Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique **Année 2012-2013**

TD 3: Quelques propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 1 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-a \mid a \in A\} \quad \text{et} \quad A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A et B sont bornés alors $A + B$ aussi.
2. Montrer que si A est majoré alors $-A$ est minor et $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

1. Montrer que si A est finie, alors elle admet un maximum et un minimum.
2. Montrer que si A est de la forme $]a, +\infty[\cap\mathbb{Z}$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors elle admet un minimum.
3. Est-ce également vrai pour A de la forme $]a, +\infty[\cap\mathbb{Q}$?

Exercice 3 Montrer que l'ensemble $A = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Montrer qu'il possède un plus petit élément, une borne supérieure mais pas de maximum.

Exercice 4 Déterminer majorants, minorants, sup, inf, max et min (lorsque ils existent) des ensembles suivants :

1. $[0, 1[\cap\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{N}$;
3. $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 5 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on pose $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$.

1. Montrer que $f(x) = 3 + \frac{8}{x-2}$.
2. Déterminer majorants, minorants, sup, inf, max et min (lorsque ils existent) de $f(I)$, pour :
   (a) $I = [-1, 1]$;
   (b) $I =]-1, 1[$;
   (c) $I =]-\infty, 0[$;
   (d) $I = [-3, 2[$;
   (e) $]2, +\infty[$.

Exercice 6 On va montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (selon la manière dont on construit $\mathbb{R}$, cette propriété peut être immédiate, on ne suppose pas cela ici), c'est-à-dire qu'entre deux réels, il existe un rationnel.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, montrer qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{b-a} < q_0$.
2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p > q_0 a$. On note p_0 le plus petit élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant cette propriété.
3. Montrer que $a < \frac{p_0}{q_0} < b$.

Exercice 7 On va montrer que la division euclidienne existe dans $\mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, notons :

$$E = \{r \in \mathbb{N} \mid \exists\, q \in \mathbb{N} r = a - bq\}.$$

1. Montrer que E possède un min. Notons-le r_0.
2. Montrer que $b - r_0 > 0$.
3. Montrer qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq_0 + r_0$.
4. Montrer que le couple $(r_0, q_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est unique.