**Université Le Mirail** | **Toulouse**
**L1 MIASHS: méthodologie mathématique** | **Année 2012-2013**

---

# TD 1: Logique

---

**Exercice 1** Écrire en langage mathématique, avec des quantificateurs, les assertions suivantes :

1. Tout entier naturel est positif.
2. Le carré de tout nombre réel est positif.
3. Il existe un nombre complexe de carré égal à $-1$.
4. Si le double d'un nombre réel est supérieur au double d'un autre nombre réel, alors le premier est supérieur au second.
5. Tout nombre réel est compris entre deux entiers relatifs.
6. La partie réelle de tout nombre complexe est un nombre réel.
7. Il y a un nombre réel de carré plus petit que 1.

**Exercice 2** Dire, en le justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux et donner leur négation :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y \geqslant 0$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y \geqslant 0$.
3. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 \geqslant x$.

**Exercice 3** Pour $x \in \mathbb{R}$, compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :

1. $x^2 = 4 \ldots x = 2$.
2. $x > 1 \ldots x^2 > 1$.
3. $x^2 < 1 \ldots x \in ]-1, 1[$.

**Exercice 4** Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Exercice 5** On se propose de montrer de deux façons différentes que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est infini.

1. Supposons que $\mathbb{N}$ est un ensemble fini. Montrer que $\mathbb{N}$ a alors une borne supérieure. En déduire une contradiction.
2. Supposons que l'on dispose de $n$ éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathbb{N}$. Construire un $(n+1)$-ième élément et en déduire que $\mathbb{N}$ est infini.

**Exercice 6** Donner la négation des énoncés suivants et dire, en le justifiant, s'ils sont vrais ou faux :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ n^2 + 1 < m$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 1$.
3. Tous les martiens suivant l'UE MI0A01X ont trois bras.

**Exercice 7** Trouver l'erreur de logique dans l'assertion suivante :

*Socrate est mortel, les chats sont mortels donc Socrate est un chat.*

**Exercice 8** Pour quelles valeurs de $x$ l'énoncé $P(x)$ : $x^2 - 4x + 4 < 0$ ou $x^2 - 3x + 2 > 0$ est-il vrai ?

**Exercice 9** Les énoncés suivants sont-ils vrais ? Justifiez vos réponses.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$.
2. $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ x = |x|)$ ou $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R},\ (x < y \text{ ou } x \geqslant y)$.

4. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x < y$.
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x < y$.

**Exercice 10** On considère les propositions :

$(a)$ : *il existe un nombre réel non-rationnel u, tel que* $u^{\sqrt{2}}$ *soit rationnel ;*
$(b)$ : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *est rationnel.*

Montrer que $(b) \Rightarrow (a)$, puis que $non - (b) \Rightarrow (a)$. Que peut-on en déduire sur la véracité de $(a)$, $(b)$ et $non - (b)$ ?

**Exercice 11** Cet exercice est tiré du livre ≪ Symbolic Logic ≫(1897) de Lewis Carroll, auteur du livre ≪ Alice au Pays des Merveilles ≫.
Considérons les assertions suivantes :

1. Les animaux sont toujours mortellement offensés si je ne fais pas attention à eux ;
2. Les seuls animaux qui m'appartiennent se trouvent dans ce pré ;
3. Aucun animal ne peut résoudre une devinette s'il n'a reçu une formation convenable dans une école ;
4. Aucun des animaux qui se trouvent dans ce pré n'est un blaireau ;
5. Quand un animal est mortellementr offensé, il se met toujours à courir en tout sens et à hurler ;
6. Je ne fais jamais attention à un animal qui ne m'appartient pas ;
7. Aucun animal qui a reçu dans une école une formation convenable ne se met à courir en tout sens et à hurler.

Que peut-on en déduire ?