_n[$.

Nous effectuons maintenant quelques estimations d'énergie sur $u = u^n$.

Estimation $\mathbb{L}^2$: en prenant le produit scalaire par u dans $\mathbb{L}^2(I_1)$, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|u\|_{\mathbb{L}^\infty}^2 \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

Estimation $\mathbb{H}^1$: nous prenons le produit scalaire par $\partial_z^2 u$ dans $\mathbb{L}^2(I_1)$ et nous intégrons par parties pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^4}^2 \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} + (1 + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty}) \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\leq C \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{3}{2}} \|\partial_z u\|_{\mathbb{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} + (1 + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty}) \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Estimation $\mathbb{H}^2$: en prenant le produit scalaire par $\partial_z^4 u$ et en intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z^3 u\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \|\partial_z^3 u\|_{\mathbb{L}^2} \left[\|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^6}^3 + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2} + C \|u\|_{\mathbb{L}^\infty}^2 \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2} \right] \\ &\leq \|\partial_z^3 u\|_{\mathbb{L}^2} \left[C \|\partial_z u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \|\partial_z u\|_{\mathbb{H}^1} + C \|u\|_{\mathbb{H}^1} \|\partial_z u\|_{\mathbb{H}^1} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} \right. \\ &\quad \left. + C \|\partial_z u\|_{\mathbb{H}^1} \|\partial_z^2 u\|_{\mathbb{L}^2} + C \|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 + C \|u\|_{\mathbb{H}^1}^3 \right]. \end{aligned}$$

Nous prenons maintenant en compte le paramètre $\sigma \in \Gamma$: nous sommons les inégalités précédentes et nous effectuons des estimations $\mathbb{L}^\infty$ en σ :

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)}^2 + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^3(I_1)}^2 \leq C \left(1 + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1)}^6 \right).$$

Des résultats de comparaison classique nous donnent alors l'existence d'un temps T^* et d'une constante C , tous deux indépendants de n tels que :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(0, T^*; \mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))} \leq C,$$

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(0, T^*; \mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^3(I_1))} \leq C.$$

Régularité en σ : Comme nous avons besoin de plus de régularité en $\sigma \in \Gamma$, nous dérivons l'équation (11.1.2) en σ et nous effectuons les mêmes estimations. Pour tout $k \leq m$, nous obtenons une équation linéaire en $\nabla_\sigma^k u$ sur laquelle nous effectuons des estimations dans $\mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^l(I_1)$, $l = 0, 1, 2$, grâce aux estimations précédentes. Nous obtenons finalement l'existence d'une constante C indépendante de n telle que :

$$\|u^n\|_{\mathbb{L}^\infty(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))} \leq C,$$

$$\|\partial_z u^n\|_{\mathbb{L}^2(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))} \leq C,$$

Régularité en temps : nous prenons les dérivées en temps de (11.1.2) et nous effectuons le même type d'estimation. Nous obtenons que $\frac{\partial u^n}{\partial t}$ and $\frac{\partial \partial_z u^n}{\partial t}$ sont bornées indépendamment de n respectivement dans $\mathbb{L}^\infty(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$ et $\mathbb{L}^2(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$. Nous procédons de même avec les dérivées successives en temps. Nous sommes limités par la régularité de la donnée initiale, et nous obtenons que $\frac{\partial^i u^n}{\partial t^i}$ et $\frac{\partial^i \partial_z u^n}{\partial t^i}$ sont bornées respectivement dans $\mathbb{L}^\infty(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$ et $\mathbb{L}^2(0, T^*; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$ pour $i < k$.

Passage à la limite quand n tend vers $+\infty$: grâce aux estimations précédentes, nous obtenons l'existence d'une sous-suite u_{n_k} et d'une fonction U^0 telle que, pour tout $T < T^*$, et $i < k$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{n_k} \rightharpoonup U^0 & \text{dans } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \times \mathbb{H}^2(I_1)) \quad \text{faible } \star, \\ \partial_z u_{n_k} \rightharpoonup \partial_z U^0 & \text{dans } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \times \mathbb{H}^2(I_1)) \quad \text{faible}, \\ \frac{\partial^i u_{n_k}}{\partial t^i} \rightharpoonup \frac{\partial^i U^0}{\partial t^i} & \text{in } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \times \mathbb{H}^2(I_1)) \quad \text{faible } \star \\ \frac{\partial^i \partial_z u_{n_k}}{\partial t^i} \rightharpoonup \frac{\partial^i \partial_z U^0}{\partial t^i} & \text{dans } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \times \mathbb{H}^2(I_1)) \quad \text{faible}, \end{array} \right.$$

