Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Feuille d'exercices numéro 1 du 04 octobre 2012

Important :
- les exercices sans astérisque doivent être maitrisés. Ils sont du type de ceux exigibles en examen.
- Ceux avec une astérisque sont considérés comme difficiles. Ce type d'exercices n'apparaîtra en examen que pour une toute petite partie des points.
- Ceux avec deux astérisques sont considérés comme très difficiles. Il n'y en aura pas de ce type en examen.

Domaines de définition, variations

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions

$$f(x) = \log(x^2 - 4); \quad g(x) = \frac{\sin 2x}{2 - \cos x}; \quad h(x) = e^{\sqrt{x(x-1)}}.$$

On rappelle que $D_{\log} =]0, +\infty[$, $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$.

Exercice 2. Donner les domaines de définition des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sin x} - 1}; \quad g(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1 - \ln x}; h(x) = \log(x^2 - 3x + 4); i(x) = \log(-x^2 + 2x - 3).$$

Exercice 3. Déterminer les domaines de définitions des fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$; $g(x) = \frac{1}{\log(x+2)}$; $h(x) = \sqrt{\frac{1}{\log((x-1)(x-1))}}$; $\varphi(x) = \frac{\log x}{\sqrt{\sin x}}$; $\psi(x) = x^2 + x + 1$; $\phi(x) = \log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$.

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) On suppose que f est croissante, et que $\forall x \in I, f(x) > 0$. Montrer qu'alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.

b) On suppose que f et g sont croissante. Montrer que $f + g$ et $f \circ g$ sont nécessairement croissantes.

Donner un exemple où le produit fg ne l'est pas ([indication : pensez au cas où une des fonctions prend des valeurs négatives]), et un autre où le quotient ne l'est pas non plus.

c) On suppose maintenant f croissante et g décroissante sur I. Montrer que $f \circ g$ est décroissante.

Donner un exemple montrant que la somme n'est pas nécessairement croissante, et un autre montrant qu'elle n'est pas non plus nécessairement décroissante.

Exercice 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice* 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq a$. Montrer que f n'est pas croissante sur l'intervalle d'extrémités a et $f(a)$.

c)On suppose que f est strictement monotone. Montrer que, ou bien f est strictement décroissante, ou bien $f(x) = x$ pour tout x.

d) Trouver un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strictement décroissante et telle que $g \circ g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Tracer le graphe de $f(x) = |x+1| - |x-1|$. [Indication : en scindant $\mathbb{R}$ en un certain nombre d'intervalles, donner des expressions de f sur chacun d'eux, où la valeur absolue n'intervient plus.]

Limites

Exercice 8. Calculer les limites suivantes, de deux faọns différentes :

a) En utilisant les théorèmes du cours.

b)* En revenant aux définitions avec les ε.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2}; \lim_{x\to\infty} x + \cos x; \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x}\cos x, \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 9. Calculer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin 2x}{x^2}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x\sqrt{x+1}}{x^2}.$$

Exercice 10. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}; \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}; \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}.$$

Exercice 11. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}; \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 2}; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - 1}}{x^2 + 1}.$$

Exercice 12. **Illustration des "formes indéterminées".** Chercher des exemples de fonctions f, g sur un intervalle I et de a infini ou réel de I ou extrémité de I, tels que :

a) La forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

a-1) f et g tendent vers 0 en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers 0.

a-2) f et g tendent vers 0 en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers $+\infty$.

a-3) f et g tendent vers 0 en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers $-\infty$.

a-4) f et g tendent vers 0 en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers un réel ℓ fixé à l'avance.

a-5) f et g tendent vers 0 en a, mais $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite en a.

b) La forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

b-1) f et g tendent vers $+\infty$ en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers 0.

b-2) f et g tendent vers $+\infty$ en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers $+\infty$.

b-3) Est-il possible que f et g tendent vers $+\infty$ en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers $-\infty$?

b-4) f et g tendent vers $+\infty$ en a, et $\frac{f}{g}$ tend en a vers un réel $\ell \leq 0$ fixé à l'avance. Et si $\ell < 0$?

b-5) f et g tendent vers $+\infty$ en a, mais $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite en a.

c) La forme indéterminée $\infty - \infty$. Même série de questions pour la forme indéterminée $\infty - \infty$.

d) La forme indéterminée $0 \times \infty$. Même série de questions pour la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Exercice 13. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} \text{ et que } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Exercice* 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0. On suppose que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0.$$

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que si $|x - x_0| < \alpha$, alors $f(x) > \frac{\ell}{2}$.

