UNIFORMISATION LOCALE DES SCHÉMAS QUASI-EXCELLENTS DE CARACTÉRISTIQUE NULLE

par

Jean-Christophe SAN SATURNINO

Résumé. — Nous démontrons un théorème d'uniformisation locale plongée pour une valuation centrée en un point d'un schéma quasi-excellent de caractéristique nulle. La preuve se réduit au cas des valuations de rang 1 et consiste à désingulariser l'idéal formé des éléments de valeur infinie et à monomialiser les polynômes-clés. On démontre alors un théorème de monomialisation valable en toute caractéristique sous certaines conditions, notamment celle de ne pas avoir de polynôme-clé limite, fait qui se produit toujours en caractéristique nulle.

Abstract. — We prove an embedded local uniformization theroem for a valuation centered on a point of a quasi-excellent scheme of characteristic zero. The proof reduces to valuations of rank 1 and consists in desingularizing the ideal formed by the elements of infinite value and monomializing the key polynomials. We then prove a monomialization theorem valid in all characteristic under certain conditions, including that of non-existence of limit key polynomials, a condition that is always satified in characteristic zero.

0. Introduction

Les premiers résultats en résolution des singularités sont à attribuer à Newton au XVII$^{\text{ème}}$ siècle et à Puiseux au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Leurs résultats permettent de résoudre les singularités des courbes définies sur $\mathbb{C}$. En 1939, Zariski (voir [**26**]) propose une nouvelle méthode pour résoudre les singularités d'une surface définie sur un corps de caractéristique nulle : on résout le problème localement le long d'une valuation puis on recolle au niveau de la variété de Riemann-Zariski. Le recollement n'est actuellement possible que jusqu'à la dimension 3 en toute caractéristique (voir par exemple [**17**]). La résolution locale le long d'une valuation, ou uniformisation locale, n'est possible, en caractéristique positive ou mixte, également que jusqu'à la dimension 3 (voir [**2**], [**3**], [**4**] et [**5**]). En caractéristique nulle, la résolution des singularités a été démontrée par Hironaka en 1964 ([**11**]) pour des variétés de dimension quelconque. Ce résultat

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 13A18, 13F40, 13H05, 14B05, 14J17.
Mots-clés. — uniformisation locale, polynômes-clés, éclatements locaux, monomialisation.

a par la suite été redémontré par Villamayor en 1989 ([**24**]), Bierstone et Milman en 1990 ([**1**]), Encinas et Villamayor en 2001 ([**7**]), Encinas et Hauser en 2002 ([**6**]), Włodarczyk en 2005 ([**25**]) et Temkin en 2008 ([**23**]).

Ces dernières années, une nouvelle approche a été proposée par Spivakovsky ([**20**]) et Teissier ([**22**]) pour résoudre le problème de la résolution des singularités en caractéristique positive et mixte via la méthode de Zariski. La première étape étant de démontrer l'uniformisation locale d'une valuation, ils se sont intéressés à l'algèbre graduée qui lui est naturellement associée ainsi qu'à ses générateurs, appelés *polynômes-clés*.

Dans cet article, nous adaptons l'approche de Spivakovsky ([**20**]) pour l'uniformisation locale plongée des anneaux quasi-excellents équicaractéristiques au cas où le corps résiduel est de caractéristique nulle. Ce résultat est déjà bien connu, l'intérêt de notre démonstration est qu'elle permet de décrire à l'avance toutes les coordonnées de tous les points infiniment proches et ceci pour tous les éclatements intermédiaires. La méthode est la suivante : par [**16**], on sait qu'il suffit d'obtenir l'uniformisation locale pour des valuations de rang 1 centrées sur un anneau S local noethérien intègre. On considère ensuite l'idéal $\overline{H}$ composé de tous les éléments de valuation infinie dans le complété de S, noté $\widehat{S}$. Cet idéal est premier d'après [**10**], c'est l'*idéal premier implicite*. Si S est quasi-excellent, c'est-à-dire, si le morphisme de complétion est régulier, alors $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier (Théorème 4.17). Pour conclure, il suffit de montrer qu'il existe une suite d'éclatements locaux qui rendent $\widehat{S}/\overline{H}$ régulier et que tout élément de cet anneau s'écrit comme le produit d'un monôme par une unité (Lemme 8.2 et Théorème 8.3). Par le théorème de structure de Cohen, on sait qu'il existe un anneau local régulier complet R et un morphisme surjectif $R \twoheadrightarrow \widehat{S}/\overline{H}$. Ce morphisme induit un isomorphisme entre R/H et $\widehat{S}/\overline{H}$, où H est le noyau du morphisme. Pour obtenir notre résultat, il ne reste plus qu'à l'obtenir sur R/H (Théorème 8.1).

La stratégie va consister à faire décroître la dimension de plongement de R/H si H est non-nul, sinon à monomialiser les éléments de R.

Dans le cas équicaractéristique, on sait que R est un anneau de séries formelles, on peut alors utiliser la théorie des polynômes-clés. Par récurrence sur la dimension de plongement, on montre que l'idéal H est, à une suite d'éclatements locaux près, principal et engendré par un polynôme unitaire. La suite d'éclatements choisie n'est pas quelconque, les paramètres réguliers de l'anneau d'arrivée sont des polynômes-clés et dès qu'un élément s'est transformé en monôme, la suite d'éclatements le conserve sous cette forme.

Comme tout polynôme de R peut s'écrire de manière unique comme une somme finie de polynômes-clés, il suffit de monomialiser les polynômes-clés. S'il n'y a pas de premier polynôme-clé limite, une simple récurrence nous fournit le résultat (Proposition 5.7). Cette situation correspond au cas où, après un nombre fini d'éclatements, on fait un nombre fini de translations pour obtenir un résultat de monomialisation (en termes de polynômes-clés et de valuations, cette situation est celle où, après un nombre fini i_0 d'étapes, la valuation de départ est égale à la valuation monomiale correspondante au polynôme-clé de l'étape i_0). En terme de défaut d'une extension, cette situation correspond au cas où il n'y a pas de défaut ; dans un article en préparation ([**18**]) on montrera que le défaut peut être compris très précisément en terme de degré du premier polynôme-clé limite.

Or cette situation se produit toujours en équicaractéristique nulle : il n'existe pas de polynôme-clé limite pour des valuations de rang 1 (Corollaire 3.13).

Dans le cas où il existe un premier polynôme-clé limite, c'est-à-dire lorsque l'on fait un nombre infini de translations, autrement dit, dans le cas où l'extension considérée possède un défaut, on ne sait pas conclure. Dans [**19**], on a montré qu'il suffit de monomialiser le premier polynôme-clé limite qui peut être vu comme un polynôme d'Artin-Schreier généralisé.

En caractéristique mixte, la situation est semblable, R est un anneau de séries formelles à coefficients sur un anneau de valuation discrète, ou un quotient d'un anneau de séries formelles de ce type. On peut également conclure lorsqu'il n'y a pas de premier polynôme-clé limite en utilisant le cas équicaractéristique mais il nous faut supposer que la valuation de p, la caractéristique du corps résiduel de R, n'est pas divisible par p dans le groupe des valeurs.

Pour commencer, nous rappelons les définitions de centre d'une valuation ainsi que celles des différentes algèbres graduées utilisées.

Dans la deuxième partie, nous redonnons la notion de quasi-excellence pour un anneau ainsi que pour un schéma. Nous définissons également les différentes propriétés d'uniformisation locale et d'uniformisation locale plongée que nous allons démontrer dans le cas de caractéristique nulle.

Par la suite, après avoir rappelé la notion de polynôme-clé, nous montrons qu'il n'y a pas de polynômes-clés limite en caractéristique nulle pour des valuations de rang 1.

Dans la quatrième partie, nous développons les outils nécessaires pour les différentes preuves des théorèmes de monomialisation et d'uniformisation locale. Nous donnons tout d'abord la définition d'éclatement local encadré qui va imposer un système de générateurs de l'idéal maximal ; ce type d'éclatement va conserver la propriété d'être un produit d'un monôme par une unité. Par la suite, on en construit un explicitement ayant la propriété de transformer les polynômes-clés en paramètres réguliers. Nous rappelons ensuite les résultats essentiels sur l'idéal premier implicite. Nous terminons cette partie par la monomialisation d'éléments non-dégénérés (c'est-à-dire dont leur valuation est égale à la valuation monomiale), qui est un cas particulier du jeu d'Hironaka (voir [**12**] et [**21**]), ainsi que par un théorème d'uniformisation locale pour des hypersurfaces quasi-homogènes satisfaisant certaines propriétés.

Nous démontrons, dans la cinquième partie, un théorème de monomialisation dans le cas équicaractéristique. À chaque étape de l'algorithme, un éclatement local est suivi d'une complétion. On désingularise l'idéal H et on monomialise les polynômes-clés dans le cas où il n'y a pas de premier polynôme-clé limite.

La sixième partie est identique à la précédente sauf que l'on se place dans le cadre de la caractéristique mixte, avec l'hypothèse supplémentaire que la valuation de p, où p est la caractéristique du corps résiduel de R, n'est pas divisible par p dans le groupe des valeurs.

Dans la septième partie, nous démontrons à nouveau le même résultat de monomialisation que dans les deux parties précédentes mais sans compléter après chaque éclatement.

Nous terminons par la démonstration du résultat principal d'uniformisation locale plongée d'une valuation centrée en un point d'un schéma quasi-excellent dont le corps résiduel de l'anneau local en ce point est de caractéristique nulle.

Je tiens à remercier Mark Spivakovsky qui a développé la plupart des outils de cet article pendant de longues années et qui m'a permis de les appliquer dans le cadre de la caractéristique nulle.

Notations. Soit ν une valuation sur un corps K. Notons $R_\nu = \{f \in K \mid \nu(f) \geqslant 0\}$, c'est un anneau local d'idéal maximal $m_\nu = \{f \in K \mid \nu(f) > 0\}$. On note alors $k_\nu = R_\nu / m_\nu$ le corps résiduel de R_ν ansi que $\Gamma_\nu = \nu(K^*)$.
Si R est un anneau, on notera $car(R)$ sa caractéristique. Si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local on notera $\widehat{R}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de R.
Pour tout $P \in Spec(R)$, on note $\kappa(P) = R_P / PR_P$ le corps résiduel de R_P.
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ et $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble d'éléments de R, on note :

$$u^\alpha = u_1^{\alpha_1} ... u_n^{\alpha_n}.$$

Pour $P, Q \in R[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i Q^i$ et $a_i \in R[X]$ tels que le degré de a_i est strictement inférieur à celui de Q, on note :

$$d_Q^\circ(P) = n.$$

Si $Q = X$, on notera plus simplement $d^\circ(P)$ au lieu de $d_X^\circ(P)$.
Enfin, si R est un anneau intègre, on notera $Frac(R)$ son corps des fractions.

1. Centre d'une valuation, algèbres graduées associées

Définition 1.1. — *Soient R un anneau et P un idéal premier. Une valuation de R* ***centrée en P*** *est la donnée d'un idéal premier minimal P_∞ de R contenu dans P et d'une valuation du corps des fractions de R/P_∞ centrée en P/P_∞. L'idéal P_∞ est alors le support de la valuation.*
Si R est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on dira que ν est ***centrée en R*** *pour dire que ν est centrée en $\mathfrak{m}$.*
Soit X un schéma intègre de corps des fonctions $K(X)$. Une valuation ν de $K(X)$ est ***centrée en un point ξ*** *de X si ν est centrée en $\mathcal{O}_{X,\xi}$. On dira alors que ξ est le* ***centre*** *de ν.*

Définition 1.2. — *Soient R un anneau et $\nu : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation centrée en un idéal premier de R. Pour tout $\alpha \in \nu(R \setminus \{0\})$, on définit les idéaux :*

$$P_\alpha = \{f \in R \mid \nu(f) \geqslant \alpha\};$$

$$P_{\alpha,+} = \{f \in R \mid \nu(f) > \alpha\}.$$

*L'idéal P_α est appelé le **ν-idéal** de R de valuation α.*
*On définit alors **l'algèbre graduée de R associée à ν** par :*

$$gr_\nu(R) = \bigoplus_{\alpha\in\nu(R\setminus\{0\})} P_\alpha/P_{\alpha,+}.$$

L'algèbre $gr_\nu(R)$ est un anneau intègre.
Pour $f \in R\setminus\{0\}$, on définit son image dans $gr_\nu(R)$, notée $in_\nu(f)$, comme étant l'image naturelle de f dans $P_{\nu(f)}/P_{\nu(f),+} \subset gr_\nu(R)$; c'est un élément homogène de degré $\nu(f)$.
Enfin, on définit une valuation naturelle sur $gr_\nu(R)$ de groupe des valeurs $\nu(R\setminus\{0\})$, notée ord, par :

$$ord(f) = \min \alpha,$$

où $f \in gr_\nu(R)$ s'écrit comme une somme finie $f = \sum\limits_{\alpha\in\nu(R\setminus\{0\})} f_\alpha$, $f_\alpha \in P_\alpha/P_{\alpha,+}$.

Si R est un anneau local intègre, on définit une autre algèbre graduée comme suit :

Définition 1.3. — *Soient R un anneau local intègre, $K = Frac(R)$ et $\nu : K^\times \twoheadrightarrow \Gamma\cup\{\infty\}$ une valuation de K centrée en R. Pour tout $\alpha\in\Gamma$, on définit les R_ν-sous-modules de K suivants :*

$$\boldsymbol{P_\alpha} = \{f\in K \mid \nu(f)\geqslant\alpha\};$$
$$\boldsymbol{P_{\alpha,+}} = \{f\in K \mid \nu(f)>\alpha\}.$$

*On définit alors **l'algèbre graduée associée à ν** par :*

$$G_\nu = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \boldsymbol{P_\alpha}/\boldsymbol{P_{\alpha,+}}.$$

Pour $f\in K^\times$, on définit son image dans G_ν, notée $in_\nu(f)$, comme dans la Définition 1.2.
Enfin, on définit une valuation naturelle sur G_ν de groupe des valeurs Γ, notée ord, comme dans la Définition 1.2.

Remarque 1.4. — On a l'injection naturelle :

$$gr_\nu(R) \hookrightarrow G_\nu.$$

Définition 1.5. — *Soit G une algèbre graduée n'ayant pas de diviseurs de zéro. On appelle **saturé de G** l'agèbre graduée G^* définie par :*

$$G^* = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f,g\in G,\ g \text{ homogène},\ g\neq 0\right\}.$$

*On dit que G est **saturée** si $G = G^*$.*

Remarque 1.6. — Pour toute algèbre graduée G, on a :

$$G^* = (G^*)^*.$$

Autrement dit, G^* est toujours saturée.

Exemple 1.7. — Soit ν une valuation centrée en un anneau local R. Alors :

$$G_\nu = (gr_\nu(R))^* .$$

En particulier, G_ν est saturée.

2. Quasi-excellence, éclatements locaux et uniformisation locale

Pour plus de clarté nous rappelons la notion de quasi-excellence ainsi que différentes notions d'uniformisation locale, que ce soit pour des schémas ou pour des anneaux. L'uniformisation locale est la version locale de la résolution des singularités. Résoudre les singularités d'un schéma X noethérien irréductible et réduit revient à trouver un morphisme propre et birationnel $X' \to X$ tel que X' soit régulier. Ainsi, l'uniformisation locale d'une valuation ν de K, le corps des fractions d'un anneau local intègre R où est centrée la valuation, revient à trouver un anneau R' régulier qui domine birationnellement R et tel que $R' \subset R_\nu \subset K$.

Définition 2.1. — *Un anneau noethérien R est **quasi-excellent** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $P \in Spec(R)$, le morphisme de complétion $R_P \to \widehat{R_P}$ est régulier ;*
2. *Le lieu régulier de toute R-algèbre de type fini est ouvert.*

*Un schéma localement noethérien est dit **quasi-excellent** s'il existe un recouvrement formé d'ouverts affines (U_α), $U_\alpha = Spec(R_\alpha)$, tel que, pour tout α, R_α soit un anneau quasi-excellent.*

Remarque 2.2. —

1. Un anneau local est quasi-excellent si et seulement si la condition 1. est vérifiée.
2. La notion de quasi-excellence est conservée par localisation, passage au quotient et passage aux algèbres de type fini.
3. Un corps est quasi-excellent.
4. les anneaux de séries formelles sur un anneau de Cohen sont des anneaux quasi-excellents.

Définition 2.3. — *Soient X un schéma noethérien et Y un sous-schéma de X. Soit $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux définissant Y dans X.*
*On dit que X est **normalement plat** le long de Y si, pour tout point $\xi \in Y$, $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{I}^n_{Y,\xi}/\mathcal{I}^{n+1}_{Y,\xi}$ est un $\mathcal{O}_{Y,\xi}$-module libre.*

Propriété 2.4. — **(d'uniformisation locale des schémas).** *Soit S un schéma noethérien (non nécessairement intègre). Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Il existe alors un éclatement $\pi : S' \to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*
Soient X' le transformé strict de X par π et ξ' le centre de ν sur X', alors ξ' est un point régulier de X' et S' est normalement plat le long de X' en ξ'.

Le problème étant local, on peut l'exprimer en termes d'anneaux. Avant cela, nous allons rappeler la notion d'éclatement local par rapport à une valuation.

Définition 2.5. — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre de corps des fractions K. Soit ν une valuation de K centrée en R. Soient $u_1, ...u_r \in R$ et $v_1, ..., v_r \in R$ tels que $\nu(v_i) \leqslant \nu(u_i)$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$. Notons R' l'anneau :*

$$R' = R\left[\frac{u_1}{v_1}, ..., \frac{u_r}{v_r}\right].$$

Alors l'anneau $R^{(1)} = R'_{m_\nu \cap R'}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}^{(1)} = (m_\nu \cap R')R'_{m_\nu \cap R'}$.
*Un **éclatement local de R par rapport à $\boldsymbol{\nu}$** est un morphisme local d'anneaux locaux de la forme :*

$$\pi : (R, \mathfrak{m}) \to (R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}).$$

*Soient I un idéal de R et $u_0 \in I$ tel que $\nu(u_0) \leqslant \nu(f)$, pour tout $f \in I$. Complétons u_0 en un ensemble $\{u_0, u_1, ..., u_s\}$ de générateurs de I. Le morphisme précédent est appelé un **éclatement local de R par rapport à $\boldsymbol{\nu}$ le long de I** si $r = s$ et $v_i = u_0$ pour tout $i \in \{1, ..., s\}$; conditions auxquelles on peut toujours se ramener sans perte de généralité en posant $u_0 = v_1...v_r$ et $u_i = \frac{u_i}{v_i}u_0$, $i \in \{1, ..., r\}$.*

Remarque 2.6. — À isomorphisme près, la définition précédente est indépendante du choix de l'ensemble de générateurs de I, c'est-à-dire qu'un autre choix de générateurs donne un anneau isomorphe.

Propriété 2.7. — **(d'uniformisation locale des anneaux locaux).** *Soient $(S, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien (non nécessairement intègre), P un idéal premier minimal de S et ν une valuation du corps des fractions de S/P centrée en S/P. Alors, il existe un éclatement local $\pi : S \to S'$ par rapport à ν tel que S'_{red} soit régulier et Spec(S') soit normalement plat le long de Spec(S'_{red}).*

Nous finissons avec la notion de croisements normaux et d'uniformisation locale plongée.

Définition 2.8. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et ν une valuation centrée en R, au sens de la Définition 1.1, de groupe des valeurs Γ. Soit $u = \{u_1, ..., u_n\} \subset \mathfrak{m}$ tel que $(u) + \sqrt{(0)} = \mathfrak{m} + \sqrt{(0)}$. Enfin, pour $f \in R$, on note $\overline{f} \in R/\sqrt{(0)} = R_{red}$ l'image de f dans R_{red} par le morphisme de passage au quotient.*

1. *Un monôme $u^\alpha = u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n}$ est dit **minimal par rapport à $\boldsymbol{\nu}$** si la famille $\{\nu(u_j) \mid \alpha_j \neq 0\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est $\mathbb{Z}$-libre dans Γ.*
2. *Soit I un idéal de R. On dit que le triplet (R, I, u) est à **croisements normaux** si :*
   (a) *R_{red} est un anneau local régulier et $(\overline{u_1}, ..., \overline{u_n})$ est un système régulier de paramètres de R_{red} ;*
   (b) *Spec(R) est normalement plat le long de Spec(R_{red}) ;*

(c) $I/\left(I+\sqrt{(0)}\right)$ *est un idéal principal engendré par un monôme en* $\overline{u_1},...,\overline{u_n}$ *(avec la possibilité que* $I=(1)$ *et donc* $I/\left(I+\sqrt{(0)}\right)=(1)$*).*

3. *Soit I un idéal de R, le triplet (R,I,u) est à* ***croisements normaux standards*** *par rapport à ν si (R,I,u) est à croisements normaux et* $I/\left(I+\sqrt{(0)}\right)$ *est engendré par un monôme minimal par rapport à ν.*
4. *Soit I un idéal de R, on dit que (R,I) est à* ***croisements normaux*** *(resp. à* ***croisements normaux standards****) s'il existe u tel que (R,I,u) soit à croisements normaux (resp. à croisements normaux standards).*
5. *On dit que R est* ***désingularisé*** *si (R,R) est à croisements normaux.*

Définition 2.9. — *Soient $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et ν une valuation centrée en R au sens de la Définition 1.1. Soit I un idéal de R, on dit que la paire (R,I) admet une* ***uniformisation locale plongée*** *(resp. une* ***uniformisation locale plongée standard****) s'il existe une suite :*

$$R \xrightarrow{\pi_0} R^{(1)} \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} R^{(l-1)} \xrightarrow{\pi_{l-1}} R^{(l)}$$

où, pour $1\leqslant i\leqslant l$, π_i est un éclatement local par rapport à ν le long d'un idéal $J^{(i)}$ ayant les propriétés suivantes :

1. *Pour $1\leqslant i\leqslant l$, $J^{(i)}\not\subset P_\infty^{(i)}$, $P_\infty^{(i)}$ étant le support de ν dans $R^{(i)}$.*
2. *$\left(R^{(i)},IR^{(i)}\right)$ est à croisements normaux (resp. à croisements normaux standards).*

Enfin, on dit que R admet une ***uniformisation locale plongée*** *(resp. une* ***uniformisation locale plongée standard****) si, pour tout idéal I de R, (R,I) admet une uniformisation locale plongée (resp. une uniformisation locale plongée standard).*

Propriété 2.10. — **(d'uniformisation locale plongée des schémas).** *Soit S un schéma noethérien (non nécessairement intègre). Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi\in X$. Il existe alors un éclatement $\pi:S'\to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*
Soient X' le transformé strict de X par π, ξ' le centre de ν sur X' et D le diviseur exceptionnel de π, alors $(\mathcal{O}_{X',\xi'},\mathcal{I}_{D,\xi'})$ admet une uniformisation locale plongée.