et d'après le lemme d'Aubin, nous avons, pour $i < k$,

$$u_{n_k} \rightarrow U^0 \text{ dans } \mathbb{H}^i(0, T; \mathbb{W}^{m, \infty}(\Gamma) \times \mathbb{H}^2(I_1)) \text{ fort.}$$

En passant à la limite dans (11.1.2), nous obtenons que U^0 satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^0}{\partial t} - \partial_z^2 U^0 = |\partial_z U^0|^2 U^0 + U^0 \wedge (\partial_z^2 U^0 + H(U^0)) - U^0 \wedge (U^0 \wedge H(U^0)) \text{ sur } [0, T^*] \times \Gamma \times I_1, \\ \partial_z U^0 = 0 \text{ sur } [0, T^*] \times \Gamma \times \{\pm 1\}, \\ U^0(0) = U_0^0. \end{array} \right.$$

Conservation de la norme ponctuelle : Comme U^0 est suffisamment régulier, nous prenons le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par U^0 et nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |U^0|^2 - (U^0 \cdot \partial_z^2 U^0) - |\partial_z U^0|^2 |U^0|^2 = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Gamma \times I_1. \quad (11.1.3)$$

Comme U^0 appartient $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^\infty(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^2(I_1))$, nous avons :

$$\partial_z^2 (|U^0|^2) = 2(U^0 \cdot \partial_z^2 U^0) + 2|\partial_z U^0|^2,$$

L'équation (11.1.3) devient alors :

$$\frac{d}{dt}|U^0|^2 - \partial_z^2|U^0|^2 - 2|\partial_z U^0|^2 (|U^0|^2 - 1) = 0.$$

En notant $b = |U^0|^2 - 1$, nous obtenons que b vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \partial_z^2 b - 2|\partial_z U^0|^2 b = 0, \\ \partial_z b = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{\pm 1\}, \\ b(0) = |U^0|^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (11.1.4)$$

Comme $|\partial_z U^0|^2$ appartient à $L^1(0, T; \mathbb{L}^\infty(\Gamma \times I_1))$ (car $\mathbb{H}^1(I_1)$ s'injecte dans $\mathbb{L}^\infty(I_1)$), des estimations d'énergie sur (11.1.4) donnent :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|b\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z b\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 2 \|\partial_z U^0\|_{\mathbb{L}^\infty}^2 \|b\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

et nous obtenons que $\|b\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0$ grâce au lemme de Gronwall.

Nous avons donc prouvé que $|U^0| = 1$ dans $[0, T] \times \Gamma \times I_1$, dès que $|U_0^0| = 1$ dans $\Gamma \times I_1$.

Estimations $\mathbb{H}^k$: pour obtenir plus de régularité en z , nous observons que :

$$\partial_z^2 U^0 + U^0 \wedge \partial_z^2 U^0 = \frac{\partial U^0}{\partial t} - |\partial_z U^0|^2 U^0 - U^0 \wedge H^0 + U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0).$$

L'opérateur $I + (U^0 \wedge \cdot)$ étant inversible d'inverse $I - \frac{1}{2}(U^0 \wedge \cdot) + \frac{1}{2}U^0 \wedge (U^0 \wedge \cdot)$, nous en déduisons de proche en proche que pour tout $T < T^*$:

$$U^0 \in \bigcap_{i=0}^{k-1} W^{i,\infty}(0, T; \mathbb{W}^{m,\infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{2i+2}(I_1)).$$

Si U_0^0 est indépendant de z : nous effectuons une estimation $\mathbb{L}^2$ sur $\partial_z U^0$, en utilisant que $(U^0 \cdot \partial_z^2 U^0 = -|\partial_z U^0|^2 :$

$$\frac{1}{2} \|\partial_z U^0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z^2 U^0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \int_{I_1} |\partial_z U^0|^4 \partial_z + (1 + \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty}) \|\partial_z U^0\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

