Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique **Année 2012-2013**

TD 2: Le langage de la théorie des ensembles (2)
Dénombrement

Exercice 1 Soient E un ensemble fini et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble :

$$A\Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B).$$

Montrer que :

$$\operatorname{card}(A\Delta B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - 2\operatorname{card}(A \cap B).$$

Exercice 2 Soit E un ensemble à n éléments et $A \in \mathcal{P}(E)$ un ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E contenant exactement un élément de A ?

Exercice 3 (triangle de Pascal) Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer que :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Exercice 4 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair.

Exercice 5 En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Exercice 6 Décrire l'ensemble des bijections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$. Quel est son cardinal ? Pour chaque élément, trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\text{-fois}} = id.$$

Exercice 7 On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

1. Quelles sont les applications de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2\}$ qui ne sont pas surjectives ? En déduire S_3^2.
2. Calculer de même S_4^2. Donner une formule pour S_n^2 valable pour tout $n \geqslant 2$ et la démontrer.
3. Soit f une application de $\{1,2,3,4\}$ dans $\{1,2,3\}$. Si f n'est pas surjective, à quoi peut être égale son image $f(\{1,2,3,4\})$?
4. Combien d'applications de $\{1,2,3,4\}$ dans $\{1,2,3\}$ ont une image de cardinal 1 ? de cardinal 2 ? En déduire la valeur de S_4^3.
5. Donner une formule pour S_n^3 valable pour tout $n \geqslant 3$ et la démontrer.

Exercice 8 On appelle n-ième nombre triangulaire l'entier $t_n = 1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Pourquoi t_n est-il appelé triangulaire ? Écrire t_n comme un nombre de combinaisons. Calculer $t_1, \ldots, t_6$.

   On appelle n-ième nombre tétraèdral l'entier $T_n = t_1 + \cdots + t_n$.
2. Pourquoi T_n est-il appelé tétraèdral ? Calculer $T_1, \ldots, T_6$.
3. Calculer $\dfrac{T_{n+1}}{T_n}$ pour $n = 1, \ldots, 5$. Quelle formule semble se dégager ?
4. En remarquant que
   $$T_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} \cdot \frac{T_{n-1}}{T_{n-2}} \cdot \frac{T_{n-2}}{T_{n-3}} \cdot \frac{T_{n-3}}{T_{n-4}} \cdots \frac{T_5}{T_4} \cdot \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1},$$
   conjecturer une formule pour T_n. Vérifier qu'elle est vraie pour $n = 1, \ldots, 6$.
5. Exprimer la formule à l'aide des nombres de combinaisons et la démontrer.
6. Comment ceci se généralise-t-il ?