Dans le cas des anneaux locaux noethériens intègres, on peut énoncer la propriété de manière un peu plus simple :

Propriété 2.11. — **(d'uniformisation locale plongée des anneaux locaux intègres).** *Soient $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre et ν une valuation de K, le corps des fractions de R, centrée en R. On dit que ν admet une* ***uniformisation locale plongée*** *si, pour un nombre fini d'éléments de R, $f_1,...,f_q\in R$ tels que $\nu(f_1)\leqslant...\leqslant\nu(f_q)$, il existe une suite d'éclatements locaux par rapport à ν :*

$$R \xrightarrow{\pi_0} R^{(1)} \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} R^{(l-1)} \xrightarrow{\pi_{l-1}} R^{(l)}$$

telle que $R^{(l)}$ soit régulier et telle qu'il existe un système régulier de paramètres $u^{(l)} = \left(u_1^{(l)}, ..., u_d^{(l)}\right)$ de $R^{(l)}$ tel que les f_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, soient des monômes en $u^{(l)}$ multipliés par une unité de $R^{(l)}$ et $f_1/.../f_q$ dans $R^{(l)}$.

3. Polynômes-clés en caractéristique nulle

Considérons $K \hookrightarrow K(x)$ une extension de corps simple et transcendante. Soit μ' une valuation de $K(x)$, notons $\mu := \mu'_{| K}$. On note G le groupe des valeurs de μ' et G_1 celui de μ. On suppose de plus que μ est de rang 1, $\mu'(x) > 0$ et $car(k_\mu) = 0$. Enfin, pour $\beta \in G$, on pose :

$$P'_\beta = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) \geqslant \beta\} \cup \{0\};$$

$$P'_{\beta,+} = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) > \beta\} \cup \{0\};$$

$$G_{\mu'} = \bigoplus_{\beta \in G} P'_\beta / P'_{\beta,+};$$

et $in_{\mu'}(f)$ l'image de $f \in K(x)$ dans $G_{\mu'}$.

Définition 3.1. — *Un **ensemble complet de polynômes-clés** pour μ' est une collection bien ordonnée :*

$$\boldsymbol{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda} \subset K[x]$$

telle que, pour tout $\beta \in G$, le groupe additif $P'_\beta \cap K[x]$ soit engendré par des produits de la forme $a \prod\limits_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a \in K$, tels que $\sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j \mu'\left(Q_{i_j}\right) + \mu(a) \geqslant \beta$.
*L'ensemble est dit **1-complet** si la condition a lieu pour tout $\beta \in G_1$.*

Théorème 3.2. — *([**9**], Théorème 62) Il existe une collection $\boldsymbol{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda}$ qui soit un ensemble 1-complet de polynômes-clés.*

Par le Théorème 3.2, on sait qu'il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés $\mathbf{Q} = \{Q_i\}_{i \in \Lambda}$ et que le type d'ordre de Λ est au plus $\omega \times \omega$. Si K est sans défaut, on va voir que le type d'ordre de Λ est au plus ω et que, par conséquent, il n'y a pas de polynômes-clés limites, ce sera en particulier le cas si $car(k_\mu) = 0$. Pour tout $i \in \Lambda$, notons $\beta_i = \mu'(Q_i)$.

Soit $l \in \Lambda$, on note :

$$\alpha_i = d^\circ_{Q_{i-1}}(Q_i), \; \forall \, i \leqslant l;$$

$$\boldsymbol{\alpha_{l+1}} = \{\alpha_i\}_{i \leqslant l};$$

$$\mathbf{Q}_{l+1} = \{Q_i\}_{i \leqslant l}.$$

On utilise également la notation $\overline{\gamma}_{l+1} = \{\gamma_i\}_{i \leqslant l}$ où les γ_i sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'entres eux, $\mathbf{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}} = \prod\limits_{i \leqslant l} Q_i^{\gamma_i}$.

Définition 3.3. — *Un multi-indice $\overline{\gamma}_{l+1}$ est dit* ***standard par rapport à $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$*** *si $0 \leqslant \gamma_i < \alpha_{i+1}$, pour $i \leqslant l$.*
Un ***monôme l-standard en $\boldsymbol{Q_{l+1}}$*** *est un produit de la forme $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \boldsymbol{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}}$, où $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \in K$ et $\overline{\gamma}_{l+1}$ est standard par rapport à $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$.*
Un ***développement l-standard n'impliquant pas $\boldsymbol{Q_l}$*** *est une somme finie $\sum\limits_{\beta} S_\beta$ de monômes l-standards n'impliquant pas Q_l, où β appartient à un sous-ensemble fini de G_+ et $S_\beta = \sum\limits_j d_{\beta,j}$ est une somme de monômes standards de valuation β vérifiant $\sum\limits_j in_{\mu'}(d_{\beta,j}) \neq 0$.*

Définition 3.4. — *Soient $f \in K[x]$ et $i \leqslant l$, un* ***développement i-standard de f*** *est une expression de la forme :*

$$f = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j,$$

où $c_{j,i}$ est un développement i-standard n'impliquant pas Q_i.

Remarque 3.5. — Un tel développement existe, par division Euclidienne et est unique dans le sens où les $c_{j,i} \in K[x]$ sont uniques. Plus précisément, si $i \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que le développement i-standard est unique.

Définition 3.6. — *Soient $f \in K[x]$, $i \leqslant l$ et $f = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ un développement i-standard de f. On définit la* ***i-troncature de $\boldsymbol{\mu'}$***, *notée μ'_i, comme étant la pseudo-valuation :*

$$\mu'_i(f) = \min_{0 \leqslant j \leqslant s_i} \{j\mu'(Q_i) + \mu'(c_{j,i})\}.$$

Remarque 3.7. — On peut montrer que c'est en fait une valuation. On a de plus :

$$\forall\, f \in K[x],\ i \in \Lambda,\ \mu'_i(f) \leqslant \mu'(f).$$

La construction des polynômes-clés se fait par récurrence (voir [**13**], [**14**], [**20**] §9 et [**9**]). Pour $l \in \mathbb{N}^*$, on construit un ensemble de polynômes-clés $\mathbf{Q}_{l+1} = \{Q_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l}$; deux cas se présentent :

(1) $\exists\, l_0 \in \mathbb{N},\ \beta_{l_0} \notin G_1$;

(2) $\forall\, l \in \mathbb{N},\ \beta_l \in G_1$.

Dans le cas (1), on stoppe la construction ; l'ensemble $\mathbf{Q}_{l_0} = \{Q_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l_0 - 1}$ est par définition un ensemble 1-complet de polynômes-clés et $\Lambda = \{1, ..., l_0 - 1\}$. Remarquons de plus que l'ensemble $\mathbf{Q}_{l_0+1}$ est quant à lui un ensemble complet de polynômes-clés. Dans le cas (2), l'ensemble $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i \geqslant 1}$ est infini et $\Lambda = \mathbb{N}^*$. Les propositions qui suivent nous assurent que dans ce cas, l'ensemble des polynômes-clés obtenu est également 1-complet.

Le lemme qui suit, très utile dans la suite, nous permet de remarquer qu'il n'existe pas de suite croissante bornée dans le cadre des valuations de rang 1.

Lemme 3.8. — *Soit ν une valuation de rang 1 centrée en un anneau local noethérien R. Notons P_∞ le support de ν. Alors, $\nu\,(R\setminus P_\infty)$ ne contient aucune suite infinie croissante et bornée.*

Remarque 3.9. — La donnée d'une valuation ν centrée en un anneau local $(R,\mathfrak{m})$ est la donnée d'un idéal premier minimal P_∞ de R (le support de la valuation) et d'une valuation ν' du corps des fractions de R/P_∞ telle que $R/P_\infty\subset R_{\nu'}$ et $\mathfrak{m}/P_\infty=(R/P_\infty)\cap m_{\nu'}$.

Preuve : Soit $(\beta_i)_{i\geqslant 1}$ une suite croissante infinie de $\nu\,(R\setminus P_\infty)$ bornée par β. Cette suite correspond à une suite infinie décroissante d'idéaux de R/P_β. Il nous suffit donc de montrer que R/P_β est de longueur finie. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R, $\nu(\mathfrak{m})=\min\{\nu\,(R\setminus P_\infty)\setminus\{0\}\}$ et Γ le groupe des valeurs de ν. Remarquons que le groupe $\nu\,(R\setminus P_\infty)$ est archimédien. En effet, par l'absurde, si $\nu\,(R\setminus P_\infty)$ n'est pas archimédien, il existe α, $\beta\in\nu\,(R\setminus P_\infty)$, $\beta\neq 0$ tels que, pour tout $n\geqslant 1$, $n\beta\leqslant\alpha$. En particulier, l'ensemble :

$$\{\gamma\in\Gamma\mid\exists\, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ -n\beta<\gamma<n\beta\}$$

est un sous-groupe isolé non trivial de Γ.
On en déduit qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\beta\leqslant n\nu(\mathfrak{m}).$$

Ainsi, $\mathfrak{m}^n\subset P_\beta$ et donc , il existe une application surjective :

$$R/\mathfrak{m}^n\twoheadrightarrow R/P_\beta.$$

On en déduit que R/P_β est de longueur finie, ce qui est absurde. On en conclut que $\nu\,(R\setminus P_\infty)$ ne contient aucune suite infinie croissante bornée.

$\square$

Proposition 3.10. — *([**20**], Proposition 9.30) Supposons que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés $\boldsymbol{Q}_\omega=\{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ tel que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $\beta_i\in G_1$. Supposons de plus que la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1. Alors, l'ensemble de polynômes-clés $\boldsymbol{Q}_\omega$ est 1-complet.*

Preuve : Il suffit de montrer que, pour tout $\beta\in G_1$ et pour tout $h\in K\,[x]$ tels que $\mu'(h)=\beta$, h est dans le R_μ-sous-module de $K\,[x]$ engendré par tous les monômes de la forme $a\prod\limits_{j=1}^{s}Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a\in K$, tels que $\mu'\left(a\prod\limits_{j=1}^{s}Q_{i_j}^{\gamma_j}\right)\geqslant\beta$.

Considérons donc $h\in K\,[x]$ tel que $\mu'(h)\in G_1$. En notant $h=\sum\limits_{j=0}^{d}h_jx^j$, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$\forall\, j\in\{0,...,d\},\ \mu(h_j)\geqslant 0.$$

En effet, dans le cas contraire, il suffit de multiplier h par un élément de K choisi convenablement.
Comme la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1, il existe $i_0\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mu'(h)<\beta_{i_0}.$$

Notons alors $h = \sum\limits_{j=0}^{s_{i_0}} c_{j,i_0} Q_{i_0}^j$, le développement i_0-standard de h. Or, comme ce développement est obtenu par division euclidienne, vu le choix fait sur les coefficients de h et, comme la suite $\left\{\frac{\beta_i}{d\,^\circ(Q_i)}\right\}_{i\geqslant 1}$ est strictement croissante (il suffit de regarder le développement $(i-1)$-standard de Q_i), on montre facilement que :

$$\forall\, j \in \{0, ..., s_{i_0}\},\ \mu\left(c_{j,i_0}\right) \geqslant 0.$$

Rappelons que, par construction des polynômes-clés, pour $j \in \{0, ..., s_{i_0}\}$, $\mu'_{i_0}\left(c_{j,i_0}\right) = \mu'\left(c_{j,i_0}\right)$. On en déduit alors que :

$$\forall\, j \in \{1, ..., s_{i_0}\},\ \mu'\left(c_{j,i_0} Q_{i_0}^j\right) = \mu'_{i_0}\left(c_{j,i_0} Q_{i_0}^j\right) > \mu'(h).$$

Ainsi, $\mu'(h) = \mu'\left(c_{0,i_0}\right)$ et donc, h est une somme de monômes en $\mathbf{Q}_{i_0+1}$ de valuation au moins $\mu'(h)$ (et en particulier, $\mu'_{i_0}(h) = \mu'(h)$).

□

On considère alors deux cas :

(1) $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} = +\infty$;

(2) $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} < +\infty$.

Dans le cas (1), à l'aide de la Proposition 3.11, on montre que l'ensemble infini de polynômes-clés est toujours 1-complet, indépendamment de la caractéristique de k_μ. Dans le cas (2), si la caractéristique de k_μ est nulle et si l'ensemble de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas complet, on montre dans la Proposition 3.12 que la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est jamais bornée. Dans ce cas-là, grâce à la Proposition 3.10, on en déduit que l'ensemble de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ est également 1-complet.

Proposition 3.11. — *(*[**20**]*, Corollaire 11.8) Supposons que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés $\boldsymbol{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i\geqslant 1}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in G_1$. Supposons de plus que l'ensemble $\{i \geqslant 1 | \alpha_i > 1\}$ est infini. Alors, $\boldsymbol{Q}_\omega$ est un ensemble* 1*-complet de polynômes-clés.*

Preuve : Soit $h \in K[x]$, comme dans la preuve de la Proposition 3.10, il suffit de montrer que $\mu'_i(h) = \mu'(h)$ pour un certain $i \geqslant 1$. Or, si on note :

$$\delta_i(h) = \max S_i(h, \beta_i),$$

où :

$$S_i(h, \beta_i) = \{j \in \{0, ..., s_i\} \mid j\beta_i + \mu'\left(c_{j,i}\right) = \mu'_i(h)\},$$

$$h = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j,$$

par le (1) de la Proposition 37 de [**9**] (Proposition 11.2 de [**20**]), on a :

$$\alpha_{i+1}\delta_{i+1}(h) \leqslant \delta_i(h),\ \forall\, i \geqslant 1.$$

On en déduit qu'à chaque fois que $\delta_i(h) > 0$ et $\alpha_{i+1} > 1$:

$$\delta_{i+1}(h) < \delta_i(h), \forall\, i \geqslant 1.$$

Comme l'ensemble $\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\}$ est infini et que l'inégalité précédente ne peut se produire une infinité de fois, on en conclut qu'il existe $i_0 \geqslant 1$ tel que $\delta_{i_0}(h) = 0$ et donc que $\mu'_{i_0}(h) = \mu'(h)$.

□

À partir de maintenant, on suppose que l'on a construit un ensemble infini de polynômes-clés $\mathbf{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i \geqslant 1}$ tel que $\alpha_i = 1$, pour tout i suffisamment grand. Ainsi pour ces i, on a :

$$Q_{i+1} = Q_i + z_i,$$

où z_i est un développement i-standard homogène, de valuation β_i, n'impliquant pas Q_i.

Proposition 3.12. — *([**20**], Proposition 12.8) Supposons que $car(k_\mu) = 0$ et que l'on ait construit un ensemble infini de polynômes-clés $\boldsymbol{Q}_\omega = \{Q_i\}_{i \geqslant 1}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\beta_i \in G_1$. Supposons de plus qu'il existe $h \in K[x]$ tel que, pour tout $i \geqslant 1$:*

$$\mu'_i(h) < \mu'(h).$$

Alors, la suite $\{\beta_i\}_{i \geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1.

Preuve : Par la Proposition 37 de [**9**] (Proposition 11.2 de [**20**]), la suite $\{\delta_i(h)\}_{i \geqslant 1}$ est décroissante, il existe donc $i_0 \geqslant 1$ tel que $\delta_{i_0+t}(h) = \delta_{i_0}(h)$, pour tout $t \in \mathbb{N}$. Notons δ cette valeur commune. Si on note $h = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ le développement i-standard de h pour $i \geqslant i_0$, alors, par la Proposition 37 de [**9**] (Proposition 11.2 de [**20**]), $\mu'_i(h) = \delta\beta_i + \mu'(c_{\delta,i})$ et $\mu'(c_{\delta,i})$ sont indépendants de i. Il suffit donc de montrer que la suite $\{\mu'_i(h)\}_{i \geqslant 1}$ n'est pas bornée.
Notons :

$$\mu_i^+(h) = \min\left\{\mu'\left(c_{j,i}Q_i^j\right) \,\middle|\, \delta < j \leqslant s_i\right\},$$
$$\varepsilon_i(h) = \min\left\{j \in \{\delta+1, ..., s_i\} \,\middle|\, \mu'\left(c_{j,i}Q_i^j\right) = \mu_i^+(h)\right\}.$$

Toujours par la Proposition 37 de [**9**] (Proposition 11.2 de [**20**]), la suite $\{\varepsilon_i(h)\}_{i \geqslant i_0}$ est décroissante, il existe donc $i_1 \geqslant i_0$ tel que cette suite soit constante à partir de i_1. Notons alors $c^*_{\delta,i_1} \in K[x]$ l'unique polynôme de degré strictement inférieur à $d^\circ(Q_{i_0}) = d^\circ(Q_{i_1})$ tel que $c^*_{\delta,i_1}c_{\delta,i_1} - 1$ soit divisible par Q_{i_1} dans $K[x]$. On peut montrer que $\mu'_i\left(c^*_{\delta,i_1}\right) = \mu'\left(c^*_{\delta,i_1}\right)$, pour tout $i \geqslant i_1$. Multiplier h par c^*_{δ,i_1} n'affecte pas δ, donc multiplier h par c^*_{δ,i_1} ne change rien au problème. On peut donc supposer que $in_{\mu'}(c_{\delta,i}) = in_{\mu'_i}(c_{\delta,i}) = 1$ pour tout $i \geqslant i_1$.
Supposons que $h = Q_{i_1+1}$, rappelons que nous sommes dans la situation où $Q_{i+1} = Q_i + z_i$, pour $i \geqslant i_1 \geqslant i_0$. Les z_i n'étant pas uniques, un choix possible de z_i, pour $i = i_1$, est :

$$z_{i_1} = \frac{c_{\delta-1,i_1}}{\delta}.$$

Par définition de z_{i_1}, $\mu'(z_{i_1}) = \beta_{i_1}$ et $\beta_{i_1} < \beta_{i_1+1}$. Par récurrence sur $t \in \mathbb{N}$, on construit Q_{i_1+t}.
Il faut tout de même montrer que la propriété « $\{\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)\}_l$ n'est pas

bornée ≫ ne dépend pas du choix des $z_i, ..., z_l$, $i \leqslant l$. En effet, supposons que l'on ait construit une autre suite de la forme $\{\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})\}_{l'}$. Si pour tout l, il existe l' tel que $\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l) < \mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})$ alors la suite $\{\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'})\}_{l'}$ ne peut pas être bornée car sinon la suite $\{\mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)\}_l$ le serait ce qui contredit l'hypothèse de départ. Supposons donc qu'il existe l tel que, pour tout l', $\mu'(Q_i + z'_i + ... + z'_{l'}) < \mu'(Q_i + z_i + ... + z_l)$. Par la Proposition 9.29 de [**20**], il existe un développement $Q_i + z'_i + ... + z'_{l'} + z''_{l'+1} + ... + z''_{l''}$ tel que $Q_i + z''_i + ... + z''_{l''} = Q_i + z_i + ... + z_l$. Ainsi, on peut construire une troisième suite qui n'est pas bornée.
Comme $car(k_\mu) = 0$, le sous-corps premier de K est $\mathbb{Q}$, considérons alors A la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de K engendrée par tous les coefficients de Q_{l_1}, on a donc que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $Q_{i_1+t} \in A[x]$. L'anneau A étant noethérien, l'anneau $A[x]$ l'est aussi. La valuation $\mu'_{|\,A[x]}$ est alors centrée en $A[x]$ et $\left\{\mu'_{|\,A[x]}(Q_{i_1+t})\right\}_{t\in\mathbb{N}} \subset G_1$, G_1 étant de rang 1. En appliquant le Lemme 3.8, on en déduit que la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ ne peut être bornée dans G_1.

□

Corollaire 3.13. — *Si* $car(k_\mu) = 0$, *il existe un ensemble* 1*-complet de polynômes-clés* $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ *tel que* Λ *est, soit un ensemble fini, soit* $\mathbb{N}^*$. *En particulier, il n'y a pas de polynômes-clés limites pour des valuations de rang* 1 *dont le corps résiduel est de caractéristique nulle.*

Preuve : On applique le processus de construction de [**20**], §9 et [**9**]. S'il existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\beta_{i_0} \notin G_1$, on pose $\Lambda = \{1, ..., i_0 - 1\}$ et, par définition, $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est 1-complet. Sinon, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in G_1$ et on pose $\Lambda = \mathbb{N}^*$. Si $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} = +\infty$, par la Proposition 3.11, l'ensemble $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est 1-complet. Si $\sharp\{i \geqslant 1 \mid \alpha_i > 1\} < +\infty$, par la Proposition 3.12, la suite $\{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$ n'est pas bornée dans G_1 et donc, par la Proposition 3.10, l'ensemble $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ est un ensemble 1-complet de polynômes-clés.

□

4. Préliminaires

Les éclatements locaux sont un outil essentiel pour obtenir un résultat d'uniformisation locale. Ces éclatements sont dépendants du choix des différents paramètres réguliers possibles pour l'anneau d'arrivée. Les éclatements locaux encadrés vont imposer un système de générateurs de l'idéal maximal d'arrivée pour permettre de faire décroître des invariants (dimension de plongement et rang rationnel d'un sous-groupe de l'enveloppe divisible du groupe des valeurs de la valuation).
Pour les preuves de tous les résultats, on pourra consulter [**20**] : §5, §6, §7, §8 ainsi que le Chapitre I de [**19**].

4.1. Suites locales encadrées. —

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien. Notons :

$$u = (u_1, ..., u_n)$$

un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Pour un sous-ensemble $I \subset \{1, ..., n\}$, notons :

$$u_I = \{u_i \mid i \in I\}.$$

Fixons un sous-ensemble $J \subset \{1, ..., n\}$ et un élément $j \in J$. Notons :

$$J^c = \{1, ..., n\} \setminus J.$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, considérons les changements de variables suivants :

$$u'_i = \begin{cases} u_i & \text{si} \quad i \in J^c \cup \{j\} \\ \frac{u_i}{u_j} & \text{si} \quad i \in J \setminus \{j\} \end{cases}$$

On note alors :

$$u' = (u'_1, ..., u'_n).$$

Rappelons que pour $f \in R$, l'**annulateur de $\boldsymbol{f}$**, noté $Ann_R(f)$, est l'idéal de R défini par :

$$Ann_R(f) = \{g \in R \mid gf = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, notons :

$$Ann_R\left(u_i^\infty\right) = \bigcup_{l \geqslant 1} Ann_R\left(u_i^l\right),$$

$$R_i = R/Ann_R\left(u_i^\infty\right) \text{ et } R' = R_j\left[u'_{J\setminus\{j\}}\right].$$

Notons $(R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}, k^{(1)})$ le localisé de l'anneau R' en un idéal premier de R'.