De même que pour la conservation de la norme ponctuelle, nous utilisons que $|\partial_z U^0|^2 \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{L}^\infty(\Gamma \times I_1))$ et le lemme de Gronwall montre que $\partial_z U^0 = 0$ pour tout $t < T^*$. La fonction U^0 satisfait alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^0}{\partial t} = U^0 \wedge H^0 - U^0 \wedge (U^0 \wedge H^0) & \text{dans } \Gamma \times I_1, \\ U^0(0) = U_0^0 & \text{dans } \Gamma \times I_1. \end{cases} \quad (11.1.5)$$

Estimation du temps d'existence T^* : Soit $\bar{U}^0$ l'unique solution de (11.1.5) avec la donnée initiale $\bar{U}_0^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U_0^0(x, z) dz$ et soit $\widetilde{U}^0 = U^0 - \bar{u}^0$. Nous supposons que $\widetilde{U}^0 = \mathcal{O}(\delta)$ et nous posons $\widetilde{U}^0 = \delta w$. Nous

effectuons maintenant de nouvelles estimations sur $\partial_z U_z^0 = \delta \partial_z w$ ($\sigma \in \Gamma$ étant uniquement un paramètre). Comme $\partial_z w = 0$ en $\{\pm 1\}$ nous pouvons appliquer le lemme de Poincaré à $\partial_z w$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \delta \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^4}^2 \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2} + (1 + \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty}) \|U^0\|_{\mathbb{L}^6} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^6}^2 \\ &\leq C\delta \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{3}{2}} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{3}{2}} + C' \|U^0\|_{\mathbb{L}^2}^{2/3} \|\partial_z U^0\|_{\mathbb{L}^2}^{1/3} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^{4/3} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^{2/3} \\ &\leq C_1 \delta \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^2 + C_2 \delta^{1/3} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^{1/3} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^2, \end{aligned}$$

Tant que $\delta \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2} \leq \min\left(\frac{1}{4C_1}, \frac{1}{64C_2^3}\right)$, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \alpha \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 0,$$

Donc $\|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|(\partial_z w)_{t=0}\|_{\mathbb{L}^2} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \leq \|(\partial_z w)_{t=0}\|_{\mathbb{L}^2}$ pour tout $t < T^*$. L'estimation précédente donne aussi que $\partial_z^2 w \in \mathbb{L}^2(0, T^*; \mathbb{L}^2(I_1))$. Il nous reste à effectuer les estimations d'énergie sur $\partial_z^2 w$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\partial_z^3 w\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \|\partial_z^3 w\|_{\mathbb{L}^2} \left[\|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^6}^3 + 2 \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^4} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^4} \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty}) \|U^0\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2} \right] \\ &\leq \|\partial_z^3 w\|_{\mathbb{L}^2} \left[C \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^2 \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2} + C \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2}^{3/4} \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2} \|\partial_z^3 w\|_{\mathbb{L}^2}^{1/4} \right. \\ &\quad \left. + C \|\partial_z w\|_{\mathbb{L}^2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_z^3 w\|_{\mathbb{L}^2}^2 + C + C \|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}^{8/3}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 11.1.1, nous obtenons que $\|\partial_z^2 w\|_{\mathbb{L}^2}$ est borné uniformément pour tout $t < T^*$. En prenant en compte le paramètre σ , nous obtenons le même type d'estimations sur w . Nous avons finalement l'existence d'un temps $T^* = +\infty$ tel que pour tout $T < T^* = +\infty$,

$$U^0 \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathbb{W}^{i,\infty}(0, T; \mathbb{W}^{m,\infty}(\Gamma) \otimes \mathbb{H}^{2i+2}(I_1))$$

dès que $\partial_z U^0$ est suffisamment petit. ■

11.2 Expression de F^ε au chapitre 3

En reprenant les notations du chapitre 3, nous posons, dans ω_ε :

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(t, x) &= U^1\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 U^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \\ c^\varepsilon(t, x) &= U^2\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon U^3\left(t, P(x), \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

