Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Feuille d'exercices numéro 2 du 24 octobre 2012

1 Calcul de dérivées

Exercice 1. Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions de la feuille 1 dont on demandait le domaine de définition, puis calculer leur dérivée là où elle existe.

Exercice 2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $(c, d) \neq (0, 0)$. Montrer que

$$\forall x \neq -\frac{d}{c}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

(on calculera d'abord le domaine de définition de la fonction, puis son domaine de continuité et de dérivabilité). *Remarque : le lecteur reconnaitra plus tard le déterminant* 2×2 *au numérateur.*

Exercice 3. Après avoir calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer les dérivées de

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}; g(x) = \sqrt{1+x^2} : h(x) = \exp(\sqrt{\cos x}).$$

Exercice 4. Pour chaque expression suivante, dire à quelles conditions sur f elles sont définies, puis continues, puis dérivables, puis quelles sont leurs dérivées en fonction de f' :

$$f(\sin x); \sin(f(x)); f(\sin^2(x)); \sqrt{f(x)}; f(\sqrt{x}); \log f(x); f(\log x); f(e^x); \exp(f(x)); \frac{1}{1+f(x)^2}; \frac{1}{1-f(x)^2}$$

Exercice 5. Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée là où elle existe des fonctions

$$f(x) = x|x| \text{ (valeur absolue) }; g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}; h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6, suite de l'exercice 21 de la feuille 1.** On pose

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f n'est continue qu'en 0, et qu'elle n'est aussi dérivable qu'en 0.

Exercice 7*. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout $x \in I, x \neq a$ et que $\lim_{x \to a, x \neq a} f'(x) = \ell$.

Montrer qu'alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

2 Utilisation des dérivées

Exercice 8. En traçant le tableau de variations de $f(x) = x^5 - 5x + 1$, montrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ possède exactement 3 racines réelles (que l'on ne demande pas de calculer).

Exercice 9. Combien l'équation $\tan x = x$ possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$? Peut-on affiner dans quels intervalles appartiennent chacune de ces solutions ?

Exercice 10. Prouver les inégalités

a) $3x < 2\sin x + \tan x$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) $\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 11, prolongements par continuité. Soit f la fonction donnée par $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$. Calculer le domaine de définition de f. Peut-on la prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$?

b) Même question pour $g(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x}$.

Exercice 12, règle de l'Hospital. **a)** Soient f et g définies, continues et dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On suppose que $g'(x_0) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

b) Applications. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 1, x \neq 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\log x}; \lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{\sin x - 1}.$$

c) Applications, suite. Même question qu'à l'exercice 13, pour

$$f(x) = \frac{\log(\cos x)}{e^x - 1}.$$

Exercice 13. Étudier les fonctions $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+3}; g(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}; h(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$.

[Lorsqu'on demande d'"étudier une fonction", on demande en fait :

- son domaine de définition, de continuité et de dérivabilité ;

- le tableau de variations de f, ainsi que les limites aux bords du domaine de définition ;

- les asymptotes éventuelles du graphe ;

- enfin le tracé du graphe.]

Exercice 14*. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'alors il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f'(c) = 0$. [Indication : on montrera qu'il existe $0 < a < b$ tels que $f(a) = f(b)$.]

Exercice 15. Montrer qu'un polynôme de degré n sur $\mathbb{R}$ admet au plus n racines réelles.

Exercice 16. On pose $f(x) = x^2$. Pour $a < b$, deťerminer tous les $c \in]a, b[$ pour lesquels $fracf(b) - f(a)b - a = f'(c)$. Interprétation géométrique ?

Exercice 17*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \geq x$. Montrer qu'alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ [Indication : pensez aux accroissements finis].

Exercice 18*. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Calculer

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}.$$

Exercice 19. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

a) Soit $a \in I$, on suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que :
- $f(x) < f(a)$ pour tout $a - \varepsilon < x < a$, et
- $f(x) > f(a)$ pour tout $a < x < a + \varepsilon$.

Dessiner la situation.

b. Énoncer, prouver et dessiner ce qu'il se passe si on suppose $f'(a) < 0$.

c. Énoncer, prouver et dessiner tout ce qu'il peut se passer dans le cas où $f'(a) = 0$.

d) Application. On suppose maintenant que $a < b \in I$, que $f(a) = f(b)$, que $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Dessiner la situation, puis montrer qu'il existe $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tels que $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$ et $f(c_2) = 0$.

3 Équations différentielles du premier ordre

Exercice 20. Résoudre les ED suivantes, avec les conditions initiales données :

$$y' = 3y \text{ avec } y(0) = 1 \,;\; y' = -y \text{ avec } y(0) = 2 \,;\; y' = -2y \text{ avec } y(1) = 0.$$