Remarque 4.1. — Le schéma $Spec\,(R')$ est un sous-schéma affine de l'éclaté de $Spec(R)$ le long de l'idéal (u_J).

Enfin, nous réalisons une partition de $\{1, ..., n\}$ comme suit :

$$J^\times = \{i \in J \setminus \{j\} \mid u'_i \in R^{(1)\times}\},$$

$$J^{\times c} = \{i \in J \setminus \{j\} \mid u'_i \notin R^{(1)\times}\}.$$

On a donc :

$$\{1, ..., n\} = J^c \amalg J^\times \amalg J^{\times c} \amalg \{j\},$$

$$u' = u'_{J^c} \cup u'_{J^\times} \cup u'_{J^{\times c}} \cup \{u'_j\},$$

où les réunions sont disjointes dans la dernière égalité si R est un anneau régulier avec u pour système régulier de paramètres.
Notons $u^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right)$ un système de générateurs de $\mathfrak{m}^{(1)}$ et

$$\pi : (R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$$

le morphisme naturel entre ces deux anneaux locaux.

Définition 4.2. — *On dit que* $\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ *est un* ***éclatement encadré*** *de* (R,u) *si* $n_1 \leqslant n$ *et s'il existe un sous-ensemble* $D_1 \subset \{1,...,n_1\}$ *tel que :*

$$u'_{\{1,...,n\}\setminus J^\times} = u'_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}} = u^{(1)}_{D_1}.$$

Si de plus, R *est régulier,* u *est un système régulier de paramètres de* R *et* $J^\times = \emptyset$ *(c'est-à-dire si* $n = n_1$ *et* $u' = u^{(1)}_{D_1}$*), on dit que* π *est un* ***éclatement monomial****.*
Enfin, une ***suite locale encadrée*** *est une suite de la forme :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

où chaque $\pi_i : \left(R^{(i)}, u^{(i)}\right) \to \left(R^{(i+1)}, u^{(i+1)}\right)$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$*, est un éclatement encadré. Si de plus, pour tout* i*, les* π_i *sont des éclatements monomiaux, on dit que la suite est* ***monomiale****.*

Définition 4.3. — *Soient* $\pi : (R,u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ *un éclatement encadré et* $T \subset \{1,...,n\}$*. Supposons que* R *est régulier et que* u *est un système régulier de paramètres de* R*.*
On dit que π *est* ***indépendant de*** $\boldsymbol{u_T}$ *si* $T \cap J = \emptyset$ *(c'est-à-dire,* $T \subset J^c$*).*

Remarque 4.4. — Si un éclatement encadré est indépendant de u_T, alors :

$$u_T \subset \left\{u^{(1)}_1, ..., u^{(1)}_{n_1}\right\}.$$

On définit par récurrence l'indépendance pour une suite locale encadrée en supposant qu'elle est déjà définie pour des suites de longueur $l-1$.

Définition 4.5. — *Une suite locale encadrée de la forme :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

est dite ***indépendante de*** $\boldsymbol{u_T}$ *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *la suite* $\pi_{l-2} \circ ... \circ \pi_0$ *est indépendante de* u_T *;*
2. *si* $u_T \subset \left\{u^{(i)}_1, ..., u^{(i)}_{n_i}\right\}$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$, *alors* π_{l-1} *est indépendante de* u_T*.*

Remarque 4.6. — Soit $q \in \{1,...,n\}$, on peut écrire u'_q sous la forme :

$$u'_q = u_1^{m_{1,q}} ... u_n^{m_{n,q}},$$

où $m_{p,q} \in \mathbb{Z}$, $p \in \{1,...,n\}$. Le changement de variables $u \to u'$ est alors donné par la matrice $M = (m_{p,q})_{p,q} \in SL_n(\mathbb{Z})$ avec, par définition :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \ \ 1 & \text{si} \quad p = q \\ -1 & \text{si} \quad p = j \text{ et } q \in J \\ \ \ 0 & \text{si} \quad p \neq q \text{ et, ou bien } q \neq j \text{, ou bien } q \notin J \end{cases}$$

En particulier, si $q \in J^c$, alors $u'_q \in u_{J^c}$ et si $q \in J$ alors u'_q est un monôme en u_J. De même, le changement de variables $u' \to u$ est donné par la matrice $N = (n_{p,q})_{p,q} = M^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$ avec :

$$n_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si} \qquad \text{ou bien } p = q \text{, ou bien } p = j \text{ et } q \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si $q \in J^c$, alors $u_q \in u'_{J^c}$ et si $q \in J$, alors u_q est un monôme en u'_J.
Si on note $e = \#(J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\})$, on en déduit qu'il existe $\beta_q \in \mathbb{N}^q$ et $z_q \in R'^{\times}$ tels que :

$$u_q = \left(u_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}}\right)^{\beta_q} z_q.$$

De plus, si $q \in J$, alors $\left(u_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}}\right)^{\beta_q}$ est un monôme en $u'_{J^{\times c} \cup \{j\}}$ uniquement. On a également :

$$\mathfrak{m}R' = \left(u_{J^c \cup \{j\}}\right) R'.$$

Enfin, si $J^{\times} = \emptyset$ alors, $z_q = 1$.
Pour terminer cette remarque, on va étudier le cas où l'éclatement encadré est indépendant d'un sous-ensemble. Soit $T \subset J^c$, notons :

$$t = \#(T) \text{ et } r = n - t.$$

Soient $v = \{v_1, ..., v_t\} = u_T$, $w = \{w_1, ..., w_r\} = u_{\{1,...,n\} \setminus T}$ et $u' = (v, w')$ où $w' = \{w'_1, ..., w'_r\}$. Pour $1 \leqslant q \leqslant r$, on écrit :

$$w'_q = w^{\gamma_q},$$

où $\gamma_q \in \mathbb{Z}^r$. Alors les r vecteurs $\gamma_1, ..., \gamma_r$ forment une matrice de $SL_r(\mathbb{Z})$ notée M_r. Quitte à renuméroter les lignes de la matrice M, on peut écrire M sous la forme d'une matrice diagonale par blocs où un bloc est M_r et l'autre est I_t la matrice identité de taille t.
Ainsi, pour tout $\delta \in \mathbb{Z}^r$, on a :

$$w'^{\delta} = w^{\gamma},\ \gamma = \delta F_r.$$

De même pour le changement de variables inverse, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^r$, on a :

$$w^{\gamma} = w'^{\delta},\ \delta = \gamma F_r^{-1}.$$

Nous allons généraliser cette remarque dans le cadre des suites locales encadrées.

Proposition 4.7. — *Considérons une suite locale encadrée de la forme :*

$$(R, u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right).$$

Pour $0 \leqslant i \leqslant l-1$, notons n_{i+1} l'entier correspondant à l'entier n_1 de la Définition 4.2, D_{i+1} l'ensemble correspondant à D_1 et $e_{i+1} = \#(D_{i+1})$.
Soient $0 \leqslant i < i' \leqslant l$, $q \in \{1, ..., n_i\}$, $q' \in \{1, ..., n_{i'}\}$. Alors :

1. $\exists\, \delta_q^{(i',i)} \in \mathbb{N}^{e_i}$, $z_q^{(i',i)} \in R^{(i')\times}$ *tels que* $u_q^{(i)} = \left(u_{D_{i'}}^{(i')}\right)^{\delta_q^{(i',i)}} z_q^{(i',i)}$.
2. *Supposons de plus que la suite soit indépendante de u_T avec $T \subset \{1, ..., n\}$ et $u_q^{(i)} \notin u_T$. Alors $\left(u_{D_{i'}}^{(i')}\right)^{\delta_q^{(i',i)}}$ est un monôme uniquement en $u_{D_{i'}}^{(i')} \setminus u_T$.*
3. *Supposons que pour tout $i'' > 0$ tel que $i \leqslant i'' < i'$, $D_{i''} = \{1, ..., n_{i''}\}$ et $q' \in D_{i'}$. Il existe alors $\gamma_{q'}^{(i,i')} \in \mathbb{Z}^{n_i}$ tel que $u_{q'}^{(i')} = \left(u^{(i)}\right)^{\gamma_{q'}^{(i,i')}}$.*
4. *Supposons de plus que la suite soit indépendante de u_T avec $T \subset \{1, ..., n\}$ et $u_{q'}^{(i')} \notin u_T$. Alors $u_{q'}^{(i')}$ est un monôme uniquement en $u_{\{1,...,n_i\}}^{(i)} \setminus u_T$.*

Preuve : Il suffit de montrer le cas où $i' = i+1$, le cas général se faisant par récurrence. Or ce cas n'est qu'une application des définitions et de la Remarque 4.6.

□

Proposition 4.8. — *Considérons les mêmes hypothèses que dans la Proposition 4.7 et supposons de plus que la suite locale encadrée est monomiale et indépendante de u_T, $T \subset \{1, ..., n\}$. Notons $t = \#(T)$ et $r = n - t$. On pose :*

$$v = \{v_1, ..., v_t\} = u_T,$$
$$w = \{w_1, ..., w_r\} = u_{\{1,...,n\}\setminus T}.$$

Alors :

1. $\forall\, i \in [\![0, l]\!]$, $n_i = n$.
2. $\forall\, i \in]\!]0, l]\!]$, $D_i = \{1, ..., n\}$.
3. *Pour* $0 \leqslant i < i' \leqslant l$, *notons* $u^{(i)} = \left(v, w^{(i)}\right)$ *où* $w^{(i)} = \left(w_1^{(i)}, ..., w_r^{(i)}\right)$ *et* $u^{(i')} = \left(v, w^{(i')}\right)$ *où* $w^{(i')} = \left(w_1^{(i')}, ..., w_r^{(i')}\right)$. *Alors, pour tout* $1 \leqslant q \leqslant r$, $w_q^{(i)}$ *est un monôme en* $w^{(i')}$ *ayant des exposants positifs.*
4. *Pour* $1 \leqslant q \leqslant r$, *notons* $w_q^{(i')} = \left(w^{(i)}\right)^{\gamma_q}$, $\gamma_q \in \mathbb{Z}^r$. *Alors, les r vecteurs colonnes* $\gamma_1, ..., \gamma_r$ *forment une matrice* $F_r^{(i',i)} \in SL_r(\mathbb{Z})$. *Réciproquement, notons* $w_q^{(i)} = \left(w^{(i')}\right)^{\delta_q}$, $\delta_q \in \mathbb{N}^r$. *Alors, les r vecteurs colonnes* $\delta_1, ..., \delta_r$ *forment la matrice* $\left(F_r^{(i',i)}\right)^{-1} \in SL_r(\mathbb{Z})$.

Preuve : Comme dans la preuve de la Proposition 4.7, il suffit de montrer le cas où $i' = i + 1$, le cas général se faisant par récurrence (et en remarquant que $SL_r(\mathbb{Z})$ est un groupe). Or ce cas n'est qu'une application des définitions et de la Remarque 4.6.

□

4.2. Construction d'un éclatement local encadré. —

Gardons les mêmes notations que dans la sous-section 4.1. Nous définissons un éclatement encadré $\pi : (R, u, k) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right)$ très utile par la suite. Nous allons décrire, en termes de générateurs et relations, l'extension de corps $k \hookrightarrow k^{(1)}$ induite par π.

Rappelons que R' est l'anneau :

$$R' = R_j\left[u'_{J\setminus\{j\}}\right].$$

Notons :

$$h = \#(J),$$
$$h^c = \#\left(J^c\right) = n - h,$$
$$h^{\times c} = \#\left(J^{\times c}\right) + 1,$$
$$h^{\times} = \#\left(J^{\times}\right) = h - h^{\times c}.$$

Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que :

$$\begin{aligned} J &= \{1, ..., h\}, \\ J^c &= \{h+1, ..., n\}, \\ j &= 1, \\ J^{\times c} &= \{2, ..., h^{\times c}\}, \\ J^{\times} &= \{h^{\times c}+1, ..., h\}. \end{aligned}$$

Les changements de variables deviennent alors :

$$u'_i = \begin{cases} u_i & \text{si} \quad i \in \{1\} \cup \{h+1, ..., n\} \\ \frac{u_i}{u_j} & \text{si} \quad i \in \{2, ..., h\} \end{cases}$$

Comme on a vu précédemment, prenons $\mathfrak{m}' \in Spec(R')$ tel que $u'_{J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}} \subset \mathfrak{m}'$, ainsi $R^{(1)} = R'_{\mathfrak{m}'}$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}' R^{(1)}$. De plus, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R = \mathfrak{m}' \cap R$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $z_i \in k^{(1)}$ l'image de $u'_1 \in R'$ dans $k^{(1)}$. On remarque alors que :

$$z_i = 0, \, \forall \, i \in J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}.$$

Remarque 4.9. — Notons $\overline{R} = R'/\mathfrak{m}R'$ et $\overline{u_i} \in \overline{R}$ l'image de $u'_i \in R'$ dans $\overline{R}$, $i \in J \setminus \{j\}$, alors $\overline{R} = k\left[\overline{u_{J^{\times c}}}, \overline{u_{J^{\times}}}^{\pm 1}\right]$. Les éléments $\overline{u_{J^{\times c}}}$ et $\overline{u_{J^{\times}}}^{\pm 1}$ sont algébriquement indépendants sur k, lorsque R est régulier avec u comme système régulier de paramètres. Or, on a les morphismes :

$$R \to R' \to R'_{\mathfrak{m}'} \to k^{(1)}.$$

En passant modulo $\mathfrak{m}$, on obtient :

$$k \to \overline{R} \to \overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}} \to k^{(1)},$$

où $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}R'$. On en déduit que $k^{(1)}$ est engendré sur k, en tant que corps, par $z_{J^{\times}}$.

Notons $t = deg.tr\left(k^{(1)}|k\right) + h^{\times c}$, par la Remarque 4.9 :

$$deg.tr\left(k^{(1)}|k\right) \leqslant h^{\times}.$$

On en déduit les inégalités :

$$h^{\times c} \leqslant t \leqslant h^{\times} + h^{\times c} = h \leqslant n.$$

De plus, on peut supposer que $z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t$ sont algébriquement indépendants sur k dans $k^{(1)}$, tant que $z_{t+1}, ..., z_h$ sont algébriques sur $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)$.
Pour $t < i \leqslant h$, notons $P_i(X_i)$ le polynôme minimal de z_i sur $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{i-1}\right)$. On a l'isomorphisme :

$$k^{(1)} \simeq \frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[X_{t+1}, ..., X_h\right]}{\left(P_{t+1}(X_{t+1}), ..., P_h(X_h)\right)}.$$

Quitte à réduire au même dénominateur, pour $t < i \leqslant h$, on peut choisir $P_i \in k\left[z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{i-1}\right][X_i]$, mais alors les P_i ne seront plus des polynômes unitaires. Notons :

$$P_i(X_i) = \sum_m p_{i,m} X_i^m,$$

où $p_{i,m} \in k\left[z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{i-1}\right]$, $t < i \leqslant h$. Notons alors $q_{i,m}$ l'élément de $R\left[u'_{h^{\times c}+1}, ..., u'_{i-1}\right]$ obtenu à partir de $p_{i,m}$ en remplaçant chaque $z_{i'}$ par $u_{i'}$, $t < i' < i$ et en remplaçant chaque coefficient de $p_{i,m}$ par un représentant dans R (on voit $p_{i,m}$ comme un polynôme en $z_{i'}$ à coefficients dans $k = R/\mathfrak{m}$).
En particulier, on remarque que $p_{i,m} \equiv q_{i,m} \mod \mathfrak{m}^{(1)}$. Enfin, notons :

$$Q_i(X) = \sum_m q_{i,m} X^m.$$

Pour $t < i \leqslant h$, comme $P_i(z_i) = 0$ dans $k^{(1)}$, on en déduit que :

$$Q_i(u'_i) \in \mathfrak{m}^{(1)}.$$

Proposition 4.10. — *Notons $n_1 = n - t + h^{\times c}$ et posons le changement de variables suivant :*

$$u_i^{(1)} = \begin{cases} Q_{i+n-n_1}(u'_{i+n-n_1}) & \text{si} \quad h^{\times c} < i \leqslant h - (n - n_1) \\ u'_i & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant j^{\times c} \\ u'_{i+n-n_1} & \text{si} \quad h - (n - n_1) < i \leqslant n_1 \end{cases}$$

Alors :

1. $u^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right)$ *est un système de générateurs de* $\mathfrak{m}^{(1)}$.
2. $\pi : (R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ *est un éclatement local encadré.*
3. *Si R est régulier avec u pour système régulier de paramètres, alors $u^{(1)}$ est un système régulier de paramètres de $R^{(1)}$.*

Preuve : Nous allons donner une idée de preuve. Pour (1), il suffit de remarquer que, par construction :

$$u_i^{(1)} \in \mathfrak{m}^{(1)},\ 1 \leqslant i \leqslant n_1.$$

Réciproquement, par la Remarque 4.6 :

$$\mathfrak{m}R^{(1)} = \left(u_1^{(1)}, u_{h+1-(n-n_1)}^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right) R^{(1)} \subset \left(u_1^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}\right) R^{(1)}.$$

Rappelons que $\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ sont les images de $u_2^{(1)}, ..., u_{n_1}^{(1)}$ dans $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]$; en particulier, ce sont des éléments de $\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$. Enfin, $\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ engendrent un idéal maximal de $k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]$ vu que :

$$\frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_t\right)\left[\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, \overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]}{\left(\overline{u_2}, ..., \overline{u_{h^{\times c}}}, Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)\right)} \simeq \frac{k\left(z_{h^{\times c}+1}, ..., z_{h^{\times c}}\right)\left[\overline{u_{t+1}}, ..., \overline{u_h}\right]}{\left(Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right), ..., Q_h\left(\overline{u_h}\right)\right)} \simeq k^{(1)}.$$

Comme :

$$\begin{aligned}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}} &\simeq k\left[\overline{u_2},...,\overline{u_h}\right]_{\overline{\mathfrak{m}}}\\ &\simeq k\left(z_{h^{\times c}+1},...,z_t\right)\left[\overline{u_2},...,\overline{u_{h^{\times c}}},\overline{u_{t+1}},...,\overline{u_h}\right]_{\overline{\mathfrak{m}}k\left(z_{h^{\times c}+1},...,z_t\right)\left[\overline{u_2},...,\overline{u_{h^{\times c}}},\overline{u_{t+1}},...,\overline{u_h}\right]}.\end{aligned}$$

Tout ceci montre que les images de $u_2^{(1)},...,u_{n_1}^{(1)}$ engendrent l'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$ de $\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$. Or par définition de $\overline{R}$ et de $\overline{\mathfrak{m}}$, on en déduit que $u_1^{(1)},...,u_{n_1}^{(1)}$ engendrent l'idéal $\mathfrak{m}'R_{\mathfrak{m}'}\equiv\mathfrak{m}^{(1)}$ dans $R'_{\mathfrak{m}'}\equiv R^{(1)}$.
Par définition, (2) est évidente, l'ensemble D_1 étant :

$$D_1=\{1,...,h^{\times c}\}\cup\{h-(n-n_1)+1,...,n_1\}.$$

Pour montrer (3), on remarque que, R étant régulier avec u comme système régulier de paramètres, alors, $\overline{R}$ est régulier et $\overline{u_2},...,\overline{u_{h^{\times c}}},Q_{t+1}\left(\overline{u_{t+1}}\right),...,Q_h\left(\overline{u_h}\right)$ forment un système régulier de paramètres de l'anneau local régulier $\overline{\mathfrak{m}}\overline{R}_{\overline{\mathfrak{m}}}$ qui est de dimension $h-(n-n_1)-1$. Enfin, on montre par récurrence sur $n-h$ que :

$$(0)\subsetneq\left(u_1^{(1)}\right)\subsetneq\left(u_1^{(1)},u_{h-(n-n_1)+1}^{(1)}\right)\subsetneq...\subsetneq\left(u_1^{(1)},u_{h-(n-n_1)+1}^{(1)},...,u_{n_1}^{(1)}\right)$$

forme une chaîne de $n-h+1$ idéaux premiers de $R^{(1)}$ distincts.

$\square$

Pour terminer, nous allons interpréter les résultats précédents en termes d'éclatements encadrés par rapport à une valuation donnée.

Soient $(R,\mathfrak{m},k)$ un anneau local noethérien, u un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$ et ν une valuation centrée en R. Pour $1\leqslant i\leqslant n$, notons :

$$\beta_i=\nu(u_i),$$
$$x_i=in_\nu(u_i).$$

Soient $T\subset\{1,...,n\}$, $E=\{1,...,n\}\setminus T$ et $k\left[x_E\right]$ la sous-algèbre graduée de G_ν. Notons :

$$G=k\left[x_E\right]^*=\left\{\frac{f}{g}\;\middle|\;f,g\in k\left[x_E\right],\ g\text{ homogène},\ g\neq 0\right\}.$$

Considérons $J\subset E$ et choisissons $j\in J$ tel que :

$$\beta_j=\min_{i\in J}\{\beta_i\}.$$

Soit $\pi:(R,\mathfrak{m})\to\left(R^{(1)},\mathfrak{m}^{(1)}\right)$ un éclatement local par rapport à ν (voir Définition 2.5) et considérons $R^{(1)}$ comme le localisé de R' en le centre de ν. On a donc :

$$J^{\times c}=\{i\in J\mid\beta_i>\beta_j\},$$
$$J^{\times}=\{i\in J\setminus\{j\}\mid\beta_i=\beta_j\}.$$

Notons alors :

$$x'_i=\begin{cases}x_i & \text{si}\quad i\in J^c\cup\{j\}\\ \frac{x_i}{x_j} & \text{si}\quad i\in J\setminus\{j\}\end{cases}$$

$$\overline{z}_i=\begin{cases}u'_i & \text{si}\quad i\in J^{\times}\\ 1 & \text{si}\quad i\in\{1,...,n\}\setminus J^{\times}\end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} x'_i & \text{si} \quad i \in J^\times \\ 1 & \text{si} \quad i \in \{1, ..., n\} \setminus J^\times \end{cases}$$

$$\beta'_i = ord(x'_i), 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$E' = E \setminus J^\times.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, x'_i est homogène et $ord(x'_i) \geqslant 0$. On a :

$$ord(x'_i) > 0 \Leftrightarrow \beta_i > \beta_j \Leftrightarrow i \in E',$$

$$ord(z_i) = 0, \; \forall \, i \in J^\times.$$

Remarquons que $k^{(1)} = k\left(z_{J^\times}\right)$. Considérons le morphisme $\rho : R' \to k^{(1)}$, extension de $R \to k$, défini en envoyant u'_i sur z_i si $z \in J^\times$ et sur 0 si $i \in J^{\times c}$. L'idéal $\mathfrak{m}' = \ker \rho$ est le centre de ν dans R' et $R^{(1)} = R'_{\mathfrak{m}'}$.