Exercice 15. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si elles le sont, donner une démonstration. Si elles sont fausses, donner un contre exemple.

a-1) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante et $f(0) = 1$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

a-2) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout x et $f(0) = 1$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

a-3) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $f(0) = 1$, et pour tout x, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b-1) Si on a $f(x) < g(x) < h(x)$ pour tout x, et si ces trois fonctions tendent respectivement vers ℓ, ℓ' et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors on a $\ell < \ell' < \ell''$.

b-2) Si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x, et si f et h tendent respectivement vers ℓ et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors g tends vers une limite ℓ' vérifiant
$\ell \leq \ell' \leq \ell''$

$\boxed{\textbf{Exercice 16.}}$ Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}.$$

a) On suppose que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

b*) On suppose que $\ell = 0$. L'équivalence du **a)** est-elle encore vraie ?

Continuité

$\boxed{\textbf{Exercice 17.}}$ Étudier la continuité des fonctions des deux premiers exercices de cette feuille, ainsi que des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}; g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}; h(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x-1}.$$

NB. Lorsqu'il est demandé "d'étudier la continuité" d'une fonction donnée explicitement, On demande en fait son domaine de définition, et l'ensemble des réels de ce domaine de définition, en lesquels la fonction est continue.

$\boxed{\textbf{Exercice 18.}}$

a) Donner les domaines de définition et de continuité de

$$\frac{1}{\log x} \quad ; \quad \frac{1}{\sin x} \quad ; \quad \sqrt{\sin x} \quad ; \quad \log(\sin x).$$

.

$\boxed{\textbf{Exercice 19.}}$ **a)** On pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) Donner les domaines de définition et de continuité de $\psi(x) = \varphi(\sin x)$ pour la fonction φ du **a)**.

$\boxed{\textbf{Exercice 20.}}$ On note $[x]$, ou encore $E(x)$, la "partie entière" d'un réel x, c'est à dire le plus petit entier relatif inférieur ou égal à x. Par exemple

$$[3,700975417] = E(3,700975417) = 3; [-3,700975417] = E(-3,700975417) = -4; [6] = E(6) = 6.$$

a) Montrer que E est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et discontinue sur $\mathbb{Z}$.

b) Donner les domaines de définition et de continuité de $f(x) = E(\sin x)$, puis de $g(x) = E(\cos x)$ et enfin de $h(x) = E(\frac{\sin x}{2})$.

Exercice* 21. Soit f et g définie et continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell' \in \mathbb{R}$$

existent. Montrer qu'alors f est bornée. Atteind-elle nécéssairement ses bornes ?

Exercice 22. On pose $f(x) = x$ si $x < 0$, et $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$.

a) Tracer le graphe de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 23-a*. Montrer, à l'aide de la définition avec les ε, que lorsque $a \in \mathbb{R}$, la fonction constante égale à a est continue sur $\mathbb{R}$.

b*) Même question pour $g(x) = \frac{1}{x}$.

c*) Même question pour $h(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 24** On va construire deux fonctions très laides.

a) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ [la preuve standard, attribuée à Euclide il y a près de 2 500 ans, s'effectue par l'absurde. On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et $q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, et on montre que nécessairement p ET q sont tous les deux pairs, absurde.]

b) Montrer qu'entre deux rationnels distincts, il y a toujours un irrationel, c'est- à dire :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b, \exists x \notin \mathbb{Q}, a < x < b.$$

Indication : construire, à l'aide de $\sqrt{2}$, un barycentre bien choisi de a et b qui soit irrationnel.

c) Montrer qu'entre deux irrationnels distincts, il y a toujours un rationel, c'est- à dire :

$$\forall x, y \notin \mathbb{Q}, x < y, \exists a \in \mathbb{Q}, x < a < y.$$

Indication : construire un barycentre bien choisi de x et y qui soit rationnel.

d) On pose $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f n'est continue en aucun réel. Essayez d'avoir une idée de son graphe.

e) On pose $g(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = -x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que g n'est continue qu'en 0. Essayez d'avoir une idée de son graphe.

Exercice 25. Montrer que l'équation $\cos x + x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice* 26. Donner un exemple de fonction continue bijective de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$, puis un exemple de fonction continue bijective de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. [Indication : pensez à la fonction tangente.]