L'expression, particulièrement horrible, de F^ε est alors :

$$\begin{aligned}
F^\varepsilon = & \varepsilon \left[-2\varepsilon |\partial_z b^\varepsilon|^2 U^3 + \varepsilon^2 |\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + |\partial_z c^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + a_2 \partial_z b^\varepsilon - 4\varepsilon (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) b^\varepsilon \right. \\
& + 2\varepsilon^{-1} (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) a^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon) c^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon) b^\varepsilon + |\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon|^2 c^\varepsilon \\
& + \varepsilon^2 |\partial_z c^\varepsilon|^2 c^\varepsilon + \varepsilon^2 |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon|^2 c^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) c^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon^3 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) b^\varepsilon - 4\varepsilon^3 |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon|^2 b^\varepsilon + 2(\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z U^2) a^\varepsilon \\
& + 2(\partial_z U^3 \cdot \partial_z a^\varepsilon) b^\varepsilon + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z b^\varepsilon) U^3 + |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon|^2 a^\varepsilon \\
& + \varepsilon^4 |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) a^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^3 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon^3 (\nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon |\partial_z c^\varepsilon|^2 b^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^3 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2(\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) c^\varepsilon - 2\varepsilon^3 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon^4 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon^3 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) c^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^3 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) c^\varepsilon - 2\varepsilon^2 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) a^\varepsilon + 3\varepsilon^2 |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon|^2 a^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon^2 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) c^\varepsilon) a^\varepsilon - 2\varepsilon |(\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon|^2 b^\varepsilon + 2\varepsilon ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) c^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) c^\varepsilon - 2((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) b^\varepsilon + 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) b^\varepsilon + 6\varepsilon^2 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon^2 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon^2 ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& + 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) b^\varepsilon - 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) b^\varepsilon + 2\varepsilon ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) a^\varepsilon - 4\varepsilon ((\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& + |\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon|^2 a^\varepsilon + 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon) a^\varepsilon - 2\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) a^\varepsilon - 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla^r b^\varepsilon) a^\varepsilon - 2(\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot \nabla^r a^\varepsilon) a^\varepsilon \\
& + 2(\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2(\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) a^\varepsilon - 2\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot \nabla_{\Gamma_z} c^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& + 6\varepsilon^2 (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) b^\varepsilon - 4\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} a^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) b^\varepsilon - 4\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) a^\varepsilon) b^\varepsilon \\
& - 4\varepsilon (\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon \cdot (\nabla_{\Gamma_{0,1}} + \nabla^r) b^\varepsilon) a^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) c^\varepsilon - 2\varepsilon |\nabla_{\Gamma_z} b^\varepsilon|^2 b^\varepsilon + |\partial_z b^\varepsilon|^2 c^\varepsilon \\
& + 2\varepsilon^2 (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) U^3 + 2(\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) b^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z c^\varepsilon \cdot \partial_z a^\varepsilon) c^\varepsilon - 2\varepsilon (\partial_z a^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) U^3 - 4\varepsilon (\partial_z b^\varepsilon \cdot \partial_z c^\varepsilon) c^\varepsilon \\
& - 2\varepsilon (\partial_z c^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) a^\varepsilon + 2\varepsilon^2 (\partial_z c^\varepsilon \cdot \partial_z U^3) b^\varepsilon \\