Définition 4.11. — *Considérons $u^{(1)}$ comme dans la Proposition 4.10, l'éclatement local encadré $\pi : (R, \mathfrak{m}) \to \left(R^{(1)}, \mathfrak{m}^{(1)}\right)$ qui en résulte est appelé l'**éclatement local encadré le long de (u_J) par rapport à ν**.*

Soit $\varphi : D_1 \to J^c \cup J^{\times c} \cup \{j\}$ la bijection résultante de l'éclatement encadré. Notons alors :

$$E^{(1)} = \varphi^{-1}(E') \subset D_1,$$

$$x_i^{(1)} = x'_{\varphi(i)},$$

$$\beta_i^{(1)} = ord\left(x_i^{(1)}\right) = \beta'_{\varphi(i)}.$$

Remarque 4.12. — Pour tout $i, i' \in E$, il existe $\delta_i \in \mathbb{N}^{\#(E^{(1)})}$, $\gamma_{i'} \in \mathbb{Z}^{\#(E)}$ tels que :

$$u_{i'}^{(1)} = u_E^{\gamma_{i'}},$$

$$u_i = \left(u_{E^{(1)}}^{(1)}\right)^{\delta_i} \overline{z_i}.$$

On a les mêmes transformations au niveau des algèbres graduées :

$$x_{i'}^{(1)} = x_E^{\gamma_{i'}},$$

$$x_i = \left(x_{E^{(1)}}^{(1)}\right)^{\delta_i} z_i.$$

On a également :

$$\beta_i = \left\langle \delta_i, \beta_{E^{(1)}}^{(1)} \right\rangle,$$

où $\langle ., . \rangle$ représente le produit scalaire de vecteurs de taille $\#(D_1)$. On en déduit les égalités d'algèbres graduées suivantes :

$$k[x]^* = k\left[z_{J^\times}, x_{D_1}^{(1)}\right]^* = k_1\left[x_{D_1}^{(1)}\right]^*,$$

$$k[x_E]^* = k\left[z_{J^\times}, x_{E^{(1)}}^{(1)}\right]^* = k_1\left[x_{E^{(1)}}^{(1)}\right]^*.$$

4.3. L'idéal premier implicite. —

Pour une valuation donnée, l'idéal premier implicite est un des objets central de l'uniformisation locale. En effet, cet idéal va être l'idéal à désingulariser. C'est un idéal du complété qui décrit les éléments de valuation infinie. Via le Lemme 8.2, pour rendre R régulier, il nous suffit de rendre régulier $\widehat{R}_H$ et $\widehat{R}/H$, où H est l'idéal premier implicite associé à une valuation centrée en R. L'intérêt de l'idéal premier implicite est que $\widehat{R}_H$ est automatiquement régulier sous l'hypothèse de quasi-excellence. Ainsi il suffira de démontrer l'uniformisation locale pour des valuations centrées en $\widehat{R}/H$. On pourra consulter [**10**], [**19**] ou [**20**] pour plus de détails.

Définition 4.13. — *([**10**], Definition 2.1) Soient $(R,\mathfrak{m},k)$ un anneau local noethérien, P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation de rang 1 de R_{P_∞} centrée en R. On appelle **idéal premier implicite** de R associé à ν, noté $H(R,\nu)$ ou plus simplement H s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'idéal de $\widehat{R}$ définit par :*

$$H=\bigcap_{\beta\in\nu(R\setminus P_\infty)}P_\beta\widehat{R},$$

où $P_\beta=\{f\in R\,|\,\nu(f)\geqslant\beta\}$.

Remarque 4.14. —

1. Si l'on suppose de plus que R est intègre, alors $P_\infty=(0)$.
2. Comme la valuation est de rang 1 le groupe $\nu(R\setminus P_\infty)$ est archimédien (voir preuve du Lemme 3.8) et donc, pour tout $\beta\in\nu(R\setminus P_\infty)$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^n\subset P_\beta$. Il y a donc équivalence entre :
   (a) $f\in H$;
   (b) Il existe une suite de Cauchy $(f_n)_n\subset R$ telle que, si $f_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f$, alors $\nu(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\infty$;
   (c) Pour toute suite de Cauchy $(f_n)_n\subset R$ telle que, si $f_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f$, alors $\nu(f_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\infty$.

Lemme 4.15. — *Sous les hypothèses de la Définition 4.13, si H est l'idéal premier implicite de R associé à ν, alors :*

$$H\cap R=P_\infty$$

et il existe une inclusion naturelle :

$$R/P_\infty\hookrightarrow\widehat{R}/H.$$

Théorème 4.16. — *([**10**], Theorem 2.1) Reprenons les hypothèses de la Définition 4.13. Soit H l'idéal premier implicite de R associé à ν, alors :*

1. *H est un idéal premier de $\widehat{R}$;*
2. *ν s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\nu}$ centrée en $\widehat{R}/H$.*

Corollaire 4.17. — *([**10**], Proposition 2.8) Soient R un anneau local quasi-excellent réduit, P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation de rang 1 de R_{P_∞} centrée en R. Alors, $\widehat{R}_H$ est un anneau local régulier.*

Lemme 4.18. — *([**10**], Lemma 2.4) Soit $(R,\mathfrak{m}) \to (R',\mathfrak{m}')$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens. Soient P_∞ un idéal premier minimal de R et ν une valuation de rang 1 de R_{P_∞} centrée en R. Supposons qu'il existe un idéal premier minimal P'_∞ de R' tel que $P_\infty = P'_\infty \cap R$ et que ν s'étende en une valuation de rang 1 ν' telle que son groupe des valeurs contienne celui de ν.*
Pour $\beta \in \nu'(R'\setminus\{0\})$, notons $P'_\beta = \{f \in R' \mid \nu'(f) \geqslant \beta\}$. Enfin, notons $H' = H(R',\nu')$ l'idéal premier implicite de R' associé à ν'.
Alors, pour tout $\beta \in \nu(R\setminus\{0\})$,

$$\left(P'_\beta\widehat{R'}\right) \cap \widehat{R} = P_\beta\widehat{R}.$$

Corollaire 4.19. — *([**10**], Corollary 2.5) Avec les hypothèses du Lemme 4.18, on a :*

$$H' \cap \widehat{R} = H.$$

Corollaire 4.20. — *([**10**], Corollary 2.7) Reprenons les hypothèses du Lemme 4.18 et supposons de plus que $(R,\mathfrak{m}) \to (R',\mathfrak{m}')$ est un éclatement local par rapport à ν le long d'un idéal J non nul de R et que ν reste de rang 1 sur R'. On a :*

$$ht(H') \geqslant ht(H) \text{ et}$$

$$\dim\left(\widehat{R'}/H'\right) \leqslant \dim\left(\widehat{R}/H\right).$$

4.4. Monomialisation d'éléments non dégénérés. —

Nous allons voir l'effet des éclatements encadrés sur les monômes. Une conséquence sera qu'un élément non dégénéré, c'est-à-dire qu'en cet élément, la valuation est égale à la valuation monomiale, peut être transformé en un monôme via une suite locale encadrée.
Toute cette partie est un cas particulier du jeu d'Hironaka (voir [**12**] et [**21**]).

Pour un élément $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note :

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Soient $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n) \in \mathbb{N}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons :

$$\delta_i = \min\{\alpha_i,\gamma_i\}.$$

Posons alors $\delta = (\delta_1,...,\delta_n) \in \mathbb{N}^n$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \delta$, $\tilde{\gamma} = \gamma - \delta$. Quitte à échanger α et γ, on peut supposer que $|\tilde{\alpha}| \leqslant |\tilde{\gamma}|$. On définit $\tau(\alpha,\gamma)$ par :

$$\tau(\alpha,\gamma) = (|\tilde{\alpha}|,|\tilde{\gamma}|).$$

Remarque 4.21. —

1. Si $\tilde{\alpha} = (0,...,0)$, alors u^α divise u^γ dans R.

2. Quitte à renuméroter les variables de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\gamma}$, on peut supposer qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a < n$, tel que :
$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_a, \underbrace{0, ..., 0}_{n-a}),$$
$$\tilde{\gamma} = (\underbrace{0, ..., 0}_{a}, \tilde{\gamma}_{a+1}, ..., \tilde{\gamma}_n).$$
On peut également supposer que, pour $1 \leqslant i \leqslant a$, $\tilde{\alpha}_i > 0$.

Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien tel que $\mathfrak{m}$ soit non nilpotent et $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soit ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ.
Considérons $J \subset \{1, ..., n\}$ le sous-ensemble le plus petit possible, au sens de l'inclusion, tel que :
$$\{1, ..., a\} \subset J \text{ et } \sum_{i \in J} \tilde{\gamma}_i \geqslant |\tilde{\alpha}|.$$
En reprenant les notations de la Définition 4.2, considérons $\pi : (R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ un éclatement encadré le long de (u_J), selon la Définition 4.11. Notons :
$$\tilde{\alpha}'_i = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$
$$\tilde{\gamma}'_i = \begin{cases} \tilde{\gamma}_i & \text{si} \quad i \neq j \\ \sum\limits_{i \in J} \tilde{\gamma}_i - |\tilde{\alpha}| & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$
$$\tilde{\alpha}' = (\tilde{\alpha}'_1, ..., \tilde{\alpha}'_n),$$
$$\tilde{\gamma}' = (\tilde{\gamma}'_1, ..., \tilde{\gamma}'_n),$$
$$\delta' = (\delta_1, ..., \delta_{j-1}, \delta_j + |\tilde{\alpha}|, \delta_{j+1}, ..., \delta_n).$$
Avec ces notations on obtient :
$$u^\alpha = (u')^{\delta' + \tilde{\alpha}'},$$
$$u^\gamma = (u')^{\delta' + \tilde{\gamma}'}.$$
Posons $\alpha' = \delta' + \tilde{\alpha}'$ et $\gamma' = \delta' + \tilde{\gamma}'$.

Proposition 4.22. — *Avec les notations précédentes, on a, pour l'ordre lexicographique :*
$$\tau(\alpha', \gamma') <_{lex} \tau(\alpha, \gamma).$$

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve. Il suffit de montrer que :
$$(|\tilde{\alpha}'|, |\tilde{\gamma}'|) <_{lex} (|\tilde{\alpha}|, |\tilde{\gamma}|).$$
Si $j \in \{1, ..., a\}$, alors par définition et par la Remarque 4.21, on a :
$$|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}| - \tilde{\alpha}_j < |\tilde{\alpha}|.$$
Si $j \in \{a+1, ..., n\}$, alors $|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}|$. Par minimalité de J, il vient que :
$$\sum_{i \in J \setminus \{j\}} \tilde{\gamma}_i < |\tilde{\alpha}|.$$

On en conclut que $|\tilde{\gamma}'| < |\tilde{\gamma}|$.

□

Corollaire 4.23. — *Soit* $s = \#\{i \in \{1,...,n\} \mid u'_i \notin R^{(1)\times}\}$. *Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que* u'_i *n'est pas inversible dans* $R^{(1)}$*, pour* $1 \leqslant i \leqslant s$ *et, inversible pour* $s < i \leqslant n$.
Comme π *est un éclatement encadré,* $\{u'_1,...,u'_s\} \subset u^{(1)}$. *Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que* $u'_i = u_i^{(1)}$*,* $1 \leqslant i \leqslant s$. *Notons les vecteurs de taille* n_1 *par :*

$$\alpha^{(1)} = (\tilde{\alpha}'_1,...,\tilde{\alpha}'_s,\underbrace{0,...,0}_{n_1-s}),$$

$$\tilde{\gamma} = (\gamma'_1,...,\gamma'_s,\underbrace{0,...,0}_{n_1-s}).$$

Alors, on a :

$$\tau\left(\alpha^{(1)},\gamma^{(1)}\right) <_{lex} \tau(\alpha,\gamma).$$

Preuve : Par la Proposition 4.22 et par définition :

$$\tau\left(\alpha^{(1)},\gamma^{(1)}\right) \leqslant_{lex} \tau(\alpha',\gamma') <_{lex} \tau(\alpha,\gamma).$$

□

Remarque 4.24. — Soit $T \subset \{1,..,n\}$ tel que $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\gamma}_i = 0$, pour tout $i \in T$. Alors, tout éclatement encadré le long de (u_J), avec J défini comme précédemment, est indépendant de u_T.

Corollaire 4.25. — *Soient* $(R,\mathfrak{m})$ *un anneau local noethérien tel que* $\mathfrak{m}$ *soit non nilpotent et* $u = (u_1,...,u_n)$ *un ensemble de générateurs de* $\mathfrak{m}$. *Soit* $r \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leqslant r \leqslant n$. *Notons* $u = (w,v)$ *avec :*

$$w = (w_1,...,w_r) = (u_1,...,u_r),$$

$$v = (v_1,...,v_{n-r}).$$

Soit ν *une valuation centrée en* R*, prenons* j *dans* J *vérifiant :*

$$\nu(u_j) = \min_{i\in J}\{\nu(u_i)\}.$$

Soient $\alpha,\gamma \in \mathbb{N}^r$*, il existe alors une suite locale encadrée par rapport à* ν *et indépendante de* v *:*

$$(R,u) \to \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que w^α *divise* w^γ *ou bien* w^γ *divise* w^α *dans* $R^{(l)}$.

Preuve : On itère le processus de construction de la Proposition 4.22 en choisissant des éclatements locaux encadrés par rapport à ν, qui sont, par construction et par la Remarque 4.24, indépendants de v. Par le Corollaire 4.23, cette construction s'arrête après un nombre fini d'itérations. On conclut alors grâce au (1) de la Remarque 4.21.

□

Proposition 4.26. — *Gardons les notations du Corollaire 4.25. Alors :*

$$w^\alpha \text{ divise } w^\gamma \text{ dans } R^{(l)} \Leftrightarrow \nu\left(w^\alpha\right) \leqslant \nu\left(w^\gamma\right).$$

Preuve : Notons $u^{(l)} = \left(w_1^{(l)}, ..., w_{r_l}^{(l)}, v\right)$. Par le (1) de la Proposition 4.7, il existe $\alpha^{(l)}, \gamma^{(l)} \in \mathbb{N}^{r_l}$ et $y, z \in R^{(l)\times}$ tels que :

$$w^\alpha = y\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}},$$

$$w^\gamma = z\left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}}.$$

Comme $\nu\left(w_1^{(l)}\right), ..., \nu\left(w_{r_l}^{(l)}\right) \geqslant 0$ et comme, par construction, l'un des $\alpha^{(l)}$ ou $\gamma^{(l)}$ est plus grand que l'autre, composante par composante, on a :

$$\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}} \text{ divise } \left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}} \text{ dans } R^{(l)} \Leftrightarrow \nu\left(\left(w^{(l)}\right)^{\alpha^{(l)}}\right) \leqslant \nu\left(\left(w^{(l)}\right)^{\gamma^{(l)}}\right).$$

□

Corollaire 4.27. — *Gardons les notations du Corollaire 4.25. Soit I un idéal de R engendré par des monômes en w. Considérons $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_b \in \mathbb{N}^r$ une collection minimale d'éléments de $\mathbb{N}^r$ telle que $(w^{\varepsilon_0}, ..., w^{\varepsilon_b}) = I$.*
Enfin, supposons que $\nu\left(w^{\epsilon_0}\right) \leqslant \nu\left(w^{\epsilon_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant b$. Il existe alors une suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v :

$$(R, u) \to \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$IR^{(l)} = \left(w^{\varepsilon_0}\right) R^{(l)}.$$

Preuve : On définit l'entier suivant :

$$\tau(I, w) = \left(b, \min_{0 \leqslant i < i' \leqslant b} \left\{\tau\left(w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\right)\right\}\right).$$

On suppose que $\tau(I, w) = (0, 1)$ si $b = 0$. Si $b \geqslant 1$, on applique la Proposition 4.22 à la paire $\{w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\}$, pour laquelle le minimum est atteint dans $\{\tau\left(w^{\varepsilon_i}, w^{\varepsilon_{i'}}\right)\}$. On obtient alors un sous-ensemble J de $\{1, ..., n\}$ tel que tout éclatement encadré le long de (u_J) fasse décroître $\tau(I, w)$ pour l'ordre lexicographique. On conclut en utilisant la Proposition 4.26.

□

Lemme 4.28. — *Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier. On suppose que $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n) = u$, où n est le nombre de générateurs de $\mathfrak{m}$. Soient Φ un semi-groupe ordonné archimédien et $\beta_1, ..., \beta_n \in \Phi$ tels que $\beta_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*
Notons $\Phi_* \subset \Phi$ le semi-groupe ordonné suivant :

$$\Phi_* = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Pour $\gamma \in \Phi_*$, considérons l'idéal de R :

$$I_\gamma = \left\langle \left\{ u_1^{\alpha_1} ... u_n^{\alpha_n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \geqslant \gamma \right\} \right\rangle.$$

Alors, pour $f \in R \setminus \{0\}$, l'ensemble :

$$\Phi_f = \{\gamma \in \Phi_* \mid f \in I_\gamma\}$$

est fini.

Preuve : Soit $f \in R \setminus \{0\}$. Comme Φ est archimédien alors Φ_* l'est aussi. Remarquons que Φ_* est un ensemble dénombrable et que Φ_f est un ensemble bien ordonné car à une suite décroissante de Φ_f correspond une suite croissante d'idéaux de R de la forme I_γ qui est forcément finie vu que R est noethérien. Notons γ_0 le plus petit élément non nul de Φ_f (en fait 0 est le min de Φ_* et de Φ_f, si ce dernier ensemble est réduit à 0, la preuve est terminée).
Comme f est non nul, il existe $i \geqslant 0$ tel que $f \notin \mathfrak{m}^i$ et donc $\Phi_f \neq \Phi_*$. Il existe donc $\gamma_1 = \sup \Phi_f \in \Phi_*$. Or Φ_* est archimédien, ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_1 < N\gamma_0$. Alors, pour tout élément $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \in \Phi_f$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, comme $\beta_i \in \Phi_f$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on en déduit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \gamma_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i < \gamma_1 < N\gamma_0.$$

Nécessairement, on a $\left(N - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \gamma_0 > 0$ et comme $\gamma_0 > 0$ on en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant N$, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un choix fini de n-uplets $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et donc de $\gamma \in \Phi_f$. □

Corollaire 4.29. — *Sous les hypothèses du Lemme 4.28, il existe une unique valuation, notée $\nu_{0,u}$, centrée en un idéal premier de R, telle que :*

$$\nu_{0,u}(u_j) = \beta_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$\nu_{0,u}(f) = \max\{\gamma \in \Phi_f\}, \ \forall\, f \in R \setminus \{0\}.$$

*Cette valuation est appelée la **valuation monomiale** de R associée à u et à $\beta_1, ..., \beta_n$. Soit ν une valuation de groupe des valeurs Γ et centrée en un idéal premier de R. On dit que ν est **monomiale** par rapport à u s'il existe $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma_+$ tels que :*

$$\forall\, f \in R \setminus \{0\}, \ \nu(f) = \nu_{0,u}(f).$$

Exemple 4.30. — Pour ν une valuation centrée en $R = k[[u_1, ..., u_n]]$, si $f = \sum c_\alpha u^\alpha$, alors $\nu_{0,u}(f) = \min \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(u_i) \;\middle|\; c_\alpha \neq 0 \right\}$ est la valuation monomiale associée à u et à $\nu(u_1), ..., \nu(u_n)$.

Remarque 4.31. — Si ν est une valuation centrée en R dont le groupe des valeurs est archimédien et si $\nu_{0,u}$ est la valuation monomiale associée à u et à $\nu(u_1), ..., \nu(u_n)$, alors, pour tout $\gamma \in \Phi_*$, $\nu(I_\gamma) = \min\{\nu(f) \,|\, f \in I_\gamma\} \geqslant \gamma$. Ainsi, pour tout $f \in R\setminus\{0\}$:

$$\nu_{0,u}(f) \leqslant \nu(f).$$

De plus, la valuation ν est monomiale si et seulement si :

$$gr_\nu(R) = k\left[in_\nu(u_1), ..., in_\nu(u_n)\right].$$

Définition 4.32. — *Soient R un anneau local régulier et $u = (u_1, ..., u_n)$ un système régulier de paramètres de R. Soit ν une valuation centrée en R. On dit que $f \in R$ est* ***non dégénéré*** *par rapport à ν et u si :*

$$\nu_{0,u}(f) = \nu(f),$$

où $\nu_{0,u}$ est la valuation monomiale de R par rapport à u (Corollaire 4.29).

Remarque 4.33. —

1. $f \in R$ est non dégénéré par rapport à u si et seulement s'il existe un idéal I de R, monomial par rapport à u, tel que $\nu(f) = \min\limits_{g \in I}\{\nu(g)\}$.
2. Considérons une suite locale encadrée $(R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ et $f \neq 0$. Par le (1) de la Proposition 4.7, chaque u_j est un monôme en $u^{(1)}$ multiplié par une unité de $R^{(1)}$. Ainsi, si f est non dégénéré par rapport à u alors, f est aussi non dégénéré par rapport à $u^{(1)}$.

Le Théorème 4.34 suivant peut être vu comme un théorème « d'uniformisation locale plongée » de f, f étant un élément non dégénéré par rapport à ν.

Théorème 4.34. — *Considérons les mêmes hypothèses que celle de la Définition 4.32. Soit f un élément non dégénéré par rapport à u. Il existe alors une suite locale encadrée $(R, u) \to \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$ telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$.*
De plus, soit I un idéal de R tel que $\nu(f) = \min\limits_{g \in I}\{\nu(g)\}$. Notons $u = (w, v)$ et supposons que I est engendré uniquement par des monômes en w. Alors, la suite locale encadrée précédente peut être choisie indépendante de v.

