Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Feuille d'exercices numéro 3 du 29 novembre 2012

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

1 Calculs de DL

Exercice 1.1. On suppose que le DL de f en 0 d'ordre n est

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),$$

avec $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n$ polynôme de degré n et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

a) Montrer que le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(-x)$ est

$$\begin{aligned}
f(-x) &= P(-x) + x^n\varepsilon(x) \\
&= a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^na_nx^n + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Application : donner les $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\log(1+x)$, e^{-x}, $\frac{1}{1+x}$ et $(1-x)^\alpha$.

b) Si $p \geq 0$, montrer que le $\mathrm{DL}_{n+p}(0)$ de $x^pf(x)$ est

$$\begin{aligned}
x^pf(x) &= x^pP(x) + x^{n+p}\varepsilon(x) \\
&= a_0x^p + a_1x^{p+1} + \dots + a_nx^{n+p} + x^{n+p}\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Application : donner le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x^4 \sin x$.

c) Si $p \geq 0$, montrer que le $\mathrm{DL}_{np}(0)$ de $f(x^p)$ est

$$\begin{aligned} f(x^p) &= P(x^p) + x^{np}\varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \ldots + a_n x^{np} + x^{np}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Application : donner le $\mathrm{DL}_{12}(0)$ de $\sin(x^4)$, puis le $\mathrm{DL}_{12}(0)$ de $\sqrt{1+x^5}$.

Exercice 1.2.

Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\cos x - e^x \text{ à l'ordre } 4\,;\ \log(1+x) - \frac{1}{1-x} \text{ à l'ordre } 3\,;\ \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre } 3\,;$$

$$\sqrt[3]{1+x} \text{ à l'ordre } 3\,;\ \exp(x-1) \text{ à l'ordre } 3\,;\ \sqrt[6]{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x} \text{ à l'ordre } 3\,;$$

$$\sin x \tan x \text{ à l'ordre } 3\,;\ \frac{x}{e^x - 1} \text{ à l'ordre } 4\,;\ e^{\cos x} \text{ à l'ordre } 5\,;\ \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \text{ à l'ordre } 4\,;$$

$$\sqrt{1+x^3} \text{ à l'ordre } 6\,;\ \log(\cos x) \text{ à l'ordre } 4\,; \frac{\sin^2 x}{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,; \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \text{ à l'ordre } 3;$$

$$\exp(\sqrt{1+x}) \text{ à l'ordre } 2;\ \sqrt{1+\log(1+x)} \text{ à l'ordre } 2\,; \frac{1}{1+x} - \ln(1+x) \text{ à l'ordre } 3\,;$$

$$\log(1-x)\sin x \text{ à l'ordre } 4\,; \sin(\ln^2(1+x)) \text{ à l'ordre } 3\ .$$

$$\tan x \text{ à l'ordre } 4\,; \log(1+e^x) \text{ à l'ordre } 4\,; \log(1+\sin x);\ \sqrt{1+x^3} \text{ à l'ordre } 4.$$

2 Calculs de limites

Exercice 2.1.

Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sin x - x}{x^2};\ \frac{\sin x - x}{x\log(1-x^2)};\ \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)};\,;$$

$$\frac{x(\cos x - 1) + \tan x - \sin x}{x^2 \sin x + \tan x - x};\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{x^2+3}};\ \frac{1-\cos x}{(1-e^x)^2}.$$

3 Applications

Exercice 3.1.

Calculer la valeur en 0 des quatre premières dérivées de

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2} \text{ puis de } g(x) = \frac{x \sin x}{\cos\left(e^x - 1\right)}.$$

Exercice 3.2.

Prolonger par continuité en 0 la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}$.

Exercice 3.3.

Déterminer les branches à l'infini des fonctions suivantes (seule l'étude de h nécessite un DL) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{x^2}{1+\log x} \\ g(x) &= x^{\frac{1}{x}}; \\ h(x) &= \tfrac{x^2+\sin x}{\sqrt{x^2-x}}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4.

a) Étudier et tracer le plus précisément possible (y compris la position du graphe par rapport aux asymptotes) le graphe des fonctions

$$f(x) = e^x.\sqrt{x^2-x}, \text{ puis de } g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-x}} \text{ et enfin de } h(x) = x \log|2+\frac{1}{x}|.$$

Exercice 3.5.

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}.$$

a) Déterminer le domaine de définition de f, puis l'ensemble des réels où f est continue (on ne demande pas de tracer son graphe).

b) Montrer que

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$g_a(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g_a est définie sur tout $\mathbb{R}$, puis déterminer pour quelles valeurs de a, la fonction g_a est continue sur tout $\mathbb{R}$.

4 Exercices théoriques

Exercice 4.1.