& + b^\varepsilon \wedge \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z U^3) + U^3 \wedge \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z b^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \Delta^r a^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z c^\varepsilon) + a^r \partial_z a^\varepsilon + a_1 b^\varepsilon \wedge \partial_z b^\varepsilon \\
& - \varepsilon^2 a_2 b^\varepsilon \wedge \partial_z b^\varepsilon + a_2 b^\varepsilon \wedge \partial_z a^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a^\varepsilon \wedge \Delta^r a^\varepsilon + a_2 a^\varepsilon \wedge \partial_z b^\varepsilon - \varepsilon a_0 U^3 \wedge \partial_z U^1 - \varepsilon^4 a^r U^3 \wedge \partial_z U^1 \\
& - \varepsilon^2 a_1 c^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon^4 a^r c^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon^2 a_1 U^3 \wedge \partial_z U^1 - \varepsilon^3 a_2 c^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon^4 a_3 c^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon + a_1 c^\varepsilon \wedge \partial_z a^\varepsilon \\
& + a_3 a^\varepsilon \wedge \partial_z a^\varepsilon + a_0 a^\varepsilon \wedge \partial_z U^3 + a_0 \partial_z U^3 + \Delta_{\Gamma_z} c^\varepsilon + \Delta_{\Gamma_{0,1}} b^\varepsilon - \varepsilon (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) c^\varepsilon + a^r a^\varepsilon \wedge \partial_z a^\varepsilon \\
& + a_3 \partial_z a^\varepsilon + a_0 U^3 \wedge \partial_z a^\varepsilon - \varepsilon^3 a_2 U^3 \wedge \partial_z U^1 - \varepsilon^3 a_3 U^3 \wedge \partial_z U^1 - 2\varepsilon b^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) b^\varepsilon \\
& - a^\varepsilon \wedge \Delta^r b^\varepsilon + b^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) a^\varepsilon - b^\varepsilon \wedge \Delta^r a^\varepsilon - \varepsilon a^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) c^\varepsilon + \varepsilon^2 b^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) c^\varepsilon \\
& - \varepsilon c^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) a^\varepsilon + \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) b^\varepsilon + a^\varepsilon \wedge \Delta_{\Gamma_z} c^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon \wedge \Delta_{\Gamma_z} c^\varepsilon + c^\varepsilon \wedge \Delta_{\Gamma_z} a^\varepsilon \\
& - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \Delta_{\Gamma_z} b^\varepsilon + a_1 a^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - a_1 b^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon a_1 c^\varepsilon \wedge \partial_z b^\varepsilon + b^\varepsilon \wedge \Delta_{\Gamma_z} b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon \wedge \Delta^r b^\varepsilon - \varepsilon c^\varepsilon \wedge \partial_z^2 U^3 \\
& - \varepsilon U^3 \wedge \frac{1}{\gamma_z} \partial_z (\gamma_z \partial_z c^\varepsilon) + a_2 \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon a_0 b^\varepsilon \wedge \partial_z U^3 + a_0 b^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon - \varepsilon a_0 U^3 \wedge \partial_z b^\varepsilon + a_0 c^\varepsilon \wedge \partial_z b^\varepsilon \\
& + a^\varepsilon \wedge (\Delta_{\Gamma_{0,1}} + \Delta^r) b^\varepsilon - 2\varepsilon a_0 c^\varepsilon \wedge \partial_z c^\varepsilon + U^3 \wedge H^1 + b^\varepsilon \wedge H^3 + c^\varepsilon \wedge H^2 - U^3 \wedge (a^\varepsilon \wedge H^1) \\
& - a^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) - \varepsilon^4 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) + \varepsilon^3 b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^3) - b^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^3) \\
& - b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge K^\varepsilon) - \varepsilon^4 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) + \varepsilon U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + \varepsilon^3 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) \\
& - a^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) + \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^3) - c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge K^\varepsilon) + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^3) - \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) \\
& - \varepsilon^3 c^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) - c^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge H^2) + 2\varepsilon b^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^1) + \varepsilon^2 \beta^\varepsilon \wedge (U^3 \wedge H^2) - \varepsilon^2 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) \\
& - \varepsilon^3 U^3 \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) + a^\varepsilon (c^\varepsilon \wedge H^2) + 2\varepsilon U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) + \varepsilon^2 U^3 \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon^2 c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) \\
& - b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) + 2\varepsilon c^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^1) - c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^1) - b^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) + \varepsilon b^\varepsilon \wedge (c^\varepsilon \wedge H^2) \\
& \left. + \varepsilon c^\varepsilon \wedge (b^\varepsilon \wedge H^2) \right] + a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon - a^\varepsilon \wedge (a^\varepsilon \wedge S^\varepsilon).
\end{aligned}$$