Preuve : La suite locale encadrée par rapport à ν provient du Corollaire 4.27. Ainsi, comme $f \in I$, il existe $z \in R^{(l)}$ tel que $f = zw^{\varepsilon_0}$ (selon les notations du Corollaire 4.27). Comme I est engendré par w^{ε_0} (Corollaire 4.27) et par hypothèses, on en conclut que :

$$\nu(z) = \nu(f) - \nu(w^{\varepsilon_0}) = \nu(f) - \min_{g \in I}\{\nu(g)\} = 0.$$

Or ν est centrée en $R^{(l)}$, donc, $z \in R^{(l)\times}$.

□

4.5. Suite élémentaire uniformisante. —

Nous allons construire une uniformisation locale, par rapport à une valuation ν, d'une hypersurface quasi-homogène satisfaisant certaines conditions vis-à-vis de l'algèbre graduée $G_\nu = (gr_\nu(R))^*$, où, pour une algèbre graduée n'ayant pas de diviseurs de zéro G, l'agèbre graduée G^* est définie par :

$$G^* = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in G,\ g \textit{ homogène},\ g \neq 0 \right\}.$$

Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier, $u = (u_1, ..., u_n)$ un système régulier de paramètres de R et ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ. Notons :

$$\beta_i = \nu(u_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Pour $r \in \{1, ..., n-1\}$ posons $t = n - r - 1$.
Supposons que $r = \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\beta_i \right)$, c'est-à-dire, quitte à renuméroter les variables, que $\beta_1, ..., \beta_r$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants dans $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et qu'en particulier β_n est $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de $\beta_1, ..., \beta_r$.
Notons $u = (w, v)$ avec :

$$v = (v_1, ..., v_t) = (u_{r+1}, ..., u_{n-1}),$$

$$w = (w_1, ..., w_r, w_n) = (u_1, ..., u_r, u_n).$$

Soit $\Delta = \langle \beta_1, ..., \beta_r \rangle$ le sous-groupe de Γ engendré par $\beta_1, ..., \beta_r$. Notons :

$$\overline{\alpha} = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid m\beta_n \in \Delta\}.$$

Par hypothèses, $\overline{\alpha} < +\infty$. Pour $i \in \{1, ..., r, n\}$, on note $x_i = in_\nu(u_i)$, on a donc $ord(x_i) = \beta_i$.
Par le Corollaire 4.6 de [**20**], on peut montrer que les $x_1, ..., x_r$ sont algébriquement indépendants sur k dans G_ν. Si x_n est algébrique sur $k[x_1, ..., x_r]$, notons P le polynôme minimal de x_n sur $k[x_1, ..., x_r]^*$, choisi unitaire et de plus bas degré possible ; sinon posons $P = 0$. Si $P \neq 0$, notons $\alpha = d^\circ(P)$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\overline{\alpha}\beta_n - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i = 0.$$

On peut montrer (Lemme 4.5 de [**20**]) que $d = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \in \mathbb{N}$. On note alors :

$$\overline{y} = x_1^{\alpha_1} ... x_r^{\alpha_r},$$

$$y = w_1^{\alpha_1} ... w_r^{\alpha_r},$$

$$\overline{z} = \frac{x_n^{\overline{\alpha}}}{\overline{y}},$$

$$z = \frac{w_n^{\overline{\alpha}}}{y}.$$

Si $P \neq 0$, alors P est de la forme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} c_i \overline{y}^{d-i} X^{i\overline{\alpha}},$$

où $c_i \in k$, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, $c_d = 1$ et $\sum\limits_{i=0}^{d} c_i X^i$ est le polynôme minimal de $\overline{z}$ sur k dans G_ν.
Enfin, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, fixons un élément $b_i \in R$ tel que $c_i \equiv b_i \mod \mathfrak{m}$. On pose alors :

$$Q = \sum_{i=0}^{d} b_i y^{d-i} w_n^{i\overline{\alpha}}.$$

Proposition 4.35. — *Avec les hypothèses et les notations précédentes, il existe une suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v :*

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

telle que, pour $0 \leqslant i \leqslant l$, si on note :

$$u^{(i)} = \left(u_1^{(i)}, ..., u_{n_i}^{(i)}\right)$$

et $k^{(i)}$ le corps résiduel de $R^{(i)}$, alors :

1. *Les éclatements encadrés $\pi_0, ..., \pi_{l-2}$ sont monomiaux. En particulier, $n_i = n$, $k^{(i)} = k$, pour $1 \leqslant i < l$. De plus, $z \in R^{(l)\times}$.*
2. $n_l = \begin{cases} n & \text{si} \quad P \neq 0 \\ n-1 & \text{si} \quad P = 0 \end{cases}$
3. *Notons :*
$$u^{(l)} = \begin{cases} \left(w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}, v, w_n^{(l)}\right) & \text{si} \quad P \neq 0 \\ \left(w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}, v\right) & \text{si} \quad P = 0 \end{cases}$$
Alors, pour $j \in \{1, ..., r, n\}$, w_j est un monôme en $w_1^{(l)}, ..., w_r^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$.
4. *Pour $j \in \{1, ..., r\}$, $w_j^{(l)}$ est un monôme en w dont les exposants peuvent être négatifs.*
5. *Si $P \neq 0$, alors :*
$$w_n^{(l)} = \sum_{i=0}^{d} b_i z^i = \frac{Q}{y^d}.$$
6. $k^{(l)} \simeq k\left(\overline{z}\right) \simeq \begin{cases} k(X) & \text{si} \quad P = 0 \\ k[X]/\left(\sum\limits_{i=0}^{d} c_i X^i\right) & \text{si} \quad P \neq 0 \end{cases}$

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $\delta = (\delta_1, ..., \delta_r, \delta_n)$ et $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r, \gamma_n)$ tels que $z = \frac{w^\delta}{w^\gamma}$ et $\nu(w^\gamma) = \nu(w^\delta)$. En appliquant le Corollaire 4.25, on obtient l'existence de la suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v telle que w^γ divise w^δ dans $R^{(l)}$. En appliquant la Proposition 4.26, on en déduit que $z, z^{-1} \in R^{(l)}$.
On montre (1) par récurrence. Plus précisément, la Proposition 4.8 implique des relations de dépendance entre les images des β_i dans les $R^{(i')}$ et les images des δ et γ, ainsi que $z^{\pm 1} = \frac{w_j^{(i')}}{w_1^{(i')}}$, où $j \neq 1$ est tel que $\beta_j^{(i')} = \min\limits_{i \in \{1,...,r,n\}} \left\{\beta_i^{(i')}\right\} = \beta_1^{(i')}$. La Proposition 4.26 permet de conclure que $z, z^{-1} \in R^{(i'+1)}$. En particulier si $i' = l-1$ on a (1).
En reprenant les notations de la Proposition 4.10, on remarque qu'on est dans le cas où $h^\times \leqslant 1$ (plus précisément, le cas $h^{\times c} = h-1$, $t = h$ et le cas $h^{\times c} = t = h-1$). En utilisant la Proposition 4.8 et quitte à interchanger, on peut supposer que $\overline{z} = \frac{x_j^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}}$. Le cas $h^{\times c} = h-1$, $t = h$ se produit si et seulement si $\overline{z} = \frac{x_j^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}}$ est transcendant sur k (et donc $P = 0$). Le cas $h^{\times c} = t = h-1$ se produit quant à lui si et seulement si $\overline{z}$ est algébrique sur k (c'est-à-dire $P \neq 0$). Ainsi (2) et (6) proviennent de l'étude directe de ces deux cas particuliers. Dans le cas $P \neq 0$, vu que $z^{\pm 1} = \frac{w_j^{(l-1)}}{w_1^{(l-1)}}$, on peut prendre $w_n^{(l)} = \sum\limits_{i=0}^{d} b_i z^i$, ce qui prouve (5). Pour terminer, (3) et (4) sont une application directe de la Proposition 4.7 avec $i = 0$ et $i' = l$.

□

Proposition 4.36. — *Reprenons les notations et les hypothèses de la Proposition 4.35. Notons $\tilde{Q} = Q + h$, où $h \in R$ est tel que $\nu_{0,u}(h) > \nu_{0,u}(Q)$. Alors, la Proposition 4.35 est vraie avec $\tilde{Q}$ à la place de Q dans (5).*

Preuve : Par hypothèses, on peut écrire h comme une somme finie $h = \sum\limits_{\gamma} h_\gamma u^\gamma$ où $h_\gamma \in R$ et $\nu(u^\gamma) > \nu_{0,u}(Q)$. Soit $N = \max\{|\gamma| \mid h_\gamma \neq 0\}$. Après une suite locale encadrée indépendante de $u_{r+1}, ..., u_n$, on peut supposer que :

$$\nu(w_1) < \frac{1}{N}\left(\nu_{0,u}(h) - \nu_{0,u}(Q)\right).$$

Pour tout $i \in \{r+1, ..., n\}$, effectuons $\left\lfloor \frac{\nu(u_i)}{\nu(w_1)} \right\rfloor$ éclatements le long de l'idéal (u_i, w_1). On peut alors supposer que, pour $h_\gamma \neq 0$, u^γ est divisible par un monôme ϖ_γ en $w_1, ..., w_r$ tel que $\nu(\varpi_\gamma) \geqslant \nu_{0,u}(Q)$. En appliquant le Corollaire 4.27 à l'idéal monomial engendré par $\{y^d\} \cup \{\varpi_\gamma \mid h_\gamma \neq 0\}$, on construit une suite locale encadrée monomiale indépendante de $u_{r+1}, ..., u_n$ telle que y^d divise h.
Ainsi, avec cette hypothèse, on peut considérer la suite locale encadrée construite dans la Proposition 4.35. Comme y^d divise Q dans $R^{(l)}$ et comme y^d divise h, on en déduit que y^d divise $\tilde{Q}$ dans $R^{(l)}$. Le $w_n^{(l)}$ de la Proposition 4.35 diffère alors de $\frac{\tilde{Q}}{y^d}$

par des éléments appartenant à l'idéal $\left(u_1^{(l)},...,u_{n-1}^{(l)}\right)$.

□

Définition 4.37. — *Reprenons les notations et les hypothèses de la Proposition 4.36. La suite locale encadrée par rapport à ν et indépendante de v construite dans la Proposition 4.36 sera appelée* ***la suite élémentaire uniformisante associée à*** $\left(\boldsymbol{R, u, \nu, n, \tilde{Q}}\right)$, *ou plus simplement,* ***la n-suite élémentaire uniformisante****, lorsque il n'y a pas d'ambiguïté possible dans les choix de R, u, ν et $\tilde{Q}$.*

Remarque 4.38. — L'entier n de la Définition 4.37 fait référence au fait que la suite est dépendante uniquement des variables $u_1, ..., u_r, u_n$. Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on peut définir une j-suite élémentaire en remplaçant les variables $u_1, ..., u_r, u_n$ par $u_1, ..., u_r, u_j$.

4.6. Suites formelles encadrées. —

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet de dimension n avec $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$. Soient ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ et Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème 8.1). On suppose de plus que :

$$n = e(R, \nu) = emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R, u, \nu) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(u_i)\right)$.

La valuation ν est unique si $ht(H) = 1$, cas auquel on va se ramener grâce au Corollaire 5.3. C'est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$.

Par abus de notation, pour $f \in R$, on notera $\mu(f)$ au lieu de $\mu(f \mod H)$.

Définition 4.39. — *Soit $(R, u, k) \to (R', u', k')$ une suite locale encadrée, on note H'_0 le transformé strict de H dans R'. On dit que μ est* ***centrée*** *en R' si μ est centrée en R'/H'_0. Dans ce cas, on dit que la suite locale encadrée est une* ***suite locale encadrée par rapport à $\boldsymbol{\mu}$****.*

Définition 4.40. — *Soit $(R, u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ un éclatement local encadré. Le morphisme induit par complétion formelle est appelé un* ***éclatement formel encadré par rapport à $\boldsymbol{\mu}$****.*

Soient $\widehat{K^{(1)}} = Frac\left(\widehat{R^{(1)}}\right)$, $H^{(0)}$ le transformé strict de H dans $R^{(1)}$ et $\overline{H}^{(1)}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{R^{(1)}}/H^{(0)}\widehat{R^{(1)}}$.

On appelle ***transformé*** *de H dans $\widehat{R^{(1)}}$, noté $H^{(1)}$, la préimage de $\overline{H}^{(1)}$ dans $\widehat{R^{(1)}}$.*

Enfin, on appelle ***valuation induite par $\boldsymbol{\mu}$*** *en $\widehat{R^{(1)}}$, notée $\mu^{(1)}$, l'unique extension de μ de $\kappa(H)$ à $\kappa\left(H^{(1)}\right)$, centrée en $\widehat{R^{(1)}}/H^{(1)}$ et donnée par le Théorème 4.16.*

Définition 4.41. — *Une suite de morphismes locaux :*

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

est appelée une ***suite formelle encadrée par rapport à $\boldsymbol{\mu}$*** *si, la suite :*

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right)$$

est une suite formelle encadrée par rapport à μ et si π_{l-1} est un éclatement formel encadré par rapport à la valuation $\mu^{(l-1)}$, induite par μ sur $R^{(l-1)}$.

Pour tout éclatement local encadré de la forme $(R,u) \to \left(R^{(1)},u^{(1)}\right)$, on définit une valuation $\nu^{(1)}$ centrée en $\widehat{R^{(1)}}$ comme suit : fixons une valuation $\theta^{(1)}$ de $\widehat{K^{(1)}}$, centrée en $\left(\widehat{R^{(1)}}\right)_{H^{(1)}}$ et telle que $k_{\theta^{(1)}} \simeq \kappa\left(H^{(1)}\right)$. On pose alors $\nu^{(1)} = \theta^{(1)} \circ \mu^{(1)}$.
Etant donnée une suite formelle encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right) ;$$

on peut, par récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant l-1$, construire une valuation $\mu^{(i)}$, centrée en $R^{(i)}$ telle que le plus petit sous-groupe non nul du groupe des valeurs de $\nu^{(i)}$ soit Γ_1, et définir le transformé de H dans $R^{(i)}$, noté $H^{(i)}$. Par construction, on a :

$$H^{(i)} = \{f \in R^{(i)} \mid \nu^{(i)}(f) \notin \Gamma_1\}.$$

On note alors :

$$e\left(R^{(i)},\nu^{(i)}\right) = emb.dim\left(R^{(i)}/H^{(i)}\right);$$

$$r\left(R^{(i)},u^{(i)},\nu^{(i)}\right) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{Q}\nu^{(i)}\left(u_j^{(i)}\right)\right),$$

où $u^{(i)} = (u_1^{(i)},...,u_{n_i}^{(i)})$.

On note $\nu_{0,u}$ la valuation monomiale centrée en R et associée à $u=(u_1,...,u_n)$ et à $\nu(u_1),...,\nu(u_n)$. Par la Remarque 4.31, pour tout $f \in R$, on a :

$$\nu_{0,u}(f) \leqslant \nu(f).$$

Remarque 4.42. — Supposons que $n=r$. Pour une suite formelle encadrée de la forme :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)},u^{(l)}\right) ,$$

on note $\nu_{0,u^{(l)}}$ la valuation monomiale centrée en $R^{(l)}$ associée à $u^{(l)}$ et à $\nu^{(l)}\left(u_1^{(l)}\right),...,\nu^{(l)}\left(u_n^{(l)}\right)$.
Si $f \in H \setminus \{0\}$, alors :

$$\nu_{0,u^{(l)}}(f) < \nu(f),$$

pour toute suite formelle encadrée de la forme précédente et telle que :

$$\nu^{(l)}\left(u_1^{(l)}\right), ..., \nu^{(l)}\left(u_n^{(l)}\right) \in \Gamma_1.$$

Ainsi, comme $\nu_{0,u^{(l)}}(f) \in \Gamma_1$ et $\nu(f) \notin \Gamma_1$, on en déduit que $H^{(i)} = (0)$, pour tout i.

5. Un théorème de monomialisation en égale caractéristique

Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier complet équicaractéristique de dimension n avec $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$. Soient ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ et Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème 8.1). On suppose de plus que :

$$n = e(R, \nu) = emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R, u, \nu) = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(u_i)\right)$.

La valuation ν est unique si $ht(H) = 1$, cas auquel on va se ramener grâce au Corollaire 5.3. C'est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$.

Par abus de notation, pour $f \in R$, on notera $\mu(f)$ au lieu de $\mu(f \mod H)$. Par le théorème de Cohen, on peut supposer que R s'écrit sous la forme :

$$R = k\,[[u_1, ..., u_n]]\,.$$

5.1. Un premier théorème de monomialisation. —

Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i\in\Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $k\left((u_1, ..., u_{j-1})\right) \hookrightarrow k\left((u_1, ..., u_{j-1})\right)(u_j)$, $\mathbf{Q}_{j,i} = \{Q_{j,i'} | i' \in \Lambda_j, i' < i\}$, $\Gamma^{(j)}$ le groupe des valeurs de $\nu_{|k((u_1,...,u_j))}$ et $\nu_{j,i}$ la i-troncature de ν pour cette extension.

Théorème 5.1. — *Reprenons les hypothèses précédentes et supposons de plus que pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, il existe un ensemble $\{Q_{j,i}\}_{i\in\Lambda_j}$ de polynômes-clés 1-complet pour la valuation $\nu_{|k((u_1,...,u_j))}$ ne possédant pas de polynôme-clé limite. Deux cas se présentent :*

1. *Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

   telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right), e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R, \nu), n - r)\,;$$

2. *Ou bien $H=(0)$ et pour tout $f\in R$, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R,u)\xrightarrow{\pi_0}\left(R^{(1)},u^{(1)}\right)\xrightarrow{\pi_1}\cdots\xrightarrow{\pi_{l-2}}\left(R^{(l-1)},u^{(l-1)}\right)\xrightarrow{\pi_{l-1}}\left(R^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$.

Preuve : On procède par récurrence sur $n-r$. Si $n=r$ alors $\nu(u_1),...,\nu(u_n)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et donc, tout $f\in R$ contient un unique monôme de valuation minimale. En particulier,

$$\forall\, f\in R,\ \nu_{0,u}(f)=\nu(f).$$

Par la Remarque 4.42, $H=(0)$. Prenons alors un élément $f\in R$, par le Théorème 4.34, il existe une suite locale encadrée :

$$(R,u)\xrightarrow{\pi_0}\left(R^{(1)},u^{(1)}\right)\xrightarrow{\pi_1}\cdots\xrightarrow{\pi_{i-2}}\left(R^{(i-1)},u^{(i-1)}\right)\xrightarrow{\pi_{i-1}}\left(R^{(i)},u^{(i)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$. En passant au complété à chaque pas, on obtient la suite formelle encadrée satisfaisant (2).

Supposons que $n-r>0$ et que l'on a déjà construit une suite formelle encadrée pour toutes les valeurs strictement plus petites et satisfaisant la conclusion du Théorème 5.1. On veut montrer le résultat pour l'anneau $k\,[[u_1,...,u_{n-r}]]\,[[u_{n-r+1}]]$.
Soit $\left(R^{(i)},\mathfrak{m}^{(i)},k^{(i)}\right)$ un anneau local apparaissant dans une suite formelle encadrée. Par le Théorème de Cohen, on peut supposer que :

$$R^{(i)}=k^{(i)}\left[\left[u_1^{(i)},...,u_{n_i}^{(i)}\right]\right].$$

Dans un premier temps, montrons que l'on peut toujours se ramener aux hypothèses suivantes :

$$H^{(i)}\cap R^{(i)}=(0)\,,n_i=n,\ r_i=r,$$

où $r_i=r\left(R^{(i)},u^{(i)},\nu^{(i)}\right)$. En effet, si pour un certain i, on a :

$$H^{(i)}\cap R^{(i)}\neq(0),$$

en notant :

$$R_{n_i-1}^{(i)}=k^{(i)}\left[\left[u_1^{(i)},...,u_{n_i-1}^{(i)}\right]\right]\ \text{et}\ \overline{u}^{(i)}=\left(u_1^{(i)},...,u_{n_i-1}^{(i)}\right),$$

on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur $n-r$ pour construire une suite formelle encadrée :

$$\left(R_{n_i-1}^{(i)},\overline{u}^{(i)}\right)\longrightarrow\left(R_{n_i-1}^{(i,1)},\overline{u}^{(i,1)}\right)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\left(R_{n_i-1}^{(i,l)},\overline{u}^{(i,l)}\right)$$

telle que $e\left(R_{n_i-1}^{(i,l)},\nu^{(i,l)}\right)<e\left(R_{n_i-1}^{(i)},\nu^{(i)}\right)=n_i-1$. Notons alors :

$$\tilde{R}^{(j)}=R_{n_i-1}^{(i,j)}\left[\left[u_{n_i}^{(i)}\right]\right],\ 1\leqslant j\leqslant l,$$

on obtient une suite formelle encadrée :

$$\left(R^{(i)},u\right)\longrightarrow\left(\tilde{R}^{(1)},u^{(1)}\right)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\left(\tilde{R}^{(l-1)},u^{(l-1)}\right)\longrightarrow\left(\tilde{R}^{(l)},u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$e\left(\tilde{R}^{(l)},\nu^{(l)}\right) < e\left(R^{(i)},\nu^{(i)}\right) \leqslant e(R,\nu).$$

De même, s'il existe un i tel que $n_i < n$ ou $r_i > r$, la suite formelle encadrée recherchée est déjà construite et il n'y a rien à faire.

Ainsi, on peut supposer que, pour tous les anneaux $R^{(i)}$ apparaissant dans n'importe quelle suite formelle encadrée :

$$n_i = n,\ r_i = r,\ H^{(i)} \cap R^{(i)} = (0).$$

En particulier, $\nu^{(i)}_{\mid R^{(i)}_{n_i-1}}$ est de rang 1 et $e\left(R^{(i)}_{n_i-1},\mu^{(i)}\right) = n-1 = e\left(R_{n-1},\mu\right)$.

À partir de maintenant, quitte à poser $N = n-r+1$, on peut supposer qu'on est dans le cas où $r = 1$.

Pour achever la preuve, nous allons montrer qu'à une suite formelle près, les idéaux $H^{(i)}$ sont principaux engendrés par un polynôme unitaire en u_n et qu'il suffit de monomialiser ce type d'éléments.

5.2. L'idéal premier implicite est engendré par un polynôme unitaire. —

Pour finir la preuve du Théorème 5.1, on a doit démontrer la Proposition 5.2. On suppose toujours que l'hyothèse de récurrence est vérifiée à l'étape $n-1$, c'est-à-dire que le Théorème 5.1 est vraie pour R de dimension $n-1$.