Soit $f :]-\alpha, +\alpha[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2}.$$

Exercice 4.2.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a)* Soit $x_0 \in I$. Montrer que les deux conditions ci-dessous sont équivalentes. On dit alors que x_0 est un *point d'inflexion* de f.

$$(\imath) \quad \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \begin{cases}]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I, \\ \text{le graphe de } f \text{ sur }]x_0 - \alpha, x_0[\text{ est d'un côté de la tangente en } x_0, \\ \text{le graphe de } f \text{ sur }]x_0, x_0 + \alpha[\text{ est de l'autre côté de la tangente en } x_0. \end{cases}$$

$(\imath\imath)$ $\quad f''$ s'annule en x_0 en changeant de signe.

b) Donner un exemple où f'' s'annule sans changer de signe, montrant que cette condition est nécessaire.

c)* Soit $[a, b] \subset I$. On suppose que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(a) < f'(b).$$

Faire un dessin, puis montrer qu'il existe au moins un point d'inflexion $c \in]a, b[$.

Exercice 4.3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et tracer son graphe.

b) Est-elle continue en 0 ?

c) Prouver par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(\frac{1}{x})$$

pour un certain polynôme P_n.

d) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis donner son $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout n.

e) En déduire que *deux fonctions peuvent avoir le même DL en* 0 *de tout ordre, sans pour autant être égales.*

Exercice 4.4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0).

b) Montrer que

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x)$$

est le DL de f en 0 d'ordre 2.

c) Montrer de deux façons différents que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

d) Montrer que f n'est pas deux fois dérivables en 0. Il en résulte qu'*une fonction peut admettre un DL d'ordre* 2 *en* 0*, sans pour autant être deux fois dérivables en* 0.

e) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer

$$\lim_{x \to 0} f''(x).$$

5 DL en $a \neq 0$

Exercice 5.1.

Calculer les DL des fonctions suivantes en a et à l'ordre indiqués :

$\log x$ à l'ordre 3 en $a = 1$, puis en $a = 2$; $\dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 en $a = 1$, puis en $a = 2$;

$\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en $a = 1$, puis en $a = 2$; e^x à l'ordre 3 en $a = 1$, puis en $a = 2$;

6 Fonctions classiques

Exercice 6.1.

Calculer les DL des fonctions suivantes en 0 à l'ordre indiqué :

$(1+x)^x$ à l'ordre 3 en 0 ; $\left(\dfrac{1+x}{\cos x}\right)^x$ à l'ordre 3 en 0 ; $\left(\dfrac{\sin}{x}\right)^x$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 6.2.

Déterminer les limites suivantes, où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sont des paramètres réels :

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x+2}{x^2 \log x}; \lim_{x\to 0, x>0} 2x\log(x+\sqrt{x}); \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}, \lim_{x\to+\infty} (\frac{x}{1000} - 1000\log x);$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(\cosh x)}{1+x\sqrt{1+x}-\exp(\sin x)}; \lim_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}; \lim_{x\to\infty} (\log(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x^{x^x}\log x}{x^x - 1}; \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}; \lim_{x\to 0, x>0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 6.3.

Soit $f :]0, +1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x\log x - x + 1$.
a) Étudier les variations de f.
b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers 1.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions et que la plus petite est dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 6.4.

Soit $a \in [-1, +1]$ pour les deux premières questions, et $a \in \mathbb{R}$ pour la troisième.
a) On pose $\alpha = \arcsin a$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = a$ est

$$S = \{\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

[Indication : on utilisera la formule $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$.]
b) On pose $\beta = \arccos a$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = a$ est

$$S = \{\beta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\beta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) On pose $\gamma = \arctan a$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = a$ est

$$S = \{\gamma + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 6.5.

Soit f définie sur $[a, b]$, donnée par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{x+\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$.
a) Montrer que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Étudier les variations de f.

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, et en déduire l'allure à l'infini de f.

7 Équivalents

Exercice 7.1.

Calculer les équivalents en 0 des numérateurs et dénominateurs des limites de l'exercice 2.1, puis retrouver chacune de ces limites.

Exercice 7.2.

Calculer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\tan x - x}{x(1-\cos x)};\ \sqrt{1+x}^{\frac{1}{x}};\ \frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{\sin x};\ \frac{\cosh 2x - \cosh x}{2x\sinh 2x - x\sinh x};$$
$$\frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x};\ \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}.$$

Exercice 7.3.

Calculer les limites suivantes en $+\infty$, où a et b sont des paramètres réels :

$$\frac{x^5 - x^3 - 1}{2x^5 - 1};\ x\left(\sqrt{x^2-a} - \sqrt{x^2-b}\right).$$

8 Développements asymptotiques

Exercice 8.1.

Calculer les limites, puis les deux premiers termes du développement asymptotique en $+\infty$ des fonctions suivantes (où a est un paramètre > 0, et où on note $\sqrt[x]{a} := a^{\frac{1}{x}}$) :

$$\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^x;\ \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2};\ 3\sqrt[x]{2} - 2\sqrt[x]{3};\ \left(\sinh\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}};\ (x^2+1)^a - (x^2-1)^a.$$