11.3 Résidus pour le développement asymptotique tronqué (chapitre 7)

$$\begin{aligned}
R_3^\delta &= \partial_t QU_3^\delta + \partial_\tau U_1^\delta + A_1 \partial_x QU_3^\delta + A_2 \partial_y U_2^\delta - 2B(U_0^\delta, QU_3^\delta) - 2B(U_1^\delta, U_2^\delta) - 2T(U_0^\delta, U_0^\delta, U_1^\delta), \\
R_4^\delta &= \partial_t QU_4^\delta + \partial_\tau U_2^\delta + A_1 \partial_x QU_4^\delta + A_2 \partial_y QU_3^\delta - 2B(U_0^\delta, QU_4^\delta) - 2B(U_1^\delta, QU_3^\delta) - B(U_2^\delta, U_2^\delta) \\
&\quad - 3T(U_0^\delta, U_0^\delta, U_2^\delta) - 3T(U_0^\delta, U_1^\delta, U_1^\delta), \\
R_5^\delta &= \partial_\tau QU_3^\delta + A_2 \partial_y QU_4^\delta - 2B(U_1^\delta, QU_4^\delta) - 2B(U_2^\delta, QU_3^\delta) - 3T(U_0^\delta, U_0^\delta, QU_3^\delta) \\
&\quad - 6T(U_0^\delta, U_1^\delta, U_2^\delta) - T(U_1^\delta, U_1^\delta, U_1^\delta), \\
R_6^\delta &= \partial_\tau QU_4^\delta - 2B(U_2^\delta, QU_4^\delta) - B(QU_3^\delta, QU_3^\delta) - 3T(U_0^\delta, U_0^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_0^\delta, U_1^\delta, QU_3^\delta) \\
&\quad - 3T(U_0^\delta, U_2^\delta, U_2^\delta) - 3T(U_1^\delta, U_1^\delta, U_2^\delta), \\
R_7^\delta &= -2B(QU_3^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_0^\delta, U_1^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_0^\delta, U_2^\delta, QU_3^\delta) - 3T(U_1^\delta, U_1^\delta, QU_3^\delta) \\
&\quad - 3T(U_1^\delta, U_2^\delta, U_2^\delta), \\
R_8^\delta &= -B(QU_4^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_0^\delta, U_2^\delta, QU_4^\delta) - 3T(U_1^\delta, U_1^\delta, QU_4^\delta) - 3T(U_0^\delta, QU_3^\delta, QU_3^\delta) \\
&\quad - 6T(U_1^\delta, U_2^\delta, QU_3^\delta) - T(U_2^\delta, U_2^\delta, U_2^\delta), \\
R_9^\delta &= -6T(U_0^\delta, QU_3^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_1^\delta, U_2^\delta, QU_4^\delta) - 3T(U_1^\delta, QU_3^\delta, QU_3^\delta) - 3T(U_2^\delta, U_2^\delta, QU_3^\delta), \\
R_{10}^\delta &= -3T(U_0^\delta, QU_4^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_1^\delta, QU_3^\delta, QU_4^\delta) - 3T(U_2^\delta, U_2^\delta, QU_4^\delta) - 3T(U_2^\delta, QU_3^\delta, QU_3^\delta), \\
R_{11}^\delta &= -3T(U_1^\delta, QU_4^\delta, QU_4^\delta) - 6T(U_2^\delta, QU_3^\delta, QU_4^\delta) - T(QU_3^\delta, QU_3^\delta, QU_3^\delta), \\
R_{12}^\delta &= -3T(U_2^\delta, QU_4^\delta, QU_4^\delta) - 3T(QU_3^\delta, QU_3^\delta, QU_4^\delta), \\
R_{13}^\delta &= -3T(QU_3^\delta, QU_4^\delta, QU_4^\delta), \\
R_{14}^\delta &= -T(QU_4^\delta, QU_4^\delta, QU_4^\delta).
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis and applications*, Applied Mathematical Sciences 75, Springer Verlag, 1988.
- [2] R.A. Adams, *Sobolev Spaces, Pure and Applied Math.*, Vol 65, Academic press, 1975.
- [3] S. Alinhac, P. Gerard, *Opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs de Nash-Moser*, Savoirs actuels, InterEditions/Editions du CNRS, 1991.
- [4] F. Alouges, S. Labbé, *z-invariant micromagnetic configurations in the thin plates*, rencontres CIRM "modélisation du ferromagnétisme", 2002.
- [5] F. Alouges, T. Rivière, S. Serfaty, *Néel Walls and Cross-tie Walls for micromagnetic materials having a strong planar anisotropy*, COCV (2002), Volume à la mémoire de J.L Lions.
- [6] F. Alouges, A. Soyeur, *On global weak solutions for Landau-Lifschitz equations : existence and nonuniqueness*, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 18(11) :1071-1084, 1992.
- [7] D. Alterman, *Diffraction nonlinear geometric optics for short pulses*, Ph. D. thesis, University of Michigan, 1999.
- [8] W. Ben Youssef, D. Lannes, *The long wave limit for a general class of 2D quasilinear hyperbolic problems*, Commun. Partial Differ. Equations 27, No.5-6, 979-1020 (2002).
- [9] P. Bolley and J. Camus, *Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids*, Publication des séminaires de mathématiques, Rennes, 1968-1969.
- [10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1993.
- [11] W.F. Brown, *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism*, North-Holland, 1962.
- [12] W.F. Brown, *Micromagnetics*, Interscience Publishers, 1963.
- [13] V. Bruneau, G. Carbou, *Spectral asymptotic in the large coupling limit*, Asymptotic Anal. 29(2) (2002), 91-113.
- [14] G. Carbou, *Thin layers in micromagnetism*, M3AS, Vol. 11, No. 9 (2001) 1529-1546.
- [15] G. Carbou, *Penalization method for viscous incompressible flow around a porous thin layer*, en préparation.
- [16] G. Carbou, *Couches limites en ferromagnétisme et en mécanique des fluides*, Thèse d'habilitation, Bordeaux, 2003.
- [17] G. Carbou, P. Fabrie, *Regular Solutions for Landau-Lifschitz Equation in a Bounded domain*, Differential and Integral Equations, 14 (2001), 213-229.
- [18] G. Carbou, P. Fabrie, *Time average in Micromagnetism*, Journal of Differential Equations 147 (1998), 383-409.
- [19] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Commun. Partial Differ. Equations, Vol. 27, No. 7-8 (2002), 1467-1495.
- [20] G. Carbou, P. Fabrie, O. Guès, *On the ferromagnetism equations in the non static case*, à paraître dans "Communications on Pure and Applied Analysis".

- [21] G. Carbou, P. Fabrie, F. Jochmann, *A remark on the weak ω -limit set for Micromagnetism Equation*, Applied Math. Letters **15** (2002), 95-99.
- [22] A. Roy Chowdhury, M. Nasker, *Towards the conservation laws and Lie symmetries for the Khokhlov-Zabolotskaya equation in three dimensions*, J. Phys. A **19**, No 10, 1775-1781 (1986).
- [23] T. Colin, C. Galusinski, H. Kaper, *Waves in ferromagnetic media*, Commun. Partial Differ. Equations **27**, No.7-8, 1625-1658 (2002).
- [24] R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tomes 1, 2 et 3, Coll. du C.E.A., Masson.
- [25] A. DeSimone, R.V. Kohn, S. Müller, F. Otto, *A reduced theory for thin film micromagnetics*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 55, p1408 (2002).
- [26] C. Foias, R. Temam, *Remarque sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 5 (1978), 29-63.
- [27] J. Gibbons, *The Zabolotskaya-Khokhlov equation and the inverse scattering problem of classical mechanics*, Dynamical problems in soliton systems (Kyoto), Springer Ser. Synergetics, 30, 36-41 (1985).
- [28] T.L. Gilbert, *A Lagrangian formulation of gyromagnetic equation of the magnetization field*, Phys. Rev. **100** (1955) 1243.
- [29] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [30] E. Grenier, O. Guès, *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems*, Journal of Differential Equations **143** (1998), 110-146.
- [31] H. Haddar, *Modèle asymptotique en ferromagnétisme : Couches minces et homogénéisation*, Thèse (2000), ENPC.
- [32] J.L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Global solutions to Maxwell equations in ferromagnetic medium*, Ecole Polytechnique, Séminaire EDP, exposé numéro 11, 1996-1997.
- [33] P. Joly, O. Vacus, *Propagation d'ondes en milieu ferromagnétique 1d : existence et unicité de solutions faibles*, Compte rendu de l'Académie des Sciences, 1996.
- [34] S. Labbé, *Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques*, Thèse (1998), Paris XIII.
- [35] O.A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer-Verlag Applied Math. Sciences, Vol. 49, 1985.
- [36] L. Landau and E. Lifshitz, *On the theory of magnetic permeability in ferromagnetic body*, Physik. Z. Soviet Union **8** (1935) 153-169.
- [37] D. Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*, Asymptotic Analysis **18** (1998), 111-146.
- [38] H. Leblond, M. Manna, *Coalescence of electromagnetic travelling waves in a saturated ferrite*, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993), 6451-6468.
- [39] H. Leblond, Communication privée.
- [40] M.N. Le Roux, *Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2*, RAIRO Anal. Numér. **11** (1977), no. 1, 27-60.
- [41] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, 1969.
- [42] J.L. Lions, E. Magenès, *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. 1, Dunod, 1968.
- [43] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.

- [44] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.
- [45] T. Rivière, S. Serfaty, *Limiting domain wall energy for a problem related to micromagnetics*, Commun. Pure Appl. Math., 53(1) :294-338, 2001.
- [46] D. Sanchez, *Boundary layer on a high-conductivity domain*, CPAA, Vol. 1, No. 4 (2002), 547-564.
- [47] D. Sanchez, *Phénomène de couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Ann. Fac. Sci. Toulouse VI. Ser. Math., 9 (2), 2002, 239-261.
- [48] D. Sanchez, *Behaviour of Landau-Lifschitz Equation in a periodic thin layer*, à paraître Asympt. Anal., Préprint MAB 2002.
- [49] D. Sanchez, *Thin layer for Landau-Lifschitz equation*, soumis DIE, Préprint MAB, 2003.
- [50] D. Sanchez, *Long waves in ferromagnetic media, Khokhlov-Zabolotskaya equation*, à paraître JDE, 2004.
- [51] D. Sanchez, *Numerical study of long waves in ferromagnetic media*, en cours.
- [52] D. Sanchez, *Behaviour of the Landau-Lifschitz equation in a ferromagnetic wire*, en cours.
- [53] J. Starynkevitch, *Quelques résultats d'estimation globale pour le système de Maxwell-Landau-Lifschitz*, Preprint MAB, 2003.
- [54] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences 68, Springer Verlag, New-York (1988).
- [55] R. Temam, M. Ziane, *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations, 1(4) ; 499-546.
- [56] B. Texier, *The short wave limit for nonlinear symmetric hyperbolic systems*, à paraître dans *Advances in Differential Equations*.
- [57] A. Thiaville, *Extensions of the geometric solution of the two dimensional coherent magnetization rotation model*, J. Magn. Magn. Mater. **182** (1998), 5-18.
- [58] A. Thiaville, J.M. García, J. Miltat, *Domain wall dynamics in nanowires*, J. Magn. Magn. Mater. **242-245** (2002), 1061-1063.
- [59] A. Thiaville, J. Miltat, J. Ben Youssef, *Dynamics of vertical Bloch lines in bubble garnets : Experiments and theory*, Eur. Phys. J. B **23**, 37-47 (2001).
- [60] A. Thiaville, D. Tomás, J. Miltat, *On corner Singularities in Micromagnetics*, Phys. stat. sol. (a) **170**, 125 (1998).
- [61] M. Tilioua, *Comportement asymptotique de matériaux ferromagnétiques minces avec énergie de surface et/ou couplage d'échanfe inter-couches*, Thèse, Ecole Polytechnique, 2003.
- [62] S. Ukai, *Local solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **36** (1989), 193-209.
- [63] O. Vacus, *Modélisation de la propagation d'ondes en milieu ferromagnétique*, Th. de mathématiques appliquées, Ecole Centrale de Paris, 1997.
- [64] A. Visintin, *On Landau Lifschitz equation for ferromagnetism*, Japan J. Appl. Math., 2(1) :69-84, 1985.
- [65] T.J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publication, 1993.
- [66] K.S. Yee, *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media*, IEEE Trans. Antennas Propag. **14**, 302 (1966), 302-307.
- [67] E.A. Zabolotskaya, R.V. Khokhlov, *Quasi-planes waves in the nonlinear acoustics of confined beams*, Sov. Phys. Acoust **15**, No.1 (1969), 35-40.