Proposition 5.2. — *Reprenons les hypothèses précédentes et supposons que le Théorème 5.1 est vrai en dimension $n-1$. Notons $R_{n-1} = k\left[\left[u_1,...,u_{n-1}\right]\right]$ et supposons que $H \not\subset R_{n-1}$ et $H \cap R_{n-1} = (0)$.*
Soit $f \in H \setminus \{0\}$. À une suite formelle encadrée près, f s'écrit sous la forme :

$$f = \alpha f_{n-1} P;$$

où $\alpha \in R^{\times}$, $f_{n-1} \in R_{n-1}$ et P est un polynôme unitaire en u_n.

Preuve : La valuation μ de rang 1 centrée en R/H induit une valuation de rang 1 centrée en R_{n-1}.
Soit $f \in H$, $f \neq 0$, on peut écrire $f = \sum\limits_{j\geqslant 0} b_j u_n^j$, avec $b_j \in R_{n-1}$. Par hypothèse, on peut supposer qu'il existe $j \geqslant 0$ tel que $b_j \notin H \cap R_{n-1}$. On pose alors :

$$\beta = \min_{j\geqslant 0}\{\mu(b_j) \mid b_j \notin H \cap R_{n-1}\}.$$

Soit d le plus petit entier naturel tel que $\mu(b_d) = \beta$ (donc $b_d \notin H \cap R_{n-1}$).
Soit $N \geqslant d$ un entier naturel non nul tel que, pour tout $j > N$,

$$b_j \in \left(b_0,...,b_N\right).$$

Soit $j \in \{0,...,N\}$, comme, par hypothèses, R_{n-1} est un anneau local, régulier et complet de dimension $n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (Théorème

5.1 en dimension $n-1$) à cet anneau muni de la valuation μ et à l'élément b_j. Il existe donc une suite locale encadrée :

$$\pi : (R_{n-1}, (u_1, ..., u_{n-1})) \to ... \to \left(R', (u'_1, ..., u'_{n-1})\right)$$

telle que b_j soit un monôme en $(u'_1, ..., u'_{n-1})$ (multiplié par une unité de R'). En passant à chaque pas de la suite au complété formel, on obtient une suite formelle encadrée telle que b_j est un monôme en $(u'_1, ..., u'_{n-1})$ (multiplié par une unité de R'). De plus, par le (1) de la Proposition 4.7, la propriété d'être un monôme multiplié par une unité est préservée pour tous les éclatements encadrés suivants. Ainsi, on peut choisir π de telle sorte que les $b_0, ..., b_N$ soient simultanément des monômes en $(u'_1, ..., u'_{n-1})$.
Par les choix de β et de d et par le Corollaire 4.27, après une suite locale encadrée de plus, on peut se ramener à la situation où b_d divise b_j, $0 \leqslant j \leqslant N$ et donc, b_d divise b_j pour tout $j \geqslant 0$.
Ainsi, $\frac{f}{b_d} \in R'\left[[u_n]\right]$ et satisfait les hypothèses du théorème de préparation de Weierstrass.

□

Corollaire 5.3. — *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition 5.2, on a :*

$$ht\,(H) \leqslant 1.$$

Preuve : Si $H = (0)$, il n'y a rien à montrer. Sinon, prenons $f \in H$ tel que $f \neq 0$. Comme la hauteur de H est croissante lorsque l'on fait des suites locales ou formelles encadrées, (Corollaire 4.20), par la Proposition 5.2, on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n à coefficients dans R_{n-1}. Ainsi, l'extension d'anneaux :

$$\sigma : R_{n-1} \hookrightarrow R_{n-1}\left[[u_n]\right]/(f)$$

est finie. La préimage de l'idéal $H/\,(f)$ par σ est (0). Comme la hauteur est préservée par les extensions finies d'anneaux ([**15**], Theorem 20), on a :

$$ht\,(H/(f)) = ht((0)) = 0.$$

Ainsi, $ht\,(H) = 1$.

□

Corollaire 5.4. — *Sous les hypothèses de la Proposition 5.2, à une suite formelle encadrée près, l'idéal H est principal engendré par un polynôme unitaire en u_n.*

Preuve : C'est une conséquence directe du Corollaire 5.3.

□

Remarque 5.5. — En appliquant le Corollaire 5.4 à chaque anneau $R^{(i)}$ apparaissant dans la preuve du Théorème 5.1, on peut supposer, à une suite formelle encadrée près, que pour tout i, l'idéal $H^{(i)}$ est principal, engendré par un polynôme unitaire en $u_n^{(i)}$.
Remarquons qu'il existe alors une unique valuation $\theta^{(i)}$ centrée en $\left(R^{(i)}\right)_{H^{(i)}}$ (c'est la valuation triviale si $ht\left(H^{(i)}\right) = 0$ et la valuation discrète centrée en $\left(R^{(i)}\right)_{H^{(i)}}$ si $ht\left(H^{(i)}\right) = 1$). Ainsi, l'extension $\nu^{(i)}$ de ν à $R^{(i)}$ est déterminée de manière unique.

Pour achever la preuve du Théorème 5.1, il suffit d'obtenir le résultat pour des polynômes en u_n.

5.3. Monomialisation des polynômes. —

Proposition 5.6. — *Sous les hypothèses précédentes et en supposant que le Théorème 5.1 est vrai en dimension $n-1$, pour tout polynôme $f \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]][u_n]$, il existe une suite formelle encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que f soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'.*
Supposons de plus que f soit irréductible dans $k[[u_1, ..., u_{n-1}]][[u_n]]$, la suite formelle encadrée précédente peut alors être choisie de telle sorte que u'_n divise f et u'^2_n ne divise pas f dans R'.

Fin de la preuve du Théorème 5.1 en supposant la Proposition 5.6 vraie :
Si $H \neq (0)$, prenons $f \in H \cap k[[u_1, ..., u_{n-1}]][u_n]$, $f \neq 0$; sinon prenons $f \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]][u_n] \setminus \{0\}$. Par hypothèses, il existe une suite formelle encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que f soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'. Notons H' le transformé de H dans R'.
Si $H \neq (0)$, alors, par définition, $\nu(f) \notin \Gamma_1$ et donc, il existe un j tel que $\nu(u'_j) \notin \Gamma_1$, c'est-à-dire, $u'_j \in H'$. Ainsi, $e(R', \nu) \leqslant n-1 < n = e(R, \nu)$ et on est dans la situation (1) du Théorème 5.1. Si $H = (0)$ et $f \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]][u_n] \setminus \{0\}$, on se retrouve dans la situation (2) par hypothèses.
Enfin, si $H = (0)$ et $f \in R \setminus \{0\}$, non nécessairement un polynôme en u_n, écrivons $f = f' + f''$ avec $\nu_{0,u}(f'') > \nu(f)$ (et donc $\nu(f) = \nu(f')$). Par le cas polynomial vu avant, il existe une suite formelle encadrée $(R, u) \to (R', u')$ telle que f' soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'. Or $\nu_{0,u'}(f'') \geqslant \nu_{0,u}(f'') > \nu(f) = \nu(f')$. Par le Corollaire 4.27, quitte à compléter, il existe une suite formelle encadrée $(R', u') \to (R'', u'')$ telle que f soit un monôme en u'' multiplié par une unité de R''.
□

Preuve de la Proposition 5.6 : On va montrer le résultat par récurrence sur le degré de f. Si $d^\circ_{u_n}(f) = 1$, la Proposition 5.6 est alors évidente.
Soit $f \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]][u_n]$ de degré $d > 1$. Par hypothèse de récurrence, on suppose que la Proposition 5.6 est vraie pour tout polynôme de degré strictement inférieur à d.
Par hypothèse, vu que l'ensemble de polynômes-clés est 1-complet et ne possède pas de polynôme-clé limite, il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\nu(f) = \nu_{n,i}(f)$. Ceci veut dire qu'il existe un développement (n, i)-standard de f de la forme :

$$f = \sum_{j=0}^{N} c_j Q_{n,i}^j,$$

où les c_j sont des développements (n, i)-standards n'impliquant pas $Q_{n,i}$ et $\nu(f) = \nu_{n,i}(f)$.
On rappelle que pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $\alpha_{n,i} = d^\circ_{Q_{n,i-1}}(Q_{n,i})$.
Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_{n,l} > 1$, prenons alors ce l. S'il n'en existe pas,

prenons un l suffisamment grand tel que $f = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$ et $\nu(f) = \nu_{n,l}(f)$. Dans tous les cas, par définition des polynômes-clés et par hypothèse, $l < \omega$.

Pour achever la preuve de la Proposition 5.6, il nous suffit donc d'obtenir le résultat voulu sur les polynômes-clés comme nous allons le voir dans la sous-section 5.4 et la Proposition 5.7.

5.4. Monomialisation des polynômes-clés. —

Proposition 5.7. — *Sous les hypothèses précédentes et en supposant que le Théorème 5.1 est vrai en dimension $n-1$, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R, u) \to (R', u'),$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u' = (u'_1, ..., u'_n)$, et vérifiant les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant q \leqslant l$, le polynôme-clé $Q_{n,q}$ est un monôme en u' multiplié par une unité de R' ;*
2. *Dans R', u'_n divise $Q_{n,l}$ mais u'^2_n ne divise pas $Q_{n,l}$.*

Preuve de la Proposition 5.6 en supposant la Proposition 5.7 vraie :
Par hypothèse de récurrence sur $n-r$, n'importe quelle collection d'éléments de $k((u_1, ..., u_{n-1}))$ peut être transformée simultanément en monômes via une suite formelle encadrée. De plus, en appliquant $n-r-1$ fois la Proposition 4.35, on peut supposer que seuls les $u'_1, ..., u'_r$ apparaissent dans ces monômes.
Si $\alpha_{n,l} = 1$, on applique la Proposition 4.35 à chaque polynôme-clé $Q_{n,1}, ..., Q_{n,l}$ et la Proposition 5.6 est démontrée.
Supposons que $\alpha_{n,l} > 1$. Notons $f = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j u_n^j$, $a_j \in k[[u_1, ..., u_{n-1}]]$. Soit j_0 le plus grand $j \in \{0, ..., d\}$ tel que $\nu(a_{j_0}) = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant d}\{\nu(a_j)\}$. Par le Corollaire 4.27, après une suite locale encadrée indépendante de u_n, et quitte à compléter, on peut supposer que a_{j_0} divise a_j, pour tout $j \in \{0, ..., d\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u_n de degré d.
Soit $f = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j Q_{n,l}^j$, $N = \left\lfloor \frac{d}{\alpha_{n,l}} \right\rfloor$, le développement (n,l)-standard de f. Par la Proposition 5.7, il existe une suite formelle encadrée telle que le développement (n,l)-standard de f dans R' soit de la forme $\sum\limits_{j=0}^{N} c'_j u'^j_n$, $c'_j \in k'\left[\left[u'_1, ..., u'_{n-1}\right]\right]$, multiplié par une unité de R'.
Notons j'_0 le plus grand $j \in \{0, ..., N\}$ tel que $\nu(c'_{j'_0}) = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant N}\{\nu(c'_j)\}$. Toujours par le Corollaire 4.27, après une suite locale encadrée indépendante de u'_n, et quitte à compléter, on peut supposer que $c'_{j'_0}$ divise c'_j, pour tout $j \in \{0, ..., N\}$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer que f est un polynôme unitaire en u'_n de degré inférieur ou égal à $N < d$. Pour conclure, il nous suffit juste d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

Preuve de la Proposition 5.7 : Comme $l \in \mathbb{N}^*$, le développement standard de $Q_{n,l}$ est :

$$Q_{n,l} = Q_{n,l-1}^{\alpha_{n,l}} + \sum_{j=0}^{\alpha_{n,l}-1} \left(\sum_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}} \mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}} \right) Q_{n,l-1}^{j}.$$

Par hypothèse de récurrence, pour des valeurs strictement inférieures à $n-r$, il existe une suite formelle encadrée $(R,u) \to (R',u')$, indépendante de u_n telle que chaque élément $c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ soit un monôme en $u'_1,...,u'_{n-1}$ multiplié par une unité de R'.
Pour chaque $j \in \{r+1,...,n-1\}$, appliquons la j-suite élémentaire uniformisante de la Remarque 4.38, suivie à chaque fois d'une complétion formelle. On arrive alors à la situation où les $\sum\limits_{\overline{\gamma}_{n,l-1}} c_{n,l,j,\overline{\gamma}_{n,l-1}} \mathbf{Q}_{n,l-1}^{\overline{\gamma}_{n,l-1}}$ sont des monômes en $u'_1,...,u'_r$ multipliés par une unité de R'.
Appliquons $l-1$ fois la Proposition 4.35, on peut supposer de plus que :

$$Q_{n,l-1} = \eta u'_n,$$

où η est un monôme en $u'_1,...,u'_{n-1}$ multiplié par une unité de R'.
En appliquant la Proposition 4.35 à $u'_1,...,u'_r,u'_n$, quitte à passer au complété, on obtient une suite formelle encadrée $(R',u') \to (R'',u'')$ telle que $Q_{n,l}$ soit un monôme en $u''_1,...,u''_r,u''_n$. On en déduit immédiatement (1) et (2) par construction, ceci achève la preuve de la Proposition 5.7 et donc celle du Théorème 5.1.

□

6. Un théorème de monomialisation en caractéristique mixte

Soient $(R,\mathfrak{m},k)$ un anneau local régulier complet de caractéristique mixte de dimension n avec $\mathfrak{m} = (x) = (x_1,...,x_n)$ et ν une valuation de $K = Frac(R)$ centrée en R, de groupe des valeurs Γ. Soit Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non nul de Γ. On note :

$$H = \{f \in R \mid \nu(f) \notin \Gamma_1\}.$$

H est un idéal premier de R (voir Preuve du Théorème 8.1). On suppose de plus que :

$$n = e(R,\nu) = emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H \subset \mathfrak{m}^2.$$

On note également $r = r(R,x,\nu) = \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Q}\nu(x_i) \right)$ et $p = car(k)$.
La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu : L^* \to \Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L = Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta : K^* \to \Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta \simeq \kappa(H)$.
Par abus de notation, pour $f \in R$, on notera $\mu(f)$ au lieu de $\mu(f \mod H)$.

Remarque 6.1. — Si $p \in H$, alors R/H est équicaractéristique et on est sous les hypothèses de la Section 5. Dans la suite on supposera donc que $p \notin H$.

6.1. Suites formelles encadrées et anneaux de caractéristique mixte. —

Lemme 6.2. — *Il existe $g \in W[[u_1, ..., u_n]]$ à coefficients dans $W^\times$ tel que :*

$$R \simeq W[[u_1, ..., u_n]]/(p - g),$$

où W est un anneau local régulier complet de dimension 1 dont l'idéal maximal est engendré par p.

Preuve : On sait qu'il existe un morphisme surjectif :

$$\varphi : W[[u_1, ..., u_n]] \twoheadrightarrow R,$$

tel que $\varphi(u_i) = x_i$ et $\varphi_{|W} = id_W$. Comme R est intègre (voir [**8**], Corollaire 17.1.3), $\ker\varphi$ est un idéal premier et, en comparant les dimensions, on en déduit que $ht(\ker\varphi) \leqslant 1$. Or, $W[[u_1, ..., u_n]]$ est factoriel donc, $\ker\varphi$ est un idéal principal engendré par f. Comme $p \in \mathfrak{m}$, il existe $a_1, ..., a_n \in R$ tels que :

$$p = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Or, φ est surjective, il existe donc $b_1, ..., b_n \in W[[u_1, ..., u_n]]$ tes que $\varphi(b_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Notons $g = b_1 u_1 + ... + b_n u_n$, alors, $p - g \in \ker\varphi$.
Si un des b_i est divisible par p, en notant $b_i = pb'_i$, $b'_i \in W[[u_1, ..., u_n]]$, on remplace b_i par $b'_i g$. En itérant ce processus, après un nombre au plus dénombrable de pas, on peut supposer que tous les b_i sont non divisibles par p et donc $b_i \in W^\times$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Vu que p est un paramètre régulier de $W[[u_1, ..., u_n]]$, l'idéal $(p - g)$ est premier, de hauteur 1 et inclu dans $\ker\varphi$, d'où :

$$\ker\varphi = (p - g).$$

avec $g \in (u_1, ..., u_n)$ à coefficients non divisibles par p, donc dans $W^\times$.

□

Remarque 6.3. — Si R est ramifié ($p \in \mathfrak{m}^2$) alors $g \in (u_1, ..., u_n)^2$.

À partir de maintenant on suppose que :

$$R = W[[u_1, ..., u_n]]/(p - g),$$

avec $g \in (u_1, ..., u_n)$ à coefficients dans $W^\times$. L'idéal maximal de R est $\mathfrak{m} = (u_1, ..., u_n)$.

Pour $j \in \{1, ..., n\}$, notons K_j le corps des fractions de $W[[u_1, ..., u_j]]$. Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$. Si $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_l)$, on note :

$$\boldsymbol{Q}_{j,l+1}^{\gamma} = \prod_{i=1}^{l} Q_{j,i}^{\gamma_i}.$$

Pour $j \in \{r, ..., n\}$ et $\mathbf{i} = (i_{r+1}, ..., i_j) \in \Lambda_{r+1} \times ... \times \Lambda_j$, on définit par récurrence une valuation $\nu_{\mathbf{i}}$ de K_j comme suit :
Si $j = r$, on pose $\nu_\emptyset = \nu_{|K_r}$. Supposons que la valuation $\nu_{(i_{r+1},...,i_{j-1})}$ de K_{j-1} soit déjà construite. Si $f \in K_{j-1}[u_j]$, $\nu_{\mathbf{i}}(f)$ est défini comme l'extension de $\nu_{(i_{r+1},...,i_{j-1})}(f)$ déterminée par $\boldsymbol{Q}_{j,i_j+1}$. Si $f \in K_r[[u_{r+1}, ..., u_j]]$, posons N suffisamment grand de telle sorte que $f = f_1 + f_2$ avec :

(1) $f_1 \in K_r\left[\left[u_{r+1}, \ldots, u_{j-1}\right]\right]\left[u_j\right]$;

(2) $f_2 \in \left(u_j^N\right) K_r\left[\left[u_{r+1}, \ldots, u_j\right]\right]$;

(3) $\nu_{0,u}(f_2) > \nu_{\mathbf{i}}(f_1)$.

On pose alors $\nu_{\mathbf{i}}(f) = \nu_{\mathbf{i}}(f_1)$.

Lemme 6.4. — *Supposons que, pour $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, l'ensemble $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ soit un ensemble 1-complet de polynômes-clés pour la valuation $\nu_{|K_j}$ ne possédant pas de polynôme-clé limite. Si $\nu(p) \notin p\Gamma$, alors, à une suite formelle encadrée près, on peut supposer R de la forme :*

$$R = R[r]\left[\left[u_{r+1}, \ldots, u_n\right]\right],$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel maximal.

Preuve : Considérons l'élément $g \in W\left[\left[u_1, \ldots, u_n\right]\right]$ du Lemme 6.2. Par le Théorème 3.2, pour tout $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, la collection $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ forme un ensemble complet de polynômes-clés, il existe donc $\mathbf{i} = (i_{r+1}, \ldots, i_n) \in \Lambda_{r+1} \times \ldots \times \Lambda_n$ tel que :

$$\nu_{\mathbf{i}}(g) = \nu(g) \text{ et } \nu\left(Q_{j,i}\right) \leqslant p,$$

pour tout $i \leqslant i_j$, $j \in \{r+1, \ldots, n\}$ (on rappelle que, vu la Remarque 6.1 et comme $p = g$ dans R, $\nu(g) \in \Gamma_1$).
Notons $\overline{g}$ l'image de g modulo p dans $k\left[\left[u_1, \ldots, u_n\right]\right]$ et $\overline{\nu}_{\mathbf{i}}$ la valuation définie sur $k\left(\left(u_1, \ldots, u_r\right)\right)\left[\left[u_{r+1}, \ldots, u_n\right]\right]$ comme la valuation $\nu_{\mathbf{i}}$ mais en regardant les éléments modulo p. En appliquant le Théorème 5.1 à la valuation $\overline{\nu}_{\mathbf{i}}$, il existe une suite formelle encadrée $k\left[\left[u_1, \ldots, u_n\right]\right] \rightarrow k'\left[\left[u'_1, \ldots, u'_n\right]\right]$ telle que $\overline{g}$ soit un monôme en u' multiplié par une unité de $k'\left[\left[u'_1, \ldots, u'_n\right]\right]$. On a alors :

$$\nu(g) = \nu_{\mathbf{i}}(g) = \overline{\nu}_{\mathbf{i}}\left(\overline{g}\right) = \nu_{0,u'}\left(\overline{g}\right).$$

En appliquant à chaque étape de l'algorithme du Théorème 5.1 les mêmes changements de variables à $W\left[\left[u_1, \ldots, u_n\right]\right]$, on obtient une suite $W\left[\left[u_1, \ldots, u_n\right]\right] \rightarrow (R^{(2)}, u^{(2)})$ telle que :

$$g = u_1^{(2)\alpha_1} \ldots u_r^{(2)\alpha_r} z + ph,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$, $z \in R^{(2)\times}$, $h \in R^{(2)}$. Or l'algorithme du Théorème 5.1 consiste en une répétition de n-suites élémentaires uniformisantes (Définition 4.37), ainsi, par la Proposition 4.10 et par choix de $\mathbf{i}$:

$$h \in \left(u_1^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}\right).$$

On en déduit donc que :

$$h \notin R^{(2)\times}.$$

On peut alors écrire :

$$p - g = p(1-h) - u_1^{(2)\alpha_1} \ldots u_r^{(2)\alpha_r} z = w(p - u_1^{(2)\alpha_1} \ldots u_r^{(2)\alpha_r} z'),$$

où $w = 1 - h \in R^{(2)\times}$ et $z' = zw^{-1} \in R^{(2)\times}$.
À une suite formelle encadrée près, on peut donc supposer que, dans R, on a :

$$p = u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r} z$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$, $z \in R^\times$.
Par hypothèses, comme $\nu(p) \notin p\Gamma$ et R est complet, il existe $\alpha_i \notin p\mathbb{Z}$ et donc :

$$z^{1/\alpha_i} \in R.$$

Quitte à faire le changement de variable :

$$v_i = u_i z^{1/\alpha_i},$$

on peut supposer que :

$$p = u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r} \in \mathfrak{m}^2.$$

Ainsi, à une suite formelle encadrée près, R s'écrit sous la forme :

$$R = W\left[\left[u_1, ..., u_n\right]\right] / \left(p - u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r}\right) \simeq R[r]\left[\left[u_{r+1}, ..., u_n\right]\right],$$

où $R[r] = W\left[\left[u_1, ..., u_r\right]\right] / \left(p - u_1^{\alpha_1} ... u_r^{\alpha_r}\right)$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r tel que $\nu_{|R[r]} = \nu_{0,(u_1,...,u_r)}$ et $rg.rat\left(\nu_{|R[r]}\right) = r$.

□

6.2. Un premier théorème de monomialisation. —

À partir de maintenant et ce jusqu'à la fin de la Section 6, on suppose que :

$$\nu(p) \notin p\Gamma,$$
$$R = R[r]\left[\left[u_{r+1}, ..., u_n\right]\right],$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié) de dimension r et tel que $\nu_{|R[r]}$ soit monomiale par rapport au système régulier de paramètres de $R[r]$ et de rang rationnel maximal.

Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $Frac\left(R[r]\left[\left[u_{r+1}, ..., u_{j-1}\right]\right]\right) \hookrightarrow Frac\left(R[r]\left[\left[u_{r+1}, ..., u_{j-1}\right]\right]\right)(u_j)$.

Théorème 6.5. — *Reprenons les hypothèses précédentes et supposons que, pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, l'ensemble $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ est un ensemble 1-complet de polynômes-clés ne possédant pas de polynôme-clé limite. Deux cas se présentent :*

(1) *Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que :

$$\left(e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right), e\left(R^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - r\left(R^{(l)}, u^{(l)}, \nu^{(l)}\right)\right) <_{lex} (e(R,\nu), n-r);$$

(2) *Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-2}} \left(R^{(l-1)}, u^{(l-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(l)}$ fois une unité de $R^{(l)}$.

Preuve : On procède par récurrence sur $n-r$. Si $n=r$ alors $R=R[r]$. En particulier,

$$\forall\, f \in R,\ \nu_{0,u}(f)=\nu(f).$$

Par la Remarque 4.42, $H=(0)$. Prenons alors un élément $f \in R$, par le Théorème 4.34, il existe une suite locale encadrée :

$$(R,u) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)},u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{i-2}} \left(R^{(i-1)},u^{(i-1)}\right) \xrightarrow{\pi_{i-1}} \left(R^{(i)},u^{(i)}\right)$$

telle que f soit un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$. En passant au complété à chaque pas, on obtient la suite formelle encadrée satisfaisant (2).

Supposons que $n-r>0$ et que l'on ait déjà construit une suite formelle encadrée pour toutes les valeurs strictement plus petites et satisfaisant la conclusion du Théorème 6.5. On va procéder comme dans la preuve du Théorème 5.1.

Proposition 6.6. — *Par le Lemme 6.4, on peut supposer que R s'écrit sous la forme :*

$$R=R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_n\right]\right],$$

où $R[r]$ est un anneau local régulier complet (éventuellement ramifié). Notons $R_{n-1}=R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]$ et supposons que $H \not\subset R_{n-1}$ et $H \cap R_{n-1}=(0)$. Supposons enfin que le Théorème 6.5 est vrai en dimension $n-1$.
Soit $f \in H\setminus\{0\}$. À une suite formelle encadrée près, f s'écrit sous la forme :

$$f=\alpha f_{n-1}P;$$

où $\alpha \in R^{\times}$, $f_{n-1} \in R_{n-1}$ et P est un polynôme unitaire en u_n.

Preuve : La preuve est la même que celle de la Proposition 5.2.

□

Corollaire 6.7. — *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition 6.6, on a :*

$$ht\,(H) \leqslant 1.$$

Preuve : La preuve est la même que celle de la Proposition 5.3.

□

Corollaire 6.8. — *Sous les hypothèses de la Proposition 6.6, à une suite formelle encadrée près, l'idéal H est principal engendré par un polynôme unitaire en u_n.*

Preuve : C'est une conséquence directe du Corollaire 6.7.

□

Soit $R^{(i)}$ un anneau local apparaissant dans une suite formelle encadrée. Par le Lemme 6.4, on peut écrire $R^{(i)}$ sous la forme $B\left[\left[u_{n_i}\right]\right]$ où B est un anneau régulier (éventuellement ramifié) et si $H^{(i)} \cap R^{(i)} \neq (0)$, alors $H^{(i)} \subset \mathfrak{m}^{(i)2}$. Par le Corollaire 6.8, $H^{(i)}$ est engendré par un polynôme unitaire en u_{n_i}.

Proposition 6.9. — *Sous les hypothèses du Théorème 6.5, pour tout polynôme $f \in R[r]\left[\left[u_{r+1},...,u_{n-1}\right]\right]\left[u_n\right]$, il existe une suite formelle encadrée $(R,u)\to(R',u')$ telle que f soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'.*

Preuve du Théorème 6.5 en supposant la Proposition 6.9 vraie : C'est la même que celle de la preuve du Théorème 5.1, il suffit de remplacer $k[[u_1,...,u_{n-1}]][u_n]$ par $R[r][[u_{r+1},...,u_{n-1}]][u_n]$.

□

Preuve de la Proposition 6.9 : C'est la même que celle de la preuve de la Proposition 5.6, il suffit de remplacer $k[[u_1,...,u_{n-1}]][u_n]$ par $R[r][[u_{r+1},...,u_{n-1}]][u_n]$. Pour conclure, il nous suffit d'avoir le résultat voulu sur les polynômes-clés comme nous allons le voir dans la Proposition 6.10.

Proposition 6.10. — *Sous les hypothèses du Théorème 6.5, il existe une suite formelle encadrée :*

$$(R,u) \to (R',u'),$$

où $u=(u_1,...,u_n)$, $u'=(u'_1,...,u'_n)$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $1\leqslant q\leqslant l_0$, les polynômes-clés $Q_{n,q}$ et $Q_{n,l}$ sont des monômes en u' multipliés par une unité de R' ;*
2. *Dans R', u'_n divise $Q_{n,l}$ mais u'^2_n ne divise pas $Q_{n,l}$.*

Preuve de la Proposition 6.9 en supposant la Proposition 6.10 vraie : C'est la même que celle de la preuve de la Proposition 5.6, il suffit de remplacer $k[[u_1,...,u_{n-1}]]$ par $R[r][[u_{r+1},...,u_{n-1}]]$.

□

Preuve de la Proposition 6.10 : C'est la même que celle de la preuve de la Proposition 5.7.

□

7. Un théorème de monomialisation sans complétion

Soient $(R,\mathfrak{m},k)$ un anneau local régulier complet de dimension n tel que $\mathfrak{m}=(u)=(u_1,...,u_n)$. Soit ν une valuation de $K=Frac(R)$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Notons Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non nul de Γ. On pose :

$$H=\{f\in R\,|\,\nu(f)\notin\Gamma_1\}.$$

On suppose de plus que :

$$n=e(R,\nu)=emb.dim\,(R/H)\,,$$

c'est-à-dire que :

$$H\subset\mathfrak{m}^2.$$

La valuation ν considérée est la composée de la valuation $\mu: L^*\to\Gamma_1$ de rang 1 centrée en R/H, où $L=Frac(R/H)$, avec la valuation $\theta: K^*\to\Gamma/\Gamma_1$, centrée en R_H, telle que $k_\theta\simeq\kappa(H)$.

Considérons un sous-anneau local $(T,\mathfrak{m}_T)$ de R, non nécessairement noethérien, contenant $u_1,...,u_n$ et tel que $T/\mathfrak{m}_T\simeq k$. Soient $J\subset\{1,...,n\}$ et $j\in J$ tels que :

$$\nu(u_j)\leqslant\nu(u_i),\ i\in J.$$

Soit $\pi_0 : (R,u) \to \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right)$ l'éclatement encadré le long de (u_J) par rapport à ν (Définition 4.11), notons $\mathfrak{m}^{(1)}$ l'idéal maximal de $R^{(1)}$.

Définition 7.1. — *Le **transformé de T par π_0** est l'anneau :*

$$T^{(1)} = T\left[u'_{j\setminus\{0\}}\right]_{\mathfrak{m}_1 \cap T\left[u'_{j\setminus\{0\}}\right]}.$$

*On dit que l'éclatement π_0 est **défini sur T** si $u^{(1)} \subset T^{(1)}$.*
Pour une suite locale encadrée de la forme :

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right),$$

*les notions de **transformé** $T^{(i)}$ de T et de **définie sur T** sont définies par récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant l$. Plus précisément, la notion de transformé $T^{(i)}$ n'est définie qu'en supposant la suite locale encadrée $(R,u) \to \left(R^{(i-1)}, u^{(i-1)}\right)$ définie sur T.*

Nous allons montrer qu'indépendamment de la caractéristique de k_ν, s'il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés sans polynôme-clé limite pour un anneau local régulier complet $(R, \mathfrak{m}, k)$, il va exister une suite locale encadrée (et non plus formelle encadrée) qui fasse décroître l'invariant $e(R,\nu)$. Si R est de caractéristique mixte, il faut supposer de plus que $\nu(p) \notin p\Gamma$, $p = car(k_\nu)$.

Théorème 7.2. — *Reprenons les hypothèses précédentes et supposons de plus qu'il existe un ensemble 1-complet de polynômes-clés ne possédant pas de polynôme-clé limite. Si R est de caractéristique mixte, on suppose également que $\nu(p) \notin p\Gamma$, où $p = car(k_\nu)$. Alors :*

1. (a) *Ou bien $H \neq (0)$ et il existe une suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que :*
$$e(R',\nu) < e(R,\nu);$$
   (b) *Ou bien $H = (0)$ et pour tout $f \in R$, il existe une suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ telle que f soit un monôme en u' multiplié par une unité de R'.*
2. *La suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ de (1) peut être choisie définie sur T.*

Preuve : Par les théorèmes 5.1 et 6.5, pour $f \in R$, il existe une suite formelle encadrée :

$$(R,u) = \left(R^{(0)}, u^{(0)}\right) \xrightarrow{\pi_0} \left(R^{(1)}, u^{(1)}\right) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} \left(R^{(l)}, u^{(l)}\right)$$

telle que, ou bien $e\left(R^{(l)},\nu\right) < e(R,\nu)$ si $H \neq (0)$, ou bien f est un monôme en $u^{(l)}$ multiplié par une unité de $R^{(l)}$ si $H = (0)$. À partir de cette suite formelle encadrée, nous allons construire, par approximation $\left(u^{(l)}\right)$-adique, la suite locale encadrée $(R,u) \to (R',u')$ recherchée.
Plus précisément, pour $s \in \{1,...,l\}$, considérons $\pi_{s-1} : \left(R^{(s-1)}, u^{(s-1)}\right) \to \left(R^{(s)}, u^{(s)}\right)$ une des transformations de la suite formelle encadrée, elle consiste en une suite élémentaire uniformisante $\pi_{0,s}$ (Définition 4.37), qui résout les singularités d'un certain polynôme-clé, suivie d'une complétion formelle. Ainsi, quitte à renuméroter les variables, $R^{(s)}$ est obtenu à partir de $R^{(s-1)}$ en adjoignant des

expressions rationnelles $u_1^{(s)}, ..., u_r^{(s)}, u_n^{(s)}$ en terme d'éléments de $R^{(s-1)}$ (dont les dénominateurs sont des monômes en $u^{(s-1)}$), puis par passage au complété en le centre de la valuation ν.
Pour $j \in \{1, ..., n\}$, notons $\mu_{j,s}$ la somme des valuations pour ν des numérateurs et dénominateurs de $u_j^{(s)}$, vu en tant que monôme en $u^{(s-1)}$. On note alors :

$$\mu_s = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\mu_{j,s}\}.$$

Soit $\beta \in \Gamma_1$ tel que $\beta > \sum\limits_{q=1}^{l} \mu_q$. Notons I_s le $\nu_{0,u^{(s)}}$-idéal de $R^{(s)}$ défini par :

$$I_s = \left\{ g \in R^{(s)} \;\middle|\; \nu_{0,u^{(s)}}(g) \geqslant \beta - \sum_{q=1}^{s} \mu_q \right\}.$$

Nous allons construire, par récurrence sur $s \in \{1, ..., l\}$, une suite locale encadrée :

$$(R, u) = \left(\tilde{R}^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \left(\tilde{R}^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \cdots \xrightarrow{\tilde{\pi}_{l-1}} \left(\tilde{R}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}\right),$$

définie sur T telle que, pour tout s et $j \in \{1, ..., n\}$, on ait :

$$(\mathrm{HR}): \ \nu_{0,u^{(s-1)}}\left(\tilde{u}_j^{(s)} - u_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s+1}^{l} \mu_q.$$

Supposons que la suite locale encadrée soit construite à l'étape $s-1$. Quitte à renuméroter les variables si nécessaire, on peut supposer que :

$$u_j^{(s)} = u_j^{(s-1)}, \ r+1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

L'hypothèse de récurrence :

$$\nu_{0,u^{(s-2)}}\left(\tilde{u}_j^{(s-1)} - u_j^{(s-1)}\right) > \sum_{q=s}^{l} \mu_q,$$

et le fait que les $u_1^{(s)}, ..., u_r^{(s)}$ s'expriment de manière rationnelle en fonction de $u^{(s-1)}$ entraîne que (HR) est vrai pour $j \in \{1, ..., n-1\}$.
Reprenons les notations de la sous-section 4.5. Considérons :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_j \nu\left(u_j^{(s-1)}\right) = \overline{\alpha} \nu\left(u_n^{(s-1)}\right),$$

la plus petite combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de $\nu\left(u_1^{(s-1)}\right), ..., \nu\left(u_r^{(s-1)}\right), \nu\left(u_n^{(s-1)}\right)$ telle que $\overline{\alpha} \in \mathbb{N}^*$. Notons :

$$y = \left(u_1^{(s-1)}\right)^{\alpha_1} ... \left(u_r^{(s-1)}\right)^{\alpha_r}$$

et

$$Q^{(s)} = \sum_{i=0}^{d} b_i y^{d-i} \left(u_n^{(s-1)}\right)^{i\overline{\alpha}},$$

le polynôme Q apparaissant dans la Proposition 4.35 correspondant à la suite élémentaire uniformisante $\pi_{0,s}$. Pour chaque b_i apparaissant dans $Q^{(s)}$, choisissons $\tilde{b}_i \in \left(\tilde{R}^{(s-1)}\right)^{\times} \cap T^{(s-1)}$ tel que :

$$\nu_{0,u^{(s-1)}}\left(b_j^{(s)} - \tilde{b}_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s+1}^{l} \mu_q.$$

Posons :

$$\tilde{Q}^{(s)} = \sum_{i=0}^{d} \tilde{b}_i y^{d-i} \left(u_n^{(s-1)}\right)^{i\overline{\alpha}},$$

et $\tilde{\pi}_{s-1}$ la n-suite élémentaire uniformisante déterminée par ces données. Ainsi, avec $Q^{(s)}$ et $\tilde{Q}^{(s)}$, on montre que (HR) est vraie pour $j = n$.
La suite locale encadrée que l'on vient de construire par récurrence :

$$(R, u) = \left(\tilde{R}^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} \left(\tilde{R}^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \cdots \xrightarrow{\tilde{\pi}_{l-1}} \left(\tilde{R}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}\right)$$

définie sur T, telle que, pour tout s et $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\nu_{0,u^{(s-1)}}\left(\tilde{u}_j^{(s)} - u_j^{(s)}\right) > \sum_{q=s+1}^{l} \mu_q,$$

implique que $in_\nu\left(u_j^{(s)}\right) = in_\nu\left(\tilde{u}_j^{(s)}\right)$, vus en tant qu'éléments de $\left(gr_\nu\left(R^{(l)}\right)\right)^*$, algèbre qui contient la sous-algèbre $gr_\nu\left(\tilde{R}^{(s)}\right)$. De même, la valuation monomiale $\nu_{0,u^{(l)}}$ de $Frac\left(R^{(l)}\right)$, restreinte à $\tilde{R}^{(l)}$, coïncide avec la valuation monomiale $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}$. On a alors $in_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(u_j^{(s)}\right) = in_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(\tilde{u}_j^{(s)}\right)$, vus en tant qu'éléments de $\left(gr_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(R^{(l)}\right)\right)^*$, algèbre qui contient la sous-algèbre $gr_{\nu_{0,u^{(l)}}}\left(\tilde{R}^{(s)}\right)$.
Si $H = (0)$ et $f \in R \setminus \{0\}$ est monomialisé par la suite formelle encadrée, l'égalité précédente implique que :

$$f = \varpi + \tilde{f},$$

où ϖ est un monôme en $\tilde{u}^{(l)}$ et $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}(\tilde{f}) > \nu(\varpi)$.
Si $H \neq (0)$ et $f \in H \setminus \{0\}$ dont le transformé strict devient un paramètre régulier dans $R^{(l)}$, alors :

$$f = \tilde{Q}^{(l)} + \tilde{f},$$

où $\nu_{0,\tilde{u}^{(l)}}(\tilde{f}) > \nu(\tilde{Q}^{(l)})$. En appliquant le Corollaire 4.27, après une suite monomiale $\left(\tilde{R}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}\right) \to (R', u')$ (respectivement, en appliquant la Proposition 4.36, après une suite locale encadrée indépendante de $\tilde{u}_n^{(l)}$, dans le cas $H \neq (0)$), on est ramené à la situation où ϖ divise $\tilde{f}$, c'est-à-dire à la situation où $f = z\varpi$, z unité de R' (respectivement, $f = zg$, où g est un paramètre régulier de R' et z une unité de R', dans le cas $H \neq (0)$).

$\square$

8. Théorèmes d'uniformisation locale en caractéristique nulle

Soit S un anneau local noethérien. Pour montrer que S est transformé en un anneau régulier via une suite locale encadrée, il faut montrer que $\widehat{S}_{\overline{H}}$ et $\widehat{S}/\overline{H}$ le sont, $\overline{H}$ étant l'idéal premier implicite de $\widehat{S}$. Par le Théorème 4.17, si S est quasi-excellent alors $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. Dans un premier temps, nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, $\widehat{S}/\overline{H}$ est aussi régulier. Enfin, grâce à ces deux résultats nous montrerons le théorème d'uniformisation locale pour des valuations de rang 1 puis pour des valuations de rang quelconque grâce à [**16**].

8.1. Un théorème préliminaire d'uniformisation locale. —

Théorème 8.1. — *Soient $(S,\mathfrak{m},k)$ un anneau local noethérien intègre de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1, centrée en S, telle que $car\,(k_\mu)=0$.*
Notons $u=(u_1,...,u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$ et $\overline{H}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S}$.
Soient $f_1,...,f_s\in\mathfrak{m}$ tels que $\mu(f_1)=\min_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. Il existe alors une suite locale encadrée :

$$(S,u,k)=\left(S^{(0)},u^{(0)},k^{(0)}\right)\xrightarrow{\rho_0}\left(S^{(1)},u^{(1)},k^{(1)}\right)\xrightarrow{\rho_1}\cdots\xrightarrow{\rho_{i-1}}\left(S^{(i)},u^{(i)},k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :
Notons $\overline{H}^{(i)}$ l'idéal premier implicite de $\widehat{S^{(i)}}$ et $\overline{f_j}$ l'image de $f_j \mod \overline{H}^{(i)}$, $1\leqslant j\leqslant s$, alors :

1. *$\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier ;*
2. *Pour $1\leqslant j\leqslant s$, $\overline{f_j}$ est un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$;*
3. *Pour $1\leqslant j\leqslant s$, $\overline{f_1}$ divise $\overline{f_j}$ dans $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$.*

Preuve : Notons $\sigma:S\to\widehat{S}$ le morphisme de complétion formelle. Par le Théorème 4.16, μ s'étend de manière unique en une valuation $\widehat{\mu}$ centrée en $\widehat{S}/\overline{H}$. Notons $u=(y,x)$ tel que $x=(x_1,...,x_l)$, $l=emb.dim\left(\widehat{S}/\overline{H}\right)$, $y=(y_1,...,y_{n-l})$ et les images des $x_1,...,x_l$ dans $\widehat{S}/\overline{H}$ induisent un ensemble minimal de générateurs de $(\mathfrak{m}\widehat{S})/\overline{H}$.
Par le Théorème de structure de Cohen, on sait qu'il existe un anneau local régulier complet de caractéristique nulle R et un morphisme φ surjectif :

$$\varphi:R\twoheadrightarrow\widehat{S}/\overline{H}.$$

Notons $H=\ker\varphi$, comme $\overline{H}$ est un idéal premier (Théorème 4.16), H est un idéal premier de R. On choisit R de telle sorte que $\dim(R)=l$. Notons K le corps des fractions de R. Soit θ une valuation de K, centrée en R_H, telle que $k_\theta=\kappa(H)$. Si l'on regarde $\widehat{\mu}$ comme une valuation centrée en R/H via le morphisme φ, on peut considérer la valuation $\nu=\widehat{\mu}\circ\theta$ centrée en R et de groupe des valeurs Γ. Alors, Γ_1 est le plus petit sous-groupe isolé non nul de Γ et :

$$H=\{f\in R\mid \nu(f)\notin\Gamma_1\}.$$

De plus, $car\,(k_\nu) = car\,(k_\mu) = 0$. On s'est donc ramené aux hypothèses du Théorème 5.1.
Soit $T = \varphi^{-1}(\sigma(S))$, c'est un sous-anneau local de R d'idéal maximal $\varphi^{-1}(\sigma(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m} \cap T$. Ainsi, T contient $x_1, ..., x_l$ et :

$$T/(\mathfrak{m} \cap T) \simeq k.$$

Comme le Théorème 5.1 est vrai en caractéristique 0, on peut appliquer le Théorème 7.2. Ainsi, plusieurs cas se présentent :

1. Si $H \neq (0)$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que $e(R, \nu)$ décroisse strictement. En particulier, ce cas ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, on arrive ainsi à la situation où $H = (0)$ et donc R/H est régulier.
2. Si $H = (0)$, alors, pour chaque f_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, il existe une suite locale encadrée $(R, x) \to \left(R^{(i)}, x^{(i)}\right)$ telle que f_j soit un monôme en $x^{(i)}$ multiplié par une unité de $R^{(i)}$.

Par la Proposition 4.7, la propriété d'être un monôme multiplié par une unité est préservée par les suites locales encadrées. Ainsi, en itérant la procédure de (2), on arrive à la situation où tous les $f_1, ..., f_s$ sont simultanément des monômes en $x^{(i)}$. Après une suite locale encadrée de plus $(R, x) \to (R', x')$, on peut supposer que les f_j sont des monômes uniquement en $x'_1, ..., x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r = r(R, x, \nu)$. Enfin, en appliquant plusieurs fois le Corollaire 4.25, on est ramené à la situation où chaque f_j est un monôme en $x'_1, ..., x'_r$, $1 \leqslant j \leqslant s$ et, pour $j, j' \in \{1, ..., s\}$, f_j divise $f_{j'}$ ou $f_{j'}$ divise f_j. De plus, toutes ces suites locales encadrées sont définies sur T. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(R, x, k) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d] & \left(R^{(1)}, x^{(1)}, k^{(1)}\right) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\pi_{i-1}"] & \left(R^{(i)}, x^{(i)}, k^{(i)}\right) \arrow[d] \\
\left(\widehat{S}/\overline{H}, x, k\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_0"] & \left(\tilde{S}^{(1)}, x^{(1)}, k^{(1)}\right) \arrow[r, "\tilde{\pi}_1"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{\pi}_{i-1}"] & \left(\tilde{S}^{(i)}, x^{(i)}, k^{(i)}\right) \\
(S, u, k) \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[u] & \left(S^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right) \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[u] & \cdots \arrow[r, "\rho_{i-1}"] & \left(S^{(i)}, u^{(i)}, k^{(i)}\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Par ce que l'on vient de voir, la première colonne et la première ligne ont déjà été construites. En passant au transformé strict de $R/H \simeq \widehat{S}/\overline{H}$ à chaque étape de la suite $(\pi_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$, on construit la suite d'éclatements encadrés $(\tilde{\pi}_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ de $\widehat{S}/\overline{H}$ définie sur S. Enfin, la suite $(\tilde{\pi}_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ se relève en une suite locale encadrée $(\rho_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$.
Si R/H est singulier, par le Théorème 7.2, il existe une suite locale encadrée $(\pi_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ qui fasse décroître $e(R, \nu)$. Ainsi, la suite locale encadrée $(\rho_j)_{1 \leqslant j \leqslant i-1}$ résultante possède la propriété :

$$emb.dim\left(\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}\right) < emb.dim\left(\widehat{S}/\overline{H}\right).$$

Ceci n'arrive qu'un nombre fini de fois. Après un nombre fini de pas, on arrive à la situation où $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier. Maintenant, si l'on suppose que $\widehat{S^{(i)}}/\overline{H}^{(i)}$ est régulier, considérons $f_1, ..., f_s$ des éléments non nuls de S tels que $\mu(f_1) = \min_{1 \leqslant j \leqslant s}\{\mu(f_j)\}$, alors, par le (2) vu plus haut, on en déduit que, pour $1 \leqslant j \leqslant s$, $f_j \mod \overline{H}^{(i)}$ sont des monômes en $u^{(i)}$ et $f_1 \mod \overline{H}^{(i)}$ divise $f_j \mod \overline{H}^{(i)}$.

□

8.2. Uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1. —

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème d'uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1, nous allons donner un lemme un peu plus général et indépendant de la caractéristique.

Lemme 8.2. — *([**20**], Lemme 16.3) Soient $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien, ν une valuation centrée en A et J un ν-idéal premier de A non maximal. Notons $h = ht(J)$. Supposons que A_J et A/J soient réguliers. Notons $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$ et supposons que $u = (x, y)$ avec $x = (x_1, ..., x_l)$ et $y = (y_1, ..., y_{n-l})$ tels que :*

1. *x induit un système régulier de paramètres de A/J ;*
2. *il existe un ensemble minimal de générateurs $(\widehat{y}_1, ..., \widehat{y}_{n-l})$ de J et des monômes $\varpi_1, ..., \varpi_{n-l}$ en x tels que $\varpi_1/.../\varpi_{n-l}$ de sorte que $(\widehat{y}_{n-l-h+1}, ..., \widehat{y}_{n-l})$ induit un système régulier de paramètres de A_J et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_j \in A^\times$ tel que :*
$$\widehat{y}_j - y_j - \varpi_j v_j \in \varpi_j \mathfrak{m}^N,$$
$1 \leqslant j \leqslant n-l$. Remarquons que, par convention, on peut avoir $y_j = \widehat{y}_j$, $\varpi_j = 0$, $v_j = 1$ et $(y) = J$.

Soient $f_1, ..., f_s \in A$ tels que :
$$\nu(f_1) \leqslant ... \leqslant \nu(f_s).$$
Soit $(T, \mathfrak{m}_T)$ un sous-anneau local de A non nécessairement noethérien tel que $T/\mathfrak{m}_T = k$. Enfin, supposons que pour tout $g_1, ..., g_t \in A$ tels que :
$$\nu(g_1) \leqslant ... \leqslant \nu(g_t),$$
il existe une suite locale encadrée $(A, u) \to (A', u')$ indépendante de y et définie sur T telle que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant t$, $g_j \mod J'$ soit un monôme en u' et $g_q \mod J'$ divise $g_i \mod J'$, $1 \leqslant q \leqslant i \leqslant t$, où J' est le transformé strict de J dans A'.
Il existe alors une suite locale encadrée $(A, u) \to (A'', u'')$ par rapport à ν et définie sur T telle que A'' soit régulier.
Supposons de plus que l'une au moins des deux conditions suivantes soit vérifiée :

(3) *$f_i \notin J$, $1 \leqslant i \leqslant s$;*

(4) *$y_j = \widehat{y}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n-l$ (donc $J = (y)$), $T = A$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, f_i est un monôme en $(y_{n-l-h+1}, ..., y_{n-l})$ et f_i/f_{i+1} dans A_J.*

La suite locale encadrée $(A,u) \to (A'',u'')$ *précédente peut alors être choisie de telle sorte que les* f_i *soient des monômes en* u'' *multipliés par une unité de* A'' *et telle que* f_i/f_{i+1} *dans* A'', $1 \leqslant i \leqslant s$.

Preuve : Nous ne donnerons qu'une idée de preuve, pour plus de détails, on peut consulter [**20**]. Si $J = (0)$, il n'y a rien à montrer ; supposons donc que $J \neq (0)$. À partir de la suite locale encadrée $(A,u) \to (A',u')$, on veut construire une suite locale encadrée $(A,u) \to (A'',u'')$ définie sur T telle que A'' soit régulier. Pour cela il suffit d'avoir :

$$A'' = Fitt_h(J''/J''^2),$$

où $Fitt_h(J''/J''^2)$ est le h-ième idéal de Fitting de J''/J''^2. Par hypothèse et après une suite locale encadrée n'impliquant que des variables en x, on peut se ramener à la situation où $Fitt_h(J'/J'^2)$ est principal et engendré par un monôme en x, noté a. Quitte à renuméroter les variables de y, on peut supposer qu'il existe $n-l-h$ relations de la forme :

$$\psi_j = a\widehat{y}_j + \sum_{q=n-l-h+1}^{n-l} a_{j,q}\widehat{y}_q + g_j,$$

où $g_j \in J'^2$ et a divise $a_{j,q}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$ et $n-l-h+1 \leqslant q \leqslant n-l$. Si on a (4), alors :

$$\nu_{0,u}(y_j) > \nu(a),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Comme J est un ν-idéal alors $y_j \in J$ et $a \notin J$. Supposons que l'on n'ait pas (4) et prenons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$N > \frac{1}{\nu_{0,u}(\mathfrak{m})}\left(\nu(\varpi_{n-l}) + \max_{\substack{1\leqslant q\leqslant s\\ f_q\notin J}}\{\nu(f),\nu(a)\}\right).$$

Considérons une variable x_j de x telle que x_j^α divise ϖ_1 pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On éclate l'idéal (y,x_j) et on répète cette procédure α fois. On fait de même pour toutes les autres variables divisant ϖ_1. On arrive alors à la situation où :

$$\nu_{0,u'}(y_1') > \nu(a) + \nu(\varpi_{n-l}) - \nu(\varpi_1).$$

On refait pareil pour toutes les autres variables de y ; on est ainsi ramené à la situation où, pour ces nouvelles variables :

$$\nu_{0,u}(y_j') > \nu(a),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Pour chaque variable x_j de x divisant a, on éclate en l'idéal (y,x_j). Ces éclatements ont pour effet de multiplier a et les $a_{j,q}$ par x_j ainsi que les $g_1,...,g_t$ par x_j^γ où $\gamma \geqslant 2$. Après un nombre fini de fois, a divise g_j et donc a divise ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$. Ainsi, pour $1 \leqslant j \leqslant n-l-h$, les y_j s'expriment comme une fonction des variables restantes modulo $\mathfrak{m}^2$. Ceci fait donc décroître $emb.dim(A)$ et A est régulier, à une suite formelle encadrée près.

À partir de maintenant on peut supposer que $h = n-l$; pour terminer il faut montrer que les f_i sont des monômes en u'' multipliés par une unité de A''. Quitte à diviser f_i

par un monôme en y, on peut supposer que (3) est toujours vérifiée. Si (4) est vérifiée alors :

$$\nu_{0,u}(y'_j) > \nu(f_i),\ 1 \leqslant j \leqslant n-l,\ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Si (4) n'est pas vérifiée, l'inégalité précédente reste vraie par le choix de N. Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, on a :

$$f_i = \rho_i + \tilde{f}_i,$$

où ρ_i est un monôme en x et $\nu_{0,u}(\tilde{f}_i) > \nu_{0,u}(\rho_i)$. On applique le Corollaire 4.27 à chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, et on obtient le résultat cherché.

□

Passons maintenant au théorème d'uniformisation locale plongée pour des valuations de rang 1 sur un anneau équicaractéristique dont le corps résiduel est de caractéristique nulle.

Théorème 8.3. — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et μ une valuation de L de rang 1 et de groupe des valeurs Γ_1, centrée en S, telle que car $(k_\mu) = 0$.*
Notons $u = (u_1, ..., u_n)$ un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$.
Soient $f_1, ..., f_s \in \mathfrak{m}$ tels que $\mu(f_1) = \min_{1\leqslant j\leqslant s}\{\mu(f_j)\}$. Il existe alors une suite locale encadrée :

$$(S, u, k) = \left(S^{(0)}, u^{(0)}, k^{(0)}\right) \xrightarrow{\rho_0} \left(S^{(1)}, u^{(1)}, k^{(1)}\right) \xrightarrow{\rho_1} \cdots \xrightarrow{\rho_{i-1}} \left(S^{(i)}, u^{(i)}, k^{(i)}\right),$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *$S^{(i)}$ est régulier ;*
2. *Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_j est un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $S^{(i)}$;*
3. *Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, f_1 divise f_j dans $S^{(i)}$.*

En d'autres termes, μ admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété 2.11.

Preuve : Reprenons les notations du Théorème 8.1. On a vu qu'il existe un morphisme surjectif :

$$\psi : \widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{S}/\overline{H} \simeq R/H.$$

Par le Théorème 8.1, après une suite locale encadrée auxiliaire, on peut supposer que $\widehat{S}/\overline{H}$ est régulier et donc que $R/H \simeq k[[x_1, ..., x_l]]$. Ainsi, il existe un ensemble de générateurs $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, ..., \widehat{y}_{n-l})$ de $\overline{H}$ et des séries formelles $\phi_j \in k[[x_1, ..., x_l]]$ tels que :

$$\widehat{y}_j = y_j + \phi_j \in \widehat{S},\ 1 \leqslant j \leqslant n-l.$$

Quitte à renuméroter les y_j, on peut supposer que :

$$\mu(y_1) \leqslant \mu(y_2) \leqslant ... \leqslant \mu(y_{n-l}).$$

En appliquant le Corollaire 4.27 aux monômes de ϕ_j, $1 \leqslant j \leqslant n-l$, on peut supposer que :

$$\phi_j = \varpi_j \widehat{v}_j,$$

où les ϖ_j sont des monômes en $x_1, ..., x_l$, $\widehat{v}_j \in k[[x_1, ..., x_l]]^\times$ et tels que :

$$\varpi_1 / ... / \varpi_{n-l}.$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\forall\, j \in \{1, ..., n-l\},\ \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, v_j \in S^\times,\ \widehat{y}_j - y_j - \varpi_j v_j \in \varpi_j \mathfrak{m}^N.$$

Enfin, rappelons que, par le Corollaire 4.17, l'anneau $\widehat{S}_{\overline{H}}$ est régulier. On applique alors le Lemme 8.2 à $A = \widehat{S}$, $J = \overline{H}$, $T = S$ et $\nu = \mu$. On en déduit ainsi une uniformisation locale plongée (Propriété 2.11) de $\widehat{S}$. Or S est quasi-excellent, donc le morphisme $S \to \widehat{S}$ est régulier et on obtient ainsi une uniformisation locale plongée (Propriété 2.11) de S.

□

8.3. Théorèmes d'uniformisation locale plongée. —

Corollaire 8.4. — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$.*
Alors, ν admet une uniformisation locale plongée au sens de la Propriété 2.11.

Preuve : On applique le Théorème 8.3 et le Théorème 1.3 de [**16**].

□

Corollaire 8.5. — *Soient $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local intègre quasi-excellent de corps des fractions L et ν une valuation de L centrée en S et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$.*
Pour I un idéal de S, la paire (S, I) admet une uniformisation locale plongée par rapport à ν au sens de la Définition 2.9.

Preuve : C'est une application immédiate du Corollaire 8.4.

□

Corollaire 8.6. — *Soit S un schéma quasi-excellent tel que pour tout $\xi \in S$, car$(\mathcal{O}_{S,\xi}/\mathfrak{m}_{S,\xi}) = 0$. Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Il existe alors un éclatement $\pi : S' \to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*
Soient X' le transformé strict de X par π, ξ' le centre de ν sur X' et D le diviseur exceptionnel de π, alors $(\mathcal{O}_{X',\xi'}, \mathcal{I}_{D,\xi'})$ admet une uniformisation locale plongée par rapport à ν au sens de la Définition 2.9.

Preuve : C'est une application directe du Corollaire 8.5.

□

Théorème 8.7. — *Soit $(S, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local (non nécessairement intègre) quasi-excellent. Soient P un idéal premier minimal de S et ν une valuation du corps des fractions de S/P centrée en S/P et de groupe des valeurs Γ telle que car $(k_\nu) = 0$. Il existe alors un éclatement local $\pi : S \to S'$ par rapport à ν tel que S'_{red} soit régulier et Spec(S') soit normalement plat le long de Spec(S'_{red}), c'est-à-dire que l'anneau S admet une uniformisation locale par rapport à ν au sens de la Propriété 2.7.*

Preuve : Par le Corollaire 8.5, il existe une suite locale encadrée $(S,u) \to (S',u')$ le long de centres ne contenant aucune composante irréductible du transformé strict de $Spec\,(S_{red})$, telle que $Spec\,(S'_{red})$ soit régulier. On peut donc supposer que S_{red} est régulier. Il reste à montrer qu'il existe une suite locale encadrée telle que $Spec(S')$ soit normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$.
Soit $(y_1,...,y_h) = \sqrt{(0)} \subset S$, c'est l'idéal qui définit $Spec\,(S_{red})$ dans $Spec(S)$.
Rappelons que pour un anneau local noethérien $(R,\mathfrak{n})$, le *cône tangent* de $Spec(R)$ est défini par :

$$Spec\left(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathfrak{n}^n/\mathfrak{n}^{n+1}\right).$$

Il suffit de construire une suite locale encadrée telle que le cône tangent de $Spec(S')$ soit défini par un idéal engendré par des éléments de $k\left[\overline{y'_1},...,\overline{y'_h}\right]$, où y'_j est le transformé strict de y_j dans S' et $\overline{y_j}$ est l'image naturelle de y_j dans l'algèbre graduée de S', $1 \leqslant j \leqslant h$.
Notons $A = S_{red}$, $A' = S'_{red}$, on peut alors écrire S sous-la forme :

$$S = A\,[y_1,...,y_h]\,/I.$$

Notons $f_1,...,f_s \in A\,[y_1,...,y_h]$ un ensemble de générateurs de I et $(x_1,...,x_r)$ un ensemble minimal de générateurs de l'idéal maximal de A.
Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, notons $f_j = \sum\limits_{\alpha} c_{j,\alpha} y^\alpha \in A[y]$. On va construire une suite locale encadrée et une partition $(u') = (y',x')$ de (u') où (y') est le transformé strict de (y). Soit $\nu_{0,x'}$ la valuation monomiale de A' associée à x' et à $\left\{\nu\left(x'_j\right)\right\}_j$ (Corollaire 4.29). Par le Corollaire 8.5, on peut construire une suite locale encadrée $(S,u) \to (S',u')$ telle que les $c_{j,\alpha}$ soient des monômes en x' multipliés par une unité de A'.
Pour tout $j \in \{1,...,s\}$, notons $\mu_j = \max\{N \in \mathbb{N}^* \mid f_j \in (y)^N\}$ et $f'_j = \sum\limits_{\alpha} c'_{j,\alpha} y'^\alpha \in A'[y']$ le transformé strict de f_j dans $S' = A'[y']$. Pour chaque x'_t apparaissant dans $c'_{j,\alpha}$, pour un certain j et un certain α tel que $|\alpha| = \mu_j$, éclatons en l'idéal $(y'_1,...,y'_h,x'_t)$ un nombre suffisant de fois. On arrête le processus lorsque, pour $1 \leqslant j \leqslant s$ et α tel que $|\alpha| > \mu_j$, il existe $\tilde{\alpha}$ tel que $c'_{j,\tilde{\alpha}}$ divise $c'_{j,\alpha}$, avec $|\tilde{\alpha}| = \mu_j$. Par le Corollaire 4.27, on sait que, pour chaque j, il existe bien $\tilde{\alpha}$ tel que $|\tilde{\alpha}| = \mu_j$ et pour tout α, $c'_{j,\tilde{\alpha}}$ divise $c'_{j,\alpha}$. Ainsi, le cône tangent de $Spec(S')$ est défini par des polynômes qui ne dépendent que de $\overline{y'_1},...,\overline{y'_h}$. On en conclut que $Spec(S')$ est normalement plat le long de $Spec(S'_{red})$.

□

Corollaire 8.8. — *Soit S un schéma quasi-excellent tel que pour tout $\xi \in S$, $car(\mathcal{O}_{S,\xi}/\mathfrak{m}_{S,\xi}) = 0$. Soient X une composante irréductible de S_{red} et ν une valuation de $K(X)$ centrée en un point $\xi \in X$. Il existe alors un éclatement $\pi : S' \to S$ le long d'un sous-schéma de S, ne contenant aucune composante irréductible de S_{red} et ayant la propriété suivante :*
Soient X' le transformé strict de X par π et ξ' le centre de ν sur X', alors ξ' est un point régulier de X' et S' est normalement plat le long de X' en ξ'.

Références

[1] Edward Bierstone and Pierre D. Milman. *Local resolution of singularities.* In Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1988), volume 1420 of Lecture Notes in Math., pages 42–64. Springer, Berlin, 1990.

[2] Vincent Cossart and Olivier Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings.* J. Algebra, 320(3) :1051–1082, 2008.

[3] Vincent Cossart and Olivier Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II.* J. Algebra, 321(7) :1836–1976, 2009.

[4] Vincent Cossart and Olivier Piltant. *Resolution of Singularities of Arithmetical Threefolds I.* http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00873967, October 2013. 152 pages.

[5] Vincent Cossart and Olivier Piltant. *Resolution of Singularities of Arithmetical Threefolds II.* En préparation, 2013.

[6] Santiago Encinas and Herwig Hauser. *Strong resolution of singularities in characteristic zero.* Comment. Math. Helv., 77(4) :821–845, 2002.

[7] Santiago Encinas and Orlando Villamayor. *A new proof of desingularization over fields of characteristic zero.* In Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities (Sevilla, 2001), volume 19, pages 339–353, 2003.

[8] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (20) :259, 1964.

[9] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta, and M. Spivakovsky. *Valuations in algebraic field extensions.* J. Algebra, 312(2) :1033–1074, 2007.

[10] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta, M. Spivakovsky, and B. Teissier. *Extending a valuation centered in a local domain to the formal completion.* Proc. London Math. Soc., 105(3) :571–621, 2012.

[11] Heisuke Hironaka. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.* Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2), 79 :205–326, 1964.

[12] Heisuke Hironaka. *Theory of infinitely near singular points.* J. Korean Math. Soc., 40(5) :901–920, 2003.

[13] Wael Mahboub. *Key Polynomials.* Journal of Pure and Applied Algebra, 217(6) :989–1006, 2013.

[14] Wael Mahboub. *Une construction explicite de polynômes-clés pour des valuations de rang fini.* Thèse de Doctorat, Institut de Mathématiques de Toulouse, 2013.

[15] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra.* Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1980.

[16] Josnei Novacoski and Mark Spivakovsky. *Reduction of Local Uniformization to the rank one case*, 2012. preprint math.AC/arXiv :1204.4751v1.

[17] Olivier Piltant. *An axiomatic version of Zariski's patching theorem.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 107(1) :91–121, 2013.

[18] Jean-Christophe San Saturnino. *Défaut d'une extension, polynômes-clés et uniformisation locale.* En préparation, 2013.

[19] Jean-Christophe San Saturnino. *Théorème de Kaplansky effectif et uniformisation locale des schémas quasi-excellents.* Thèse de Doctorat, Institut de Mathématiques de Toulouse, 2013.

[20] Mark Spivakovsky. *Resolution of singularities I : local uniformization of an equicharacteristic quasi-excellent local domain whose residue field k satisfies* $[k : k^p] < \infty$. In preparation, 2013.

[21] Mark Spivakovsky. *A solution to Hironaka's polyhedra game.* In Arithmetic and geometry, Vol. II, volume 36 of Progr. Math., pages 419–432. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[22] Bernard Teissier. *Valuations, deformations, and toric geometry.* In Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), volume 33 of Fields Inst. Commun., pages 361–459. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[23] Michael Temkin. *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero.* Adv. Math., 219(2) :488–522, 2008.

[24] Orlando Villamayor. *Constructiveness of Hironaka's resolution.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 22(1) :1–32, 1989.

[25] Jarosław Włodarczyk. *Simple Hironaka resolution in characteristic zero.* J. Amer. Math. Soc., 18(4) :779–822, 2005.

[26] Oscar Zariski. *The reduction of the singularities of an algebraic surface.* Ann. of Math. (2), 40 :639–689, 1939.

Jean-Christophe SAN SATURNINO, Université Toulouse III Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9 (France)
E-mail : `san@math.ups-tlse.fr` • *Url :* `http://www.math.univ-toulouse.fr